В.И. ЗУБОВ

Лекции по теории управления

Лекции по теории управления, В. И. Зубов. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1975.

Настоящая книга содержит решение проблемы стабилизации программных движений, включая их построение, а также методы синтеза управлений, в том числе построения оптимальных управлений.

На основе второго метода Ляпунова строится подход к нахождению необходимых и достаточных условий оптимальности в различных вариационных задачах, а также развиваются на этой основе вычислительные процедуры. Проводится анализ стохастических управляемых систем, систем, управляемых цифровым автоматом. В заключение дается решение проблемы определения положения и управления вращательным движением твердого тела.

Книга рассчитана на широкий круг инженеров, студентов старших курсов, аспирантов, научных работников, специализирующихся в области прикладной математики.

З $\frac{20204-022}{053(02)-75}$ 9-75

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга содержит изложение курса лекций по теории управления, читаемого автором студентам и аспирантам математико-механического факультета и факультета прикладной математики и процессов управления Ленинградского государственного университета.

Глава I содержит изложение методов решения проблемы стабилизации программного движения. Она открывается теорией линейных систем и решением задачи об устойчивости установившихся движений. В этой же главе даются основы построения программных движений в линейных и нелинейных управляемых системах, развивается теория построения непрерывных, дискретных и релейных управлений, стабилизирующих заданное программное движение.

Глава II касается вопросов построения оптимальных управлений по отношению демпфирования заданной функции. На основе второго метода Ляпунова, который состоит в изучении движений с помощью некоторых функций, строится подход к нахождению необходимых и достаточных условий оптимальности в различных вариационных задачах, устанавливается связь такого подхода с принципами оптимальности Эрдмана—Вейерштрасса, с «принципом максимума» Л. С. Понтрягина, с принципом динамического программирования Р. Беллмана.

Глава III содержит построение управлений, оптимальных по отношению к функционалам, характеризующих, в частности, интегральную точность системы управления; исчерпывающим образом решается задача аналитического конструирования регуляторов, сформулированная А. М. Летовым; указываются способы построения синтезирующего оптимального управления через оптимальные программные управления, а также приводятся сходящиеся методы последовательных приближений для построения оптимального управления.

Глава IV содержит в ряде случаев решение проблемы синтеза управлений, решающих ту или иную задачу, в частности задачу перехода из одного фиксированного фазового состояния в другое фиксированное фазовое состояние. При этом найдена конструкция в синтезированной форме семейства упомянутых управлений для линейного случая, квазилинейного случая и в режиме стабилизации. Рассмотрены влияния запаздываний, а также дискретности и квантования по уровням сигнала в системе управления. Построения управлений опираются на проводимые измерения, поэтому

в этой же главе изучен вопрос об определении элементов движения, а также вопрос о локализации движения. В заключение главы строятся управления в задачах преследования.

В главе V развиваются методы последовательных приближений для отыскания оптимальных управлений — как программных, так и в синтезированной форме, а также развиваются методы последовательных приближений для отыскания движений, удовлетворяющих краевым условиям. Эти движения, как правило, удовлетворяют необходимым условиям оптимальности, и эти условия образуют, в свою очередь, совокупность краевых условий. Здесь же развиваются методы направленного поиска оптимальных коэффициентов усиления в системах автоматического регулирования с заданным законом управления.

В главе VI рассматриваются задачи построения управлений в системах, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями. Это построение осуществляется исходя из оптимальности вероятности осуществления определенных событий. Построение проводится для наиболее простых случаев: для линейных систем, а также указываются некоторые результаты, связанные с анализом нелинейных систем.

В главе VII развивается общий подход к математическому описанию процесса управления для того случая, когда в системе управления используется конечный автомат с памятью или без неё. Этот подход состоит в присоединении к динамическим уравнениям движения уравнений, описывающих функционирование конечной логической сети. В этой же главе развивается подход к анализу таких процессов управления.

В главе VIII развиваются применения различных результатов предыдущих глав к решению проблемы управления вращательным движением твердого тела. А именно, в результате этого рассмотрения найден вид управляющих моментов, действие которых приводит либо к ориентации вращающегося тела в заданном направлении, либо к сканированию осей, связанных с этим телом, по заданной программе. Наряду с этим показано, что упомянутые моменты можно создавать с помощью моментов кориолисовых сил, а также моментов относительных сил инерции. В этой главе также развивается теория определения элементов движения для указанного случая.

Автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность профессору Ю. А. Рябову за ценные советы и замечания, а также В. С. Ермолину, Е. Я. Смирнову, А. А. Улокиной за большой труд и внимание, которое они проявили при подготовке настоящей книги к печати.

В. И. Зубов

Глава I

ПРОБЛЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Линейные системы дифференциальных уравнений

1°. Пусть задана система линейных дифференциальных уравнений в векторной форме

$$d\mathbf{x}/dt = A\mathbf{x}, \tag{1.1}$$

где $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — квадратная постоянная матрица размерности $n \times n$, $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор-столбец с координатами $x_1, \ldots, x_n$.

Решение системы (1.1) будем искать в виде

$$\mathbf{x} = e^{\lambda t}\mathbf{c}, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{c}$ — некоторый постоянный вектор-столбец, координаты которых $c_1, \ldots, c_n$ зависят от выбора начальных условий системы (1.1), и λ — постоянное число.

Подставив решение (1.2) в систему (1.1), получим

$$(A - \lambda E)\cdot\mathbf{c} = 0. \tag{1.3}$$

Заметим, что $\|\mathbf{c}\| \neq 0$, а E есть единичная матрица порядка $n \times n$.

Для того чтобы существовало нетривиальное решение системы (1.3) относительно вектора $\mathbf{c}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{1.4}$$

Это соотношение представляет собой алгебраическое уравнение n-й степени относительно λ. Его корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются собственными числами матрицы A. Для каждого $\lambda = \lambda_j$ мы получим решение $\mathbf{c} = \bar{\mathbf{c}}_j$ системы (1.3). Можно взять в качестве координат вектора $\bar{\mathbf{c}}_j$ алгебраические дополнения элементов любой строки определителя (1.4) при $\lambda = \lambda_j$, если не все они равны нулю.

Итак, частным решением системы (1.1) будет

$$\mathbf{x}_j = e^{\lambda_j t}\bar{\mathbf{c}}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Чтобы получить общее решение системы (1.1), возьмем линейную комбинацию частных решений (1.5)

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \mathbf{x}_j = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j e^{\lambda_j t}\bar{\mathbf{c}}_j, \tag{1.6}$$

Эта линейная комбинация является общим решением системы (1.1) при условии $\lambda_i \neq \lambda_j$, если $i \neq j$ (точнее, корням $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ уравнения (1.4) отвечают простые элементарные делители матрицы A). В общем случае решение (1.5) представимо в форме

$$\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{p}_j(t) e^{\lambda_j t}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.7}$$

где $\mathbf{p}_j(t)$—полиномы относительно t, степень которых меньше кратности корня λ_j, а коэффициенты полиномов $\mathbf{p}_j(t)$ являются постоянными векторами.

Рассмотрим случаи: 1) все корни λ_j имеют отрицательную вещественную часть, т. е. $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$; тогда любое решение системы (1.1) стремится к нулю при неограниченном возрастании времени t; 2) существует по крайней мере хоть один корень λ_{j_0} такой, что $\operatorname{Re}\lambda_{j_0} > 0$; тогда соответствующее ему решение (1.6) неограниченно возрастает при $t \to +\infty$ при любых, даже при сколь угодно малых значениях координат вектора $\mathbf{x}_j$ в начальный момент времени.

Первый случай естественно назвать случаем *устойчивости решений*, а второй—случаем *неустойчивости решений.*

Наличие кратных корней λ_j не меняет картины поведения интегральных кривых системы (1.1), так как $\mathbf{p}_n(t) e^{\lambda t} \to 0$, если $e^{\lambda t} \to 0$.

Разобьем все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, т. е. все собственные числа матрицы A на три группы: 1) $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$—собственные числа с положительной вещественной частью, 2) $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+l}$—собственные числа с нулевыми вещественными частями, 3) $\lambda_{k+l+1}, \ldots$ $\ldots, \lambda_{k+n}$—собственные числа с отрицательными вещественными частями.

Известно [2], что существует неособое линейное преобразование $\mathbf{x} = S\mathbf{y}$ над вектором $\mathbf{x}$ такое, что система (1.1) приводится к следующей:

$$d\mathbf{y}/dt = S^{-1} A S \mathbf{y}, \tag{1.8}$$

где S^{-1}—матрица, обратная к S, а последнюю можно разбить на три подсистемы:

$$\frac{d\mathbf{y}_1}{dt} = A_+ \mathbf{y}_1 \quad \frac{d\mathbf{y}_2}{dt} = A_0 \mathbf{y}_2, \quad \frac{d\mathbf{y}_3}{dt} = A_- \mathbf{y}_3, \tag{1.9}$$

где A_+, A_0, A_-—матрицы, соответствующие указанным трем группам собственных чисел (это можно сделать, так как матрица A приводится к канонической форме Жордана).

Вектор $\mathbf{y}_1$ имеет размерность k, и все решения системы уравнений относительно $\mathbf{y}$ возрастают неограниченно при $t \to \infty$, в то время как все решения системы относительно вектора $\mathbf{y}_3$ убывают и стремятся к нулю при $t \to \infty$. Собственные числа матрицы A_0

имеют вид $\lambda_j = i\mu_j$, и частное решение, соответствующее такому λ_j, запишется в форме

$$\mathbf{y}_{2j} = e^{i\mu_j t}\,\bar{\mathbf{c}}_{2j}, \tag{1.10}$$

так что оно выражает одночастотные колебания. Общее решение для вектор-столбца $\mathbf{y}_2$ будет иметь вид

$$\mathbf{y}_2 = \sum_{j=1}^{l} \gamma_j e^{i\mu_j t}\,\bar{\mathbf{c}}_{2j}, \tag{1.11}$$

если считать, что μ_j, $j = 1, 2, \ldots, l/2$, различны.

Решение (1.11) описывает сложное колебание, представляющее результат наложения одночастотных колебаний. Эти колебания будут периодическими, если частоты соизмеримы, и почти-периодическими, если частоты несоизмеримы.

Таким образом, все n-мерное пространство может быть разложено в прямую сумму подпространств, и решения в любом подпространстве ведут себя одинаковым образом, а движение во всем пространстве складывается из движений в этих подпространствах в указанном выше смысле.

Примечание 1.1. Из приведенных рассуждений возникает задача определения и анализа характера корней уравнения n-й степени

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{1.12}$$

В частности, при выяснении вопроса об устойчивости решения надо определить, лежат ли все корни этого уравнения в левой полуплоскости комплексного переменного λ.

Отобразим эту полуплоскость на единичный круг плоскости комплексного переменного ρ при помощи функции

$$\lambda = \frac{\rho - 1}{1 + \rho}. \tag{1.13}$$

При этом преобразовании корни уравнения (1.12) перейдут в корни уравнения

$$\det\left[A - E\frac{\rho - 1}{1 + \rho}\right] = 0. \tag{1.14}$$

Умножая (1.14) на $(1+\rho)^n$, получим

$$\det[A + E - \rho(E - A)] = 0. \tag{1.15}$$

Меняя в (1.15) ρ на $-\rho$ и умножая обе части на $\det[(A - E)^{-1}]$, получим

$$\det(B - \rho E) = 0, \tag{1.16}$$

где $B = (A - E)^{-1}(A + E)$.

Таким образом, если $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, где λ_j есть собственные числа матрицы A, то все собственные числа матрицы B лежат в единичном круге.

Обозначим корни (1.16) через $\rho_1, \ldots, \rho_n$. Известно, что матрица B^k будет иметь корни $\rho_1^k, \ldots, \rho_n^k$. Отсюда следует: для того чтобы собственные числа матрицы A лежали в левой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы

$$B^k \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \longrightarrow +\infty. \tag{1.17}$$

Действительно, B можно представить в виде

$$B = S^{-1} RS,$$

где S — неособая матрица преобразования подобия, а R имеет диагональную форму с $\rho_1, \ldots, \rho_n$ по диагонали или форму Жордана с такой же диагональю. Тогда

$$B^k = S^{-1} R^k S, \tag{1.18}$$

и $R^k \longrightarrow 0$, если ρ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, по модулю меньше единицы. Отсюда и следует (1.17).

Условие (1.17) будет выполнено, если для какого-либо k окажется, что модуль каждого элемента $b_{i,j}^k$ матрицы B^k не превосходит числа α/n, где α — любое положительное число меньше единицы, а n — число уравнений, т. е. если

$$|b_{i,j}^{(k)}| \leqslant \alpha/n. \tag{1.19}$$

Действительно, тогда каждый элемент матрицы B^{2k} не будет превосходить $n\frac{\alpha}{n}\frac{\alpha}{n} = \frac{\alpha^2}{n}$, матрицы B^{3k} — $\frac{\alpha^3}{n}$ и т. д., что приводит к (1.17).

Проверка этого критерия основана на построении матрицы B. Мы имеем

$$B = (A-E)^{-1}(A+E) = (A-E)^{-1}[(A-E)+2E],$$

откуда

$$B = E + 2(A-E)^{-1}.$$

Следовательно, матрица B будет построена, если будет найдена матрица

$$C = (A-E)^{-1}.$$

В связи с этим возникают задачи.

Задача 1.1. Вычисляем следы матриц

$$\operatorname{Sp} B^1 = s_1, \qquad \operatorname{Sp} B^2 = s_2, \ \ldots, \qquad \operatorname{Sp} B^n = s_n.$$

Выразить через $s_1, \ldots, s_n$ необходимые и достаточные условия того, что $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Задача 1.2. Вычисляем

$$\operatorname{Sp} B^1=\sigma_1, \quad \operatorname{Sp} B^2=\sigma_2, \quad \operatorname{Sp} B^4=\sigma_3, \quad \ldots \quad \operatorname{Sp} B^{2^{n-1}}=\sigma_n.$$

Выразить через $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ необходимые и достаточные условия того, что $\operatorname{Re}\lambda_j<0$, $j=1, 2, \ldots, n$.

2°. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений n-го порядка

$$d\mathbf{x}/dt=A(t)\mathbf{x}, \tag{1.20}$$

где $A(t)$ вещественная, непрерывная, 2—π-периодическая матрица

$$A(t+2\pi)=A(t). \tag{1.21}$$

Возьмем фундаментальную матрицу $Y(t)$ решений

$$Y(t)=\begin{pmatrix} y_{11}, & \ldots, & y_{1n} \\ . & . & . \\ y_{n1}, & \ldots, & y_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.22}$$

причем любой столбец есть решение системы (1.20), а при $t=0$ $Y(0)=E$, E—единичная матрица. Известно, что $\det[Y(t)]\neq 0$. Решение, удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ при $t=0$, будет иметь вид

$$\mathbf{x}(t)=Y(t)\mathbf{x}_0. \tag{1.23}$$

Ясно, что

$$\overline{Y}(t)=Y(t)C, \tag{1.24}$$

где C—некоторая постоянная неособая матрица, также является фундаментальной матрицей, и вообще любая фундаментальная матрица содержится в формуле (1.24).

Рассмотрим матрицу $Y(t+2\pi)$. Она удовлетворяет уравнению

$$\dot{Y}=A(t+2\pi)Y=A(t)Y$$

и является, таким образом, также неособой фундаментальной матрицей, а следовательно, выражается через $Y(t)$ по формуле (1.24):

$$Y(t+2\pi)=Y(t)C. \tag{1.25}$$

По аналогии

$$Y(t+4\pi)=Y(t)C^2. \tag{1.26}$$

Определение 1.1. *Функции, обладающие свойством*

$$\varphi(t+\omega)=k\varphi(t) \tag{1.27}$$

для любого t и $k\neq 1$, будем называть периодическими функциями 2-го рода.

Положим
$$h(t)=\varphi(t)k^{-t/\omega}, \tag{1.28}$$
Тогда функция $h(t)$—ω-периодическая. Действительно,
$$h(t+\omega)=\varphi(t+\omega)k^{-(t+\omega)/\omega}=k\varphi(t)k^{-t/\omega}k^{-1}=h(t).$$
Таким образом, периодические функции 2-го рода представляются в виде
$$\varphi(t)=k^{t/\omega}h(t), \tag{1.29}$$
где $h(t+\omega)=h(t)$—ω-периодическая функция. В соответствии с (1.25) фундаментальная матрица $Y(t)$ является периодической функцией 2-го рода с $\omega=2\pi$, $k=C$. Следовательно, можно представить $Y(t)$ в виде
$$Y(t)=\Phi(t)C^{t/(2\pi)}, \tag{1.30}$$
где $\Phi(t)=\Phi(t+2\pi)$ и C—неособая постоянная матрица.

Положим
$$B=\frac{1}{2\pi}\ln C, \tag{1.31}$$
и перепишем (1.30) в виде
$$Y(t)=\Phi(t)e^{Bt}, \tag{1.32}$$
причем матрица B—постоянная.

В системе (1.20) сделаем неособое линейное преобразование над вектором $\mathbf{x}$ по формуле
$$\mathbf{x}(t)=\Phi(t)\mathbf{z}(t). \tag{1.33}$$
Оно приводит к системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами
$$d\mathbf{z}/dt=B\mathbf{z}. \tag{1.34}$$
Покажем это. Дифференцируем по t равенство (1.33):
$$\dot{\mathbf{x}}=\dot{\Phi}\mathbf{z}+\Phi\dot{\mathbf{z}}=A\mathbf{x}=A\Phi\mathbf{z}. \tag{1.35}$$
Учитывая (1.32) и тот факт, что $Y(t)$—фундаментальная матрица решений для (1.20), получим
$$\dot{Y}=\dot{\Phi}e^{Bt}+\Phi Be^{Bt}=AY=A\Phi e^{Bt},$$
или
$$[\dot{\Phi}+\Phi B-A\Phi]\,e^{Bt}=0,$$
откуда
$$\dot{\Phi}=-\Phi B+A\Phi. \tag{1.36}$$
Подстановка (1.36) в (1.35) дает $-\Phi B\mathbf{z}+A\Phi\mathbf{z}+\Phi\dot{\mathbf{z}}=A\Phi\mathbf{z}$, или

$\Phi\dot{z} = \Phi Bz$, откуда

$$\dot{z} = \Phi^{-1}\Phi Bz = Bz,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, существует неособая матрица преобразования такая, что систему (1.20) с периодическими коэффициентами можно свести к системе с постоянными коэффициентами (1,34), так что [3]

$$Y(t) = \Phi(t)\, e^{Bt}. \qquad (1.37)$$

При этом, так как $\Phi(t)$ — 2π-периодическая матрица, то можно получить, что

$$B = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{Y(2\pi)}{Y(0)}. \qquad (1.37')$$

Это составляет содержание *теоремы Флоке*.

Рассмотрим теперь общий случай линейной системы

$$d\mathrm{x}/dt = A(t)\,\mathrm{x}, \qquad (1.38)$$

где $A(t)$ — матрица порядка $n \times n$, элементы которой являются вещественными непрерывными и ограниченными функциями, заданными при $t \geqslant 0$. Пусть известна фундаментальная матрица решений $Y(t)$. Тогда решение неоднородной системы

$$d\mathrm{x}/dt = A(t)\,\mathrm{x} + f(t) \qquad (1.39)$$

при любом выборе непрерывной векторной функции $f(t)$ может быть найдено с помощью квадратур и дается формулой Коши

$$\mathrm{x}(t) = Y(t)\, Y^{-1}(t_0)\, \mathrm{x}_0 + \int_{t_0}^{t} Y(t) Y^{-1}(\tau) f(\tau)\, d\tau. \qquad (1.40)$$

Аналитическая природа функций, образующих фундаментальную матрицу $Y(t)$, почти не изучена, хотя аналитическое представление этой фундаментальной матрицы весьма важно иметь для решения ряда задач теории управления и колебаний.

Например в качестве весьма трудной проблемы можно предложить следующую задачу.

Задача 1.3. Найти представление фундаментальной матрицы решений для системы

$$\dot{\mathrm{x}} = A(t)\,\mathrm{x}, \qquad (1.41)$$

где

$$A(t) = \sum_{k=-N}^{N} A_k e^{i\mu_k t}.$$

Здесь A_k — постоянные матрицы; μ_k — постоянные вещественные числа; N — некоторое натуральное число.

Для изучения свойств фундаментальной матрицы А. М. Ляпунов ввел в рассмотрение характеристичные числа [10]. Ниже излагается теория, принадлежащая А. М. Ляпунову.

Определение 1.2. *Характеристичным числом $\chi(f)$ непрерывной функции $f(t)$, определенной на всей вещественной полуоси $t \geqslant 0$, называется число λ_0, удовлетворяющее при любом $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, условиям:*

1) $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)\, e^{(\lambda_0 - \varepsilon)t} = 0,\ \forall \varepsilon > 0;$

2) *функция* $f(t)\, e^{(\lambda_0+\varepsilon)t}$ *не ограничена при* $t \to \infty$.

Если при любом λ_0 $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)\, e^{\lambda_0 t} = 0$, то считаем, что $\chi(f) = +\infty$ (характеристичное число нуля равно $+\infty$).

Если $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)\, e^{\lambda_0 t} = \infty$, то считаем, что $\chi(f) = -\infty$. При этом условии функция $f(t)$ имеет конечное или бесконечное характеристичное число. Нетрудно показать, что

$$\chi(f) = -\overline{\lim} \frac{\ln|f(t)|}{t} \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \quad |f| \neq 0.$$

Приведем некоторые из свойств характеристичных чисел функций, установленных А. М. Ляпуновым.

1. Характеристичное число суммы двух функций равно наименьшему из характеристичных чисел этих функций, когда эти числа различны, и не меньше их, когда они равны.

2. Характеристичное число произведения двух функций не меньше суммы их характеристичных чисел.

Отсюда следует

$$\chi\left(f \frac{1}{f}\right) = 0 \geqslant \chi(f) + \chi\left(\frac{1}{f}\right).$$

3. Для того чтобы сумма характеристичных чисел функции f и $1/f$ равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы выражение $\frac{1}{t}\ln|f(t)|$ стремилось при $t \to +\infty$ к определенному пределу.

4. Если $\chi\left(f \frac{1}{f}\right) = \chi(f) + \chi\left(\frac{1}{f}\right) = 0$, то $\chi(f\varphi) = \chi(f) + \chi(\varphi)$, где φ — какая-нибудь функция.

5. Характеристичное число интеграла не меньше характеристичного числа подынтегральной функции. При этом рассматривается интеграл $\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau$, если $\chi(f) \leqslant 0$; в противном случае $-\int\limits_{t}^{\infty} f(\tau)\, d\tau$.

Пусть $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — какое-нибудь решение системы (1.38). Будем называть характеристичным числом рассматриваемого решения и обозначать через $\chi(x_1, \ldots, x_n)$ наименьшее из характеристичных чисел функций $x_1, \ldots, x_n$.

Всякое решение линейной системы (1.38), отличное от нулевого, имеет конечное характеристичное число.

Действительно, умножим (1.38) скалярно на $\mathbf{x}$, и тогда, поскольку $\mathbf{x}^* A\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}^* A^*\mathbf{x}$, получим

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^*(A + A^*)\mathbf{x},$$

где * означает транспонирование.

Обозначим собственные числа матрицы $A + A^*$ через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и положим

$$\lambda = \max_{1 \leqslant s \leqslant n}\{|\lambda_s|\} < +\infty.$$

Тогда, обозначая $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$, легко получить

$$\|\mathbf{x}_0\|^2 e^{-\lambda t} \leqslant \|\mathbf{x}\|^2 \leqslant \|\mathbf{x}_0\|^2 e^{\lambda t}.$$

Таким образом, можно считать, что

$$|x_s(t)| \leqslant ce^{\lambda t/2}; \quad s = 1, 2, \ldots, n.$$

Это и означает ограниченность характеристичных чисел.

Пусть $Y(t)$ — фундаментальная матрица решений уравнения (1.38). Справедливо следующее утверждение: система (1.38) не может иметь более n решений с различными характеристичными числами. Так как общее решение системы (1.38) представляется в виде $\mathbf{x}(t) = Y(t)\mathbf{c}$, или $x_s = \sum_{j=1}^{n} y_{sj}c_j$, $s = 1, 2, \ldots, n$, где c_j — произвольные постоянные, то характеристичное число решений $x_s(t)$ равно наименьшему из характеристичных чисел функций $y_{sj}(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, если последние различны (свойство 1).

Пусть среди характеристичных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ какой-то фундаментальной системы решений имеются равные. Тогда характеристичное число решения, являющегося линейной комбинацией решения с одинаковыми λ_j рассматриваемой фундаментальной системы, может оказаться больше характеристичных чисел решений, входящих в комбинацию. В этом случае полученное решение включаем вместо одного из комбинируемых решений в состав фундаментальной системы. Если новая фундаментальная система опять будет иметь решения, комбинация которых даст решение с характеристичным числом, большим, чем характеристичные числа группируемых решений, то преобразуем эту систему, как предыдущую. Поскольку число различных характеристичных чисел

конечно, то в результате получим систему решений, в которой всякая линейная комбинация решений будет обладать характеристичным числом, равным характеристичному числу одного из комбинируемых решений. Полученная фундаментальная система называется *нормальной*.

Характеристичные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ нормальной системы решений (среди них могут быть и равные) называются *характеристичными числами системы дифференциальных уравнений* (1.38).

Пусть $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$; тогда справедливо неравенство

$$S \leqslant \chi \left[\exp \left\{ \int_0^t \sum_s a_{ss} d\tau \right\} \right],$$

которое получается из свойств характеристичных чисел и равенства

$$\det Y(t) = \det Y(0) \exp \left\{ \int_0^t \sum_{s=1}^{n} a_{ss} d\tau \right\}.$$

Обозначим

$$\mu = \chi \left[\exp \left\{ -\int_0^t \sum_{s=1}^{n} a_{ss} d\tau \right\} \right].$$

Определение 1.3. *Систему* (1.38) *будем называть правильной, если* $S + \mu = 0$.

Пример 1.1. Пусть $dx/dt = Ax$, где A — постоянная матрица. Обозначим через $\mu_1, \ldots, \mu_n$ корни уравнения $\det(A - \mu E) = 0$. Оказывается, что $\lambda_s = \mathrm{Re}[-\mu_s]$, $s = 1, \ldots, n$.

Пример 1.2. Пусть $A(t)$ в системе (1.38) — периодическая матрица периода T. Тогда, в соответствии с (1.37), (1.37′), где 2π надо заменить на T,

$$Y(t) = \Phi(t) e^{Bt},$$

где

$$B = \frac{1}{T} [\ln Y(T) - \ln Y(0)].$$

В частности, если $Y(t)$ — нормальная фундаментальная матрица, так что $Y(0) = E$ — единичная матрица, то

$$B = \frac{1}{T} \ln Y(T).$$

Обозначим корни уравнения $\det(B - \mu E) = 0$ через $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Тогда $\lambda_s = \mathrm{Re}[-\mu_s]$. Заметим, что система (1.38) будет правильной всегда, если A — постоянная или периодическая матрица.

3°. Рассмотрим теперь линейную систему уравнений в конечных разностях

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.42}$$

где A — постоянная вещественная матрица размерности $n \times n$, $\mathbf{x}_k$ есть n-мерный вектор. На систему (1.42) можно смотреть как на рекуррентное соотношение, определяющее каждый член последовательности $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ через непосредственно ему предшествующий.

Таким образом, если задать вектор $\mathbf{x}_0$, то каждый член этой последовательности определяется по формуле

$$\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0. \tag{1.43}$$

Из формулы (1.43) вытекает, что характер поведения решения системы (1.42) при $k \to +\infty$ определяется собственными числами матрицы A. Так, например, $\|\mathbf{x}_k\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ при любом выборе вектора $\mathbf{x}_0$ тогда и только тогда, когда собственные числа матрицы A расположены внутри единичного круга с центром в точке $\rho = 0$, т. е. когда

$$|\rho_j| < 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — корни уравнения

$$\det(A - \rho E) = 0. \tag{1.44}$$

Несмотря на то, что система (1.42) и ее общее решение (1.43) имеют весьма простой вид, к такого рода системе сводится достаточно широкий круг линейных систем дифференциальных уравнений, описывающих, в частности, дискретные системы автоматического регулирования.

Пусть дана система вида

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \sum_{j=0}^{l} [A_j \mathbf{x}((k-j)h) + B_j \mathbf{z}((k-j)h)], \tag{1.45}$$

$$\mathbf{z}((k+1)h) = \sum_{j=0}^{l} [C_j \mathbf{x}((k-j)h) + D_j \mathbf{z}((k-j)h)]. \tag{1.46}$$

где h — некоторый положительный параметр (шаг дискретности); $\mathbf{x}$ — вектор размерности n и $\mathbf{z}$ — вектор размерности r; A_j, B_j, C_j, D_j, $j = 1, \ldots, l$ являются постоянными матрицами соответствующих размерностей.

Система (1.45) — (1.46) определяет движение при $t \in [kh, (k+1)h]$ с начальным условием $\mathbf{x} = \mathbf{x}(kh) = \mathbf{x}_k$. Другими словами, для того чтобы определить движение с помощью системы (1.45) — (1.46), следует задать начальные значения $\mathbf{x}((k-j)h) = \mathbf{x}_{k-j}$, $\mathbf{z}((k-j)h) = \mathbf{z}_{k-j}$, $j = 0, 1, \ldots, l$. Тогда интегрируя систему (1.45), можно определить единственным образом вектор-функцию $\mathbf{x}(t)$ при $t \in [kh, (k+1)h]$ и т. д.

Действительно, применив приведенную выше формулу Коши к системе (1.45), получим

$$x(t)=e^{A(t-kh)}x(kh)+$$
$$+\int_{kh}^{t} e^{A(t-\tau)}\left\{\sum_{j=1}^{l}[A_j x((k-j)h)+B_j z((k-j)h)]\right\}d\tau \qquad (1.47)$$

при $t\in[kh,\ (k+1)h]$.

Полагая в (1.47) $t=(k+1)h$, найдем

$$x((k+1)h)=\sum_{j=0}^{l}[\bar{A}_j x((k-j)h)+\bar{B}_j z((k-j)h)], \qquad (1.48)$$

где через $\bar{A}_j$, $\bar{B}_j$ обозначены постоянные матрицы, получающиеся из (1.47) в результате приведения подобных членов и раскрытия скобок.

Будем рассматривать теперь уравнение (1.48) совместно с (1.46). Для того чтобы записать эту совокупную систему в форме (1.42), введем в рассмотрение вектор

$$\xi_{k+1}=\{x((k+1)h),\ x(kh),\ \ldots,\ x((k-l+1)h),$$
$$z((k+1)h),\ \ldots,\ z((k-l+1)h)\}.$$

Тогда систему уравнений (1.46), (1.48) можно записать в виде

$$\xi_{k+1}=\bar{A}\xi_k, \qquad (1.49)$$

где $\bar{A}$ — вещественная квадратная постоянная матрица порядка $(n+r)(l+1)$.

Согласно изложенному выше поведение решений системы (1.49) определяется собственными числами матрицы $\bar{A}$. Из формул же (1.47) и (1.46) вытекает, что поведение решений линейной системы (1.45)—(1.46) целиком зависит от поведения последовательности ξ_k.

Таким образом, если собственные числа матрицы $\bar{A}$ лежат внутри единичного круга, то, как показано выше, будет

$$x(t)\to 0,\quad z(t)\to 0\quad \text{при}\quad t\to+\infty,$$

и, более того, при выполнении этого свойства собственные числа матрицы $\bar{A}$ будут лежать внутри указанного круга.

4°. Рассмотрим вопрос о представлении решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

В последние годы выяснилась та большая роль, которую играют системы уравнений с запаздывающим аргументом в различных вопросах физики, механики и математики. Поэтому приведем полную теорию наиболее важного класса систем диф-

ференциальных уравнений с запаздывающим аргументом — линейных систем с постоянными коэффициентами и постоянными запаздываниями.

Система уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{l=1;\ j=0}^{n,\ \nu} a_{s,l}^{(j)} x_l(t-h_j), \quad s=1, \ldots, n, \tag{1.50}$$

где $a_{sl}^{(j)}$ — вещественные постоянные, $h_0=0$, а $0<h_1<h_2<\ldots$ $\ldots<h_\nu$ — также вещественные постоянные, называется системой линейных стационарных однородных уравнений с ν запаздываниями.

Обозначим через $g_{sl}(\vartheta)$, $s, l=1, \ldots, n$, совокупность функций ограниченной вариации, заданных на $[-h, 0]$. Рассмотрим систему

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{l=1}^{n} \int_{-h}^{0} x_l(t+\vartheta)\, dg_{sl}(\vartheta), \quad s=1, \ldots, n. \tag{1.51}$$

Легко видеть, что система (1.51) включает в себя как частный случай систему (1.50).

Положим далее $G(\vartheta)=\{g_{sl}(\vartheta)\}_{s,\ l=1}^{n}$. Тогда систему (1.51) можно записать в матричной форме

$$\frac{dx}{dt} = \int_{-h}^{0} dG(\vartheta)\, x(t+\vartheta), \tag{1.52}$$

где x является векторной функцией, а $dG(\vartheta)=\{dg_{sl}(\vartheta)\}_{s,\ l=1}^{n}$. В (1.52) дифференциал относится только к элементам матрицы G.

Мы ставим перед собой цель дать способы представления решений системы (1.52) при условии, что $x(t)=\varphi(t)$; $t\in[-h, 0]$ (где φ — некоторая векторная функция, о которой речь будет идти ниже), а также исследовать поведение этого решения при $t\to+\infty$.

Отметим, что подобные задачи для систем вида (1.50) или, точнее, для частных случаев таких систем были рассмотрены также в работах [4—6]. В дальнейшем всюду будем использовать тот факт, что решение системы (1.52) существует для любой непрерывной векторной функции $\varphi(t)$, заданной в $[-h, 0]$ и что во всем промежутке $[-h; +\infty]$ имеет место оценка $\|x(t)\|\leqslant Me^{ct}$, где M, c — некоторые постоянные.

Обозначим через $A(\lambda)$ матрицу $\int_{-h}^{0} e^{\lambda\vartheta} dG(\vartheta) - \lambda E$. В работе [7] показано, что все корни уравнения

$$\det A(\lambda)=0 \tag{1.53}$$

лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\leqslant c$, где c — число, выписанное в приведенной выше оценке для $\|x(t)\|$.

Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ все точки комплексной плоскости, в которых целая функция $\det A(\lambda)$ обращается в нуль. При этом точки занумерованы так, что $\operatorname{Re}(\lambda_1) \geqslant \operatorname{Re}(\lambda_2) \geqslant \ldots$

Пусть s_j есть кратность корня λ_j уравнения (1.53). Разобьем точки λ_j, $j = 1, 2, \ldots$, на группы, отнеся в одну группу те, которые имеют одинаковые действительные части. Таким образом, каждая из групп будет характеризоваться одним из чисел $\sigma_1 > > \sigma_2 > \ldots$, при этом σ_j—действительная часть корней, входящих в j-ю группу. Покажем теперь, что каждая из таких групп конечна.

Лемма 1.1. *Число корней уравнения* (1.53), *расположенных в вертикальной полосе,*

$$a \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant b, \qquad a > -\infty, \tag{1.54}$$

конечно.

Элементами матрицы $\int\limits_{-h}^{0} e^{\lambda\vartheta} dG(\vartheta)$ являются целые функции $\psi_{sl}(\lambda) = \int\limits_{-h}^{0} e^{\lambda\vartheta} dg_{sl}(\vartheta)$. Легко видеть, что эти функции ограничены в полосе (1.54). Поэтому функции b_k в соотношении

$$\det A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} b_k \lambda^{n-k}$$

будут также ограниченными в указанной полосе, так как они являются конечными полиномами относительно функций $\psi_{sl}(\lambda)$. Отсюда следует, что если λ принадлежит полосе (1.54) и $|\lambda| > B > 0$, где B—достаточно большое число, то $|\det A(\lambda)| > 0$. Таким образом, корни уравнения (1.53), лежащие в полосе (1.54), расположены полностью внутри области $a \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant b$, $|\lambda| \leqslant B$, а точки сгущения корней в конечной области на комплексной плоскости быть не может. Следовательно, в указанной полосе расположено лишь конечное число корней.

Теорема 1.1. *Каждому корню λ_j уравнения* (1.53) *отвечает решение уравнения* (1.52) $\mathbf{x}_j(t)$, *представимое в форме*

$$\mathbf{x}_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_j^+} e^{\lambda t} A^{-1}(\lambda) \mathbf{F}(\lambda)\, d\lambda, \tag{1.55}$$

где c_j^+—окружность радиуса r_j с центром в точке $\lambda = \lambda_j$ такая, что в круге $|\lambda - \lambda_j| \leqslant r_j$ нет других корней уравнения (1.53), *а $\mathbf{F}(\lambda)$—произвольная однозначная аналитическая функция в этом замкнутом круге. Интегрирование в формуле* (1.55) *ведется против часовой стрелки.*

Доказательство. Функция x_j, определяемая формулой (1.55), определена при $t \in (-\infty, +\infty)$, непрерывно диффе-

ренцируема и, более того, является целой функцией относительно t. Подставим функцию (1.55) в систему (1.52); тогда получим

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{c_j^+} e^{\lambda t} A^{-1}(\lambda)\, \mathbf{F}(\lambda)\, d\lambda\right) - \int\limits_{-h}^{0} dG(\vartheta) \int\limits_{c_j^+} e^{\lambda(t+\vartheta)} A^{-1}(\lambda)\, F(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \int\limits_{c_j^+} e^{\lambda t}\left(\lambda E - \int\limits_{-h}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, dG(\vartheta)\right) A^{-1}(\lambda)\, F(\lambda)\, d\lambda = -\int\limits_{c_j^+} e^{\lambda t} F(\lambda)\, d\lambda.$$

Последний интеграл, стоящий в цепи этих равенств, по теореме Коши равен нулю. Таким образом, функции x_j удовлетворяют системе (1.52).

Следствие 1. *Каждому корню λ_j уравнения* (1.53) *отвечает целая функция $\mathbf{P}_j(t)\, e^{\lambda_j t}$, являющаяся решением системы* (1.52), *где $\mathbf{P}_j(t)$ представляет собой полином относительно t степени не выше $s_j - 1$ с векторными постоянными коэффициентами.*

Действительно, функцию (1.55) по теореме о вычетах можно представить в следующей форме:

$$\mathbf{x}_j(t) = \operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_j} e^{\lambda t} A^{-1}(\lambda)\, \mathbf{F}(\lambda).$$

Положим

$$A^{-1}(\lambda) = \frac{\bar{A}(\lambda)}{\det A(\lambda)},$$

где $\bar{A}(\lambda)$—транспонированная матрица алгебраических дополнений для элементов $A(\lambda)$. Тогда $\mathbf{x}_j$ можно выразить в форме

$$\mathbf{x}_j(t) = \frac{1}{(s_j-1)!} \frac{d^{s_j-1}}{d\lambda^{s_j-1}} \left[\frac{e^{\lambda t} \bar{A}(\lambda)\, \mathbf{F}(\lambda)\, (\lambda-\lambda_j)^{s_j}}{\det A(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_j} = e^{\lambda_j t} \sum_{l=1}^{s_j-1} t^l \mathbf{c}_l.$$

При этом, ввиду произвольности однозначной аналитической функции $\mathbf{F}$, постоянные векторы $\mathbf{c}_l$ выражаются через s_j произвольных векторов

$$\frac{d^l \mathbf{F}}{d\lambda^l}\bigg|_{\lambda=\lambda_j}, \quad l = 0, \ldots, s_j - 1,$$

при помощи линейных комбинаций с коэффициентами, зависящими лишь от матрицы $A(\lambda)$.

Следствие 2. *Если уравнение* (1.53) *содержит чисто мнимые корни, то система* (1.52) *имеет периодические решения. В силу линейности системы* (1.52) *любая комбинация функций $\mathbf{x}_j$, взятых в конечном числе, также будет решением системы* (1.52). *Следовательно, если есть несколько рационально независимых*

чисто мнимых корней, то система (1.52) *имеет также почти-периодические решения (подразумевается наличие попарно несоизмеримых корней).*

Введем в рассмотрение пространство векторных функций, заданных и непрерывных на сегменте $[-h_1, 0]$, $h_1 > h$, $\varphi(-h_1) = 0$ и удовлетворяющих на нем условиям Дирихле. Совокупность этих функций будем обозначать через $\mathbf{C}_0$.

Рассмотрим векторную функцию

$$\mathbf{B}(\lambda, \varphi) = \int_{-h_1}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, dG \int_{-h_1}^{\vartheta} e^{-\lambda\tau}\varphi(\tau)\, d\tau - \lambda \int_{-h_1}^{0} e^{-\lambda\tau}\varphi(\tau)\, d\tau - \varphi(0). \quad (1.56)$$

Здесь $G(\vartheta) = G(-h)$ при $\vartheta \in [-h_1, h]$.

Функция $\mathbf{B}(\lambda; \varphi)$, определенная равенством (1.56), есть целая функция параметра λ при любом $\varphi \in \mathbf{C}_0$ и при закрепленном λ является линейным ограниченным оператором из $\mathbf{C}_0$ в E_n', где E_n' — n-мерное комплексное пространство.

Теорема 1.2. *Функция*

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\text{V.P.}}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} A^{-1}(\lambda)\, \mathbf{B}(\lambda; \varphi)\, d\lambda, \quad (1.57)$$

где $\sigma > c$ представляет собой непрерывное решение системы (1.52), *удовлетворяющее условию*

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \quad \varphi \in \mathbf{C}_0,$$

т. е. любое решение системы (1.52), *удовлетворяющее условию*

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h_1, 0], \quad (1.58)$$

при любом $\varphi(t) \in \mathbf{C}_0$ представимо формулой (1.57). *Здесь* V. P. — *главное значение интеграла.*

Доказательство. Векторная функция (1.57) получена при помощи преобразования Лапласа из системы (1.52) и поэтому определена и непрерывна при $t \geqslant -h_1$. Покажем сначала, что функция (1.57) удовлетворяет условию (1.58). Для этого рассмотрим функцию $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t)$ при $t \in [-h_1, 0]$ и $\bar{\varphi}(t) = \varphi(0)$ при $t \geqslant 0$. Легко видеть, что эту функцию можно выразить в форме

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{\text{V.P.}}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} \left(\int_{-h_1}^{0} e^{-\lambda\tau}\varphi(\tau)\, d\tau + \frac{\varphi(0)}{\lambda} \right) d\lambda. \quad (1.59)$$

Вычитая из равенства (1.57) почленно (1.59), получим

$$\mathbf{x}(t) - \bar{\varphi}(t) = \frac{\text{V.P.}}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda}\, \mathbf{R}(\lambda)\, d\lambda, \quad (1.60)$$

где

$$\mathbf{R}(\lambda)=-A^{-1}(\lambda)\int_{-h_1}^{0} dG\left(\int_{\vartheta}^{0} e^{\lambda(\vartheta-\tau)}\varphi(\tau)\,d\tau+\frac{\varphi(0)}{\lambda}e^{\lambda\vartheta}\right).$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части равенства (1.60), для чего рассмотрим систему окружностей c_r с центром в нуле радиуса $r>0$, $r\to+\infty$. Рассмотрим замкнутый контур L_r, образованный дугами этих окружностей c_r, лежащими в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\geqslant\sigma$, и отрезком прямой $\operatorname{Re}\lambda=\sigma$, лежащим внутри c_r.

При любом $t\geqslant -h_1$ будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r} e^{\lambda t}\mathbf{R}(\lambda)\,d\lambda=0,$$

ибо внутри и на границе контура L_r подынтегральная функция является однозначной и аналитической. Отсюда следует, что вычисление интеграла (1.60) сводится к нахождению предела

$$J=\lim_{r\to\infty}\int_{c_r} e^{\lambda t}\mathbf{R}(\lambda)\,d\lambda. \tag{1.61}$$

Легко видеть, что $|\mathbf{R}(\lambda)|\to 0$ при $\lambda\in c_r$ и $r\to+\infty$. Поэтому по лемме Жордана $J\equiv 0$ при $t<0$. Отсюда $\mathbf{x}(t)-\varphi(t)=0$ при $t\in[-h_1,\ 0]$. Из непрерывности функций $\mathbf{x}(t)$ и $\varphi(t)$ следует, что $\mathbf{x}(t)=\varphi(t)$ на $t\in[-h_1,\ 0]$.

Покажем теперь, что функция $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t;\ \varphi)$ удовлетворяет системе (1.52) при $t\geqslant 0$. Для этого введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\mathbf{Y}=e^{-2ct}\mathbf{x}(t;\ \varphi). \tag{1.62}$$

Тогда векторная функция (1.62) будет удовлетворять системе уравнений

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt}=\int_{-h_1}^{0} dG_c(\vartheta)\,\mathbf{Y}(t+\vartheta), \tag{1.63}$$

где

$$dG_c(\vartheta)=e^{2c\vartheta}dG(\vartheta)-2c\,dG_0(\vartheta),$$

если только функция $\mathbf{x}(t;\ \varphi)$ удовлетворяет системе (1.52) и условию $\mathbf{Y}=\varphi e^{-2ct}$ при $t\in[-h_1,\ 0]$. Здесь через G_0 обозначена такая матричная функция ограниченной вариации, что имеет место соотношение

$$\int_{-h_1}^{0} dG_0(\vartheta)\,\mathbf{Y}(t+\vartheta)=\mathbf{Y}(t).$$

Из [7] следует, что введенная нами функция $\mathbf{Y}$ удовлетворяет неравенству $|\mathbf{Y}(t)| < \mu e^{-ct}$ при $t \geqslant 0$. Положим $\varphi_1(t) = \varphi e^{-2ct}$, $\varphi \in C_0$. Покажем, что функция

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{2\pi i} \text{V.P.} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} A_c^{-1}(\lambda) \mathbf{B}_c(\lambda, \varphi_1)\, d\lambda \tag{1.64}$$

удовлетворяет системе (1.63) при $t \geqslant 0$. Здесь $-c < \sigma < 0$, а матричные функции A_c и B_c определены так же, как и выше, но через G_c.

Рассмотрим функцию

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{2\pi i} \text{V.P.} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{\lambda t} A_c^{-1}(\lambda) B_c(\lambda, \varphi_1)\, d\lambda}{\lambda}.$$

Эта функция непрерывно дифференцируема, и ее производная совпадает с векторной функцией $\mathbf{Y}$. Подставим векторную функцию $\mathbf{Y}_1$ в систему (1.63), тогда получим

$$\frac{1}{2\pi i} \text{V.P.} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[e^{\lambda t} A_c^{-1}(\lambda) B_c(\lambda, \varphi_1) - \right.$$

$$\left. - \int_{-h_1}^{0} \frac{dG(\vartheta)\, e^{\lambda(t+\vartheta)} A_c^{-1}(\lambda) \mathbf{B}_c(\lambda, \varphi_1)}{\lambda} \right] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \text{V.P.} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\frac{-e^{\lambda t} \mathbf{B}_c(\lambda, \varphi_1)}{\lambda} \right] d\lambda.$$

Покажем, что интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, при $t > 0$ обращается в нуль. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \text{V.P.} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[-\frac{e^{\lambda t} \mathbf{B}_c(\lambda_1, \varphi_1)}{\lambda} \right] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \text{V.P.} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(-\frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \right) \left[\int_{-h_1}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, dG_c \int_{-h_1}^{0} e^{-\lambda\tau} \varphi_1(\tau)\, d\tau - \varphi_1(0) \right] d\lambda +$$

$$+ \frac{\text{V.P.}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda\tau} \int_{-h_1}^{0} e^{-\lambda\tau} \varphi_1(\tau)\, d\tau\, d\lambda = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2.$$

Интеграл $\mathbf{J}_1$ может быть вычислен при помощи леммы Жордана и обращается в нуль при $t > 0$. Интеграл $\mathbf{J}_2$ является

обращением преобразования Лапласа над функцией $\mathfrak{f}(t)$, где

$$\mathfrak{f}(t)=\begin{cases}\varphi_1(t) & \text{для } t\in[-h_1,\ 0],\\ \varphi_1/2 & \text{для } t=0,\\ 0 & \text{для } t>0,\end{cases}$$

поэтому он также обращается в нуль при $t>0$. Следовательно, функция Y_1 при $t>0$ удовлетворяет системе (1.63). В силу непрерывности этой функции и ее производной она будет также удовлетворять этой системе при $t\geqslant 0$. Таким образом, имеем тождество

$$\frac{d\mathrm{Y}_1}{dt}=\int_{-h_1}^{0} dG_c\mathrm{Y}_1(t+\vartheta)$$

при $t\geqslant 0$ (при $t=0$ производная понимается как правосторонняя). Дифференцируя обе части этого равенства по t, получим, что функция (1.64) также при $t\geqslant 0$ удовлетворяет системе (1.63). Отсюда следует, что функция (1.64), домноженная на e^{2ct}, будет удовлетворять системе (1.52) и условию $\mathrm{Y}e^{2ct}=\varphi$, $t\in[-h_1,\ 0]$.

Покажем, что $e^{2ct}\mathrm{Y}$ совпадает с функцией (1.57). Действительно,

$$\mathrm{Y}e^{2ct}=\frac{1}{2\pi i}\,\text{V.P.}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{(\lambda+2c)t}A_c^{-1}(\lambda)\,\mathrm{B}_c(\lambda,\ \varphi_1)\,d\lambda.$$

Сделаем в последнем интеграле тождественные преобразования, положив

$$\lambda+2c=\mu;\quad \varphi_1=e^{-2ct}\varphi;\quad dG_c=e^{2c\vartheta}dG(\vartheta)-2c\,dG_0(\vartheta).$$

Тогда получим

$$A_c(\lambda)=\int_{-h_1}^{0} e^{\lambda\vartheta}dG_c-\lambda E=$$

$$=\int_{-h_1}^{0} e^{(\lambda+2c)\vartheta}dG(\vartheta)-(\lambda+2c)E=A(\lambda+2c)=A(\mu).$$

Таким образом,

$$\mathrm{B}_c(\lambda,\ \varphi_1)=\int_{-h_1}^{0} e^{\lambda\vartheta}dG_c\int_{-h_1}^{0} e^{\lambda\tau}\varphi_1(\tau)\,d\tau-\lambda\int_{-h_1}^{0} e^{-\lambda\tau}\varphi_1(\tau)\,d\tau-\varphi_1(0)=$$

$$=\int_{-h_1}^{0} e^{(\lambda+2c)\vartheta}dG(\vartheta)\int_{-h_1}^{0} e^{-\tau(\lambda+2c)}\varphi(\tau)\,d\tau-$$

$$-(\lambda+2c)\int_{-h_1}^{0} e^{-\tau(\lambda+2c)}\varphi(\tau)\,d\tau-\varphi(0)=\mathrm{B}(\mu,\ \varphi).$$

Окончательно получим

$$Ye^{2ct}=\frac{1}{2\pi i}\,\text{V. P.}\int\limits_{\sigma+2c-i\infty}^{\sigma+2c+i\infty} e^{\mu t}A^{-1}(\mu)\,\mathbf{B}(\mu,\varphi)\,d\mu,$$

где $\sigma=2c>c$.

Таким образом, получено, что $Ye^{2ct}=\mathbf{x}(t,\varphi)$, где $\mathbf{x}(t,\varphi)$ определяется формулой (1.57). Итак, показано, что формула (1.57) доставляет решение системы (1.52) при $t\geqslant 0$, удовлетворяющее условию $\mathbf{x}(t,\varphi)=\varphi$, $t\in[-h, 0]$.

В теореме 1.1 дано представление частных решений системы (1.52) при помощи формулы (1.55). Если брать линейные комбинации функций $\mathbf{x}_j(t)$ в бесконечном числе, то мы получим ряды, вообще говоря, формально удовлетворяющие системе (1.52). Возникает вопрос: какое решение системы (1.52) такие ряды могут представлять и в каком смысле? Для выяснения этого вопроса введем следующие определения.

Рассмотрим счетное множество точек r_j комплексной плоскости λ, обладающее свойствами: 1) $\operatorname{Re} r_j<c$; 2) $|r_j|\to\infty$; 3) в любой полосе $a\leqslant\operatorname{Re}\lambda\leqslant b$, $a>-\infty$, существует лишь конечное количество чисел r_j; 4) $\operatorname{Re} r_1\geqslant\operatorname{Re} r_2\geqslant\operatorname{Re} r_3\geqslant\ldots$

Припишем точке r_j конечную кратность m_j и разобьем эти точки на группы, относя в одну и ту же группу те точки r_j, которые имеют одинаковые действительные части, и обозначим через n_j число элементов j-й группы.

Введем в рассмотрение функции $\mathbf{F}_j(t)=\mathbf{p}_j(t)e^{r_jt}$, где $\mathbf{p}_j(t)$ — полином степени m_j-1, коэффициенты которого представляют собой скалярные n-мерные векторы.

Определение 1.4. *Ряд* $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\mathbf{F}_j$ *будем называть асимптотическим разложением первого рода функции* $\mu(t)$, *заданной при* $t\geqslant 0$, *если выполнены следующие два условия:*

1) $$n_1=n_2=\ldots=1;$$

2) $$\left\|\mu(t)-\sum_{j=1}^{k}\mathbf{F}_j\right\|e^{-\operatorname{Re} r_k t}\to 0$$

при $t\to\infty$ *для любого* k. *Точнее,*

$$\left\|\mu(t)-\sum_{j=1}^{k}\mathbf{F}_j\right\|e^{-\operatorname{Re} r_k t}\leqslant c_k(\varepsilon)\,e^{-[\operatorname{Re}(r_k-r_{k+1})-\varepsilon]\,t} \tag{1.65}$$

для любого $\varepsilon>0$, а $c_k(\varepsilon)$ — *некоторые непрерывные функции, заданные при* $\varepsilon\in[0, 1]$.

Определение 1.5. *Ряд* $\sum_{j=1}^{k} \mathrm{F}_j$ *называется асимптотическим разложением функции* $\mu(t)$ *второго рода, заданной при* $t \geqslant 0$, *если для любого числа* k, *представимого в форме* $k = \sum_{j=1}^{l} n_j$, *выполнено соотношение* (1.65).

Обозначим через $\mathrm{y}_j(t, \varphi)$ те векторные функции, которые получаются из функций $\mathrm{x}_j(t)$, если в формуле (1.55) функцию $\mathrm{F}(\lambda)$ заменить целой функцией $\mathbf{B}(\lambda, \varphi)$.

Теорема 1.3. *Если в группу* σ_j *входит лишь по одному корню* λ_j, $j = 1, \ldots, \infty$ *уравнения* (1.53), *то решение* (1.52) $\mathrm{x}(t, \varphi)$ *разлагается в асимптотический ряд первого рода* $\mathrm{x}(t, \varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{y}_j(t, \varphi)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi^+(t)$:

$$\varphi^+(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-h_1, 0], \\ \dfrac{\varphi(0)}{2}, & t = 0, \\ 0 & , t > 0. \end{cases}$$

Эту функцию можно представить в следующей форме:

$$\varphi^+(t) = \frac{\mathrm{V.P.}}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} \int_{-h_1}^{0} \varphi(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau \, d\lambda.$$

Обозначим через $\mathrm{x}^+(t)$ функцию, получаемую из $\mathrm{x}(t, \varphi)$ по формуле

$$\mathrm{x}^+(t) = \mathrm{x} - \varphi^+ =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \mathrm{V.P.} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} A^{-1}(\lambda) \left[\mathbf{B}(\lambda, \varphi) - A(\lambda) \int_{-h_1}^{0} \varphi(\tau) e^{-\lambda t} d\tau \right] d\lambda. \quad (1.66)$$

Из формулы (1.66) видно, что векторная функция x^+ при $t > 0$ совпадает с функцией $\mathrm{x}(t, \varphi)$, и поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что функция x^+ разлагается в асимптотический ряд 1-го рода $\mathrm{x}^+ = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{y}_j(t, \varphi)$. Производя преобразования в формуле (1.66), получим

$$\mathrm{x}^+ =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \mathrm{V.P.} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} A^{-1}(\lambda) \left[- \int_{-h_1}^{0} e^{\lambda\vartheta} dG \int_{\vartheta}^{0} \varphi(\tau) e^{-\lambda\tau} - \varphi(0) \right] d\lambda. \quad (1.67)$$

Выберем в интервале (σ_{k+1}, σ_k) точку $\bar{\sigma}$ и рассмотрим последовательность замкнутых прямоугольных контуров, образованных отрезками

$$l_N = [\sigma - i\mu_N;\ \sigma + i\mu_N]; \quad e_N = [\bar{\sigma} + i\mu_N;\ \bar{\sigma} - i\mu_N];$$
$$p_N = [\sigma + i\mu_N;\ \bar{\sigma} + i\mu_N]; \quad q_N = [\bar{\sigma} - i\mu_N;\ \sigma - i\mu_N],$$

где $\mu_N \to +\infty$ при $N \to \infty$. Замкнутый контур, образованный этими отрезками, будем обозначать далее через S_N. Число N можно выбрать столь большим, что все корни уравнения $\det A(\lambda) = 0$, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \bar{\sigma}$, попадут в прямоугольник, ограниченный контуром S_N. Поэтому будет иметь место следующее соотношение:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S_N} e^{\lambda t} A^{-1}(\lambda)\left[\int_{-h_1}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, dG \int_{\vartheta}^{0} \varphi(\tau)\, e^{-\lambda\tau}\, d\tau - \varphi(0)\right] d\lambda =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} y_j(t, \varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_n} e^{\lambda t} A^{-1}(\lambda)\left[-\int_{-h_1}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, dG \int_{\vartheta}^{0} \varphi(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau - \varphi(0)\right] d\lambda +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{p_N + q_N + e_N} e^{\lambda t} A^{-1}(\lambda)\left[-\int_{-h_1}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, dG \int_{\vartheta}^{0} \varphi(\tau)\, e^{-\lambda\tau}\, d\tau - \varphi(0)\right] d\lambda. \tag{1.68}$$

Преобразуем второй интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, для чего прибавим и вычтем выражение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{p_N + q_N + e_N} e^{\lambda t}\, \frac{-\int_{-h_1}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, dG \int_{\vartheta}^{0} e^{-\lambda\tau}\, \varphi(\tau)\, d\tau - \varphi(0)}{\lambda}\, d\lambda.$$

Тогда получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{p_N + q_N + e_N} e^{\lambda t} A^{-1}(\lambda)\left[-\int_{-h_1}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, dG \int_{\vartheta}^{0} \varphi(\tau)\, e^{-\lambda\tau}\, d\tau - \varphi(0)\right] d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{p_N + q_N + e_N} \left\{ e^{\lambda t} A^{-1}(\lambda)\left[-\int_{-h_1}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, dG \int_{\vartheta}^{0} \varphi(\tau)\, e^{-\lambda\tau}\, d\tau - \varphi(0)\right] + \right.$$

$$+\frac{e^{\lambda t}\int\limits_{-h_1}^{0} e^{\lambda\vartheta}\,dG\int\limits_{\vartheta}^{0} e^{-\lambda\tau}\varphi(\tau)\,d\tau-\varphi(0)}{\lambda}\Bigg\}\,d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p_N+q_N+e_N}\frac{e^{\lambda t}\int\limits_{-h_1}^{0} e^{\lambda\vartheta}\,dG\int\limits_{\vartheta}^{0} e^{-\lambda\tau}\varphi(\tau)\,d\tau+\varphi(0)}{\lambda}\,d\lambda=\mathrm{J}_1(t)+\mathrm{J}_2(t).$$

В интеграле J_2 контур интегрирования можно заменить на дугу окружности с центром в точке $\lambda=0$ и концами в точках $\sigma-\mu_N i$, $\sigma+\mu_N i$, лежащую в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\leqslant\sigma$. Если $N\to\infty$, то по лемме Жордана $\mathrm{J}_2\to 0$ при $t>h$. Переходя к пределу при $N\to\infty$ в интеграле

$$-\int\limits_{p_N+q_N} e^{\lambda t}\Bigg[A^{-1}(\lambda)\int\limits_{-h_1}^{0} e^{\lambda\vartheta}\,dG\int\limits_{\vartheta}^{0}\varphi(\tau)\,e^{-\lambda\tau}\,d\tau+$$

$$+A^{-1}(\lambda)\,\varphi(0)+\frac{\int\limits_{-h_1}^{0} e^{\lambda\vartheta}\,dG\int\limits_{\vartheta}^{0}\varphi(\tau)\,e^{-\lambda\tau}\,d\tau+\varphi(0)}{\lambda}\Bigg]\,d\lambda,$$

получаем, что предел его равен нулю, так как модуль подынтегральной функции может быть оценен выражением вида $\frac{c}{|\lambda|^3}e^{\operatorname{Re}\lambda t}$. По этой же причине существует предел интеграла

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{e_N} e^{\lambda t}[\ldots]\,d\lambda,$$

который по модулю не превосходит величины $c(\bar\sigma)\,e^{t\bar\sigma}$.

Таким образом из формулы (1.68) имеем

$$\Big\|\mathrm{x}(t)-\sum_{j=1}^{k}\mathrm{y}_j(t,\varphi)\Big\|\leqslant c(\bar\sigma)\,e^{t\bar\sigma},$$

где $\bar\sigma$ — любое число из интервала (σ_{k+1},σ_k).

Умножая обе части последнего неравенства на $e^{-\sigma_k t}$ и полагая $\bar\sigma=\sigma_{k+1}+\varepsilon$, найдем, что

$$\Big\|\mathrm{x}(t)-\sum_{j=1}^{k}\mathrm{y}_j(t,\varphi)\Big\|\,e^{-\sigma_k t}\leqslant c_k(\varepsilon)\,e^{-(\sigma_k-\sigma_{k+1}-\varepsilon)\,t}$$

при $t>h_1$.

Таким образом, показано, что решение системы (1.52) $\mathbf{x}(t, \varphi)$ разлагается в асимптотический ряд 1-го рода. Этим теорема доказана полностью.

Теорема 1.4. *Если хоть одна из групп σ_j состоит более чем из одной точки λ_j, то функция $\mathbf{x}(t, \varphi)$, которая является решением системы (1.52), разлагается в асимптотический ряд 2-го рода* $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{y}_j(t, \varphi)$.

Доказательство. Утверждение теоремы 1.4 будет установлено, если показать, что

$$\left\| \mathbf{x}(t, \varphi) - \sum_{j=1}^{k} \mathbf{y}_j(t_1 \varphi) \right\| e^{-\sigma_k t} \leqslant c_k(\varepsilon) e^{-(\sigma_k - \sigma_{k+1} - \varepsilon) t}$$

при $t \to +\infty$, где k — число, представимое в форме $k = \sum_{j=1}^{l} n_j$ (n_j есть число корней, входящих в группу, определяемую вещественным числом σ_j). Этот факт устанавливается точно так же, как в теореме 3, с одним лишь изменением, состоящим в том, что каждый раз $k = \sum_{j=1}^{l} n_j$.

Замечание 1. Обозначим через $\mathbf{C}$ пространство непрерывных векторных функций, заданных на $[-h, 0]$. Тогда для любой функции $\varphi(t) \in \mathbf{C}$ существует решение системы (1.52) $\overline{\mathbf{x}}(t, \varphi)$ такое, что

$$\overline{\mathbf{x}}(t, \varphi) = \varphi; \quad t \in [-h, 0],$$

и представимое в следующей форме:

$$\frac{\text{V.P.}}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} A^{-1}(\lambda) \mathbf{Q}(\lambda, \varphi) \, d\lambda,$$

где

$$\mathbf{Q}(\lambda, \varphi) = -\left[\int_{-h}^{0} e^{\lambda \nu} dG(\nu) \int_{\nu}^{0} e^{-\lambda \tau} \varphi(\tau) \, d\tau + \varphi(0) \right] \tag{1.69}$$

при $t > 0$.

Буквально, как это сделано в теореме 1.2, можно показать, что функция $\overline{\mathbf{x}}(t, \varphi)$ удовлетворяет при $t > 0$ системе (1.52). Если $\varphi \in \mathbf{C}$, то $\overline{\mathbf{x}}(t, \varphi)$ также разлагается в асимптотический ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mathbf{y}}_j(t, \varphi)$ 1-го или 2-го рода, где $\overline{\mathbf{y}}_j(t, \varphi)$ получены из функций $\mathbf{x}_j$ путем замены $\mathbf{F}(\lambda)$ целыми функциями $\mathbf{Q}(\lambda)$. Впрочем, можно видеть, что $\overline{\mathbf{y}}_j(t, \varphi) = \mathbf{y}_j(t, \varphi)$.

Замечание 2. Если рассмотреть пространство $\mathbf{C}$ векторных функций $\varphi(t)$, кусочно-непрерывных на промежутке $[-h, 0]$, то можно утверждать, что решение системы (1.52) существует, представимо в форме (1.69) и разлагается в асимптотический ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{y}_j$ 1-го или 2-го рода.

Теорема 1.5. *Любое решение системы* (1.52) $\mathbf{x}(t, \varphi)$, $\varphi \in \mathbf{C}$, *разлагается в классе функций* $\mathbf{F}_j$ *при* $r_j = \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots$, *в асимптотический ряд 1-го или 2-го рода единственным образом.*

Доказательство. Проведем доказательство теоремы 1.5 для асимптотических разложений 2-го рода. Пусть $\mathbf{x}(t, \varphi)$ разлагается в асимптотический ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{F}_j$ 2-го рода. Покажем тогда, что необходимо будет $\mathbf{y}_j(t, \varphi) = \mathbf{F}_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, \infty$. Действительно, предположим сначала, что $\mathbf{F}_j = \mathbf{y}_j$ при $j \leqslant \sum_{1 \leqslant l \leqslant m} n_l$. Покажем, что при этом предположении $\mathbf{y}_j = \mathbf{F}_j$ при $j \leqslant \sum_{l=1}^{m+1} n_l$.

В силу того, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{F}_j$ является асимптотическим разложением функции $\mathbf{x}(t, \varphi)$ 2-го рода, имеем

$$\left\| \mathbf{x}(t, \varphi) - \sum_{j=1}^{n_1 + \ldots n_{m+1}} \mathbf{F}_j \right\| e^{-\sigma_{m+1} t} \leqslant c_{m+1}(\varepsilon) e^{-t(\sigma_{m+1} - \sigma_{m+2} - \varepsilon)}, \quad (1.70)$$
$$\varepsilon \geqslant 0.$$

Учитывая, что $\mathbf{y}_j = \mathbf{F}_j$ при $j \leqslant n_1 + \ldots + n_m$, преобразуем неравенство (1.70) к виду

$$\left\| \sum_{j=n_1+\ldots+n_m}^{n_1+\ldots+n_{m+1}} (\mathbf{F}_j - \mathbf{y}_j) \right\| e^{-t\sigma_{m+1}} \leqslant$$
$$\leqslant c_{m+1} e^{-t(\sigma_{m+1} - \sigma_{m+2} - \varepsilon)} + \left\| \mathbf{x}(t, \varphi) - \sum_{j=1}^{n_1+\ldots+n_{m+1}} \mathbf{y}_j \right\| e^{-t\sigma_{m+1}}. \quad (1.71)$$

Правая часть неравенства (1.71) стремится к нулю при $t \to \infty$, тогда как в левой части стоит норма полиномов, коэффициенты которых являются, вообще говоря, линейными комбинациями $\sin \varepsilon_j t$ и $\cos \varepsilon_j t$, где ε_j — мнимые части корней, входящих в n_{m+1}-ю группу. Отсюда следует, что $\left\| \sum (\mathbf{y}_j - \mathbf{F}_j) \right\| \equiv 0$, т. е. $\mathbf{y}_j = \mathbf{F}_j$ при $j \leqslant \sum_{l=1}^{m+1} n_l$.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что имеет место соотношение $\mathbf{y}_j = \mathbf{F}_j$, $j \leqslant n$. Эти равенства будут

вытекать также из (1.71), если в них положить $m=0$. Тогда получим

$$\left\| \sum_{j=1}^{n_1} (\mathrm{F}_j - \mathrm{y}_j) \right\| e^{-\sigma_1 t} \leqslant c_1 e^{-t(\sigma_1 - \sigma_2 - \varepsilon)} + \left\| \mathrm{x}(t, \varphi) - \sum_{j=1}^{n_1} \mathrm{y}_j \right\| e^{-\sigma_1 t}. \quad (1.72)$$

Правая часть неравенства (1.72) стремится к нулю при $t \to \infty$, поэтому, как и выше, заключаем, что $\mathrm{y}_j = \mathrm{F}_j$ при $j \leqslant n_1$; этим теорема доказана полностью.

Рассмотрим поведение решений системы (1.52) при неограниченном возрастании времени.

Введем для этого пространство C^* матриц $G(\nu)$ порядка n, элементами которых являются вещественные функции ограниченной вариации, заданные на $[-h, 0]$. Разобьем пространство C^* на непересекающиеся множества C^*_{km}, относя в каждое из них те и только те матрицы $G(\nu)$, для которых m корней уравнения

$$\det A(\lambda) = 0 \quad (1.73)$$

имеют положительную вещественную часть и k корней имеют вещественную часть, равную нулю. Ясно, что множества C^*_{km} не пересекаются и покрывают C^*.

Пусть $G \in C^*_{km}$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_{l_1}$ — корни уравнения (1.73) с положительными вещественными частями кратности $\rho_1, \ldots, \rho_{l_1}$ и $\lambda_{l_1+1}, \ldots, \lambda_{l_1+l_2}$ — корни уравнения (1.73) с нулевыми вещественными частями кратности $\rho_{l_1+1}, \ldots, \rho_{l_1+l_2}$. Обозначим через L_{jr} вектор, представляющий собой коэффициент в полиноме $e^{-\lambda_j t} \mathrm{y}_j(t, \varphi)$, стоящий при t^r, $r \leqslant \rho_j - 1$. Каждая из величин L_{jr} является линейным ограниченным оператором, действующим из C в E_n. Обозначим через O_{jr} множество всех векторных функций $\varphi \in C$, для которых $L_{jr}\varphi = 0$.

Ясно, что множество O_{jr} есть замкнутое линейное подпространство пространства C. Обозначим через C_{km} подпространство, образованное пересечением всех подпространств O_{jr}, $j \leqslant l_1 + l_2$, $r \leqslant \rho_j - 1$, и пусть Γ_{km} есть пересечение O_{jr}, $j \leqslant l_1$, $r \leqslant \rho_j - 1$, с пересечением пространства O_{jr}, $j \geqslant l_1 + 1$, $j \leqslant l_1 + l_2$, $r \leqslant \rho_j - 1$, $r \neq 0$.

Ясно, что C_{km} и Γ_{km} — замкнутые линейные подпространства пространства C. При этом $C_{km} \subseteq \Gamma_{km}$.

Теорема 1.6. *Если матрица $G \in C^*_{00}$, то любое решение системы* (1.52) *обладает свойством*

$$\|\bar{\mathrm{x}}(t, \varphi)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty; \quad (1.74)$$

при этом существуют числа $\gamma > 0$, $c = c(\varphi)$ такие, что

$$\|\bar{\mathrm{x}}(t, \varphi)\| \leqslant c e^{-\gamma t}, \quad (1.75)$$

Иными словами, если все корни уравнения (1.73) *лежат в левой полуплоскости, то любое решение системы* (1.52) *удовлетворяет* (1.74) *и имеет место оценка* (1.75).

Доказательство. Пусть $\sigma_1 < 0$ есть наибольшая вещественная часть корней уравнения (1.73). В теоремах 1.4 и 1 5 было показано, что любое решение уравнений (1.52) представимо в форме асимптотических рядов вида $\sum_{j=1}^{\infty} y_j(t, \varphi)$. В частности, было показано, что

$$\left\| x(t, \varphi) - \sum_{j=1}^{k} y_j(t, \varphi) \right\| e^{-\sigma_k t} \leqslant c_k(\varepsilon) e^{-(\sigma_k - \sigma_{k+1} - \varepsilon)t},$$

откуда

$$\| x(t, \varphi) \| \leqslant c_0(\varepsilon) e^{(\sigma_1 + \varepsilon)t} < \bar{c} e^{-\gamma t}; \quad \gamma = \frac{|\sigma_1|}{2}.$$

Из доказательства теоремы 1.4 легко видеть: константа $\bar{c}$ сколь угодно мала, если $|\varphi|$ достаточно мало, что следует из линейности и ограниченности оператора $Q(\lambda, \varphi)$ из C в E_n. Этим теорема доказана.

Теорема 1.7. *Если* $G \in C^*_{km}$, *то решения системы* (1.52) *удовлетворяют*

$$x(t, \varphi) \to 0 \quad \textit{при} \quad \varphi \in C_{km} \quad \textit{и} \quad t \to \infty. \tag{1.76}$$

Доказательство. По теоремам 1.3 и 1.4 решение уравнения (1.52) $x(t, \varphi)$ разлагается в асимптотический ряд $x(t, \varphi) \sim \sum y_j(t, \varphi)$ 1-го или 2-го рода. При этом имеет место оценка

$$\left\| x(t, \varphi) - \sum_{j=1}^{l_1+l_2} y_j(t, \varphi) \right\| < c_{l_1+l_2}(\varepsilon) e^{(\sigma_{l_1+l_2+1} + \varepsilon)t},$$

причем $\sigma_{l_1+l_2+1} < 0$.

Выберем $\varepsilon = -\frac{\sigma_{l_1+l_2+1}}{2}$, тогда $c_{l_1+l_2}$ будет сколь угодно малым, если φ достаточно мало. При $\varphi \in C_{km}$ имеем $y_j(t, \varphi) \equiv 0$, $j \leqslant l_1 + l_2$; поэтому будет иметь место неравенство $|x(t, \varphi)| \leqslant ce^{-\gamma t}$, т. е. решения системы (1.52) удовлетворяют (1.74) и (1.75) при $\varphi \in C_{km}$.

Теорема 1.8. *Если* $G \in C^*_{km}$, $k \neq 0$, *то решения системы* (1.52) *удовлетворяют* (1.74) *при* $\varphi \in \Gamma_{km}$; *при этом система* (1.52) *имеет семейство периодических и почти периодических решений, если среди чисто мнимых корней имеются рационально независимые; каждое из таких решений остается в достаточно малой окрестности нуля при малом* $|\varphi|$.

Доказательство. В рассматриваемом случае, как было указано выше, система (1.52) имеет периодические, а также и

почти-периодические решения, если чисто мнимые корни рационально независимы. Из теорем 1.3 и 1.5

$$\left\| x(t, \varphi) - \sum_{j=1}^{l_1+l_2} y_j(t, \varphi) \right\| \leqslant c_{l_1+l_2}(\varepsilon)\, e^{(\sigma_{l_1+l_2+1}+\varepsilon)t}, \quad \varepsilon = -\frac{1}{2}\sigma_{l_1+l_2+1}.$$

При $\varphi \in \Gamma_{km}$ функция $\sum\limits_{j=l_1+1}^{l_1+l_2} y_j(t, \varphi)$ является периодической или почти-периодической, а константа $c_{l_1+l_2}$ сколь угодно мала, если $|\varphi|$ достаточно мало. Отсюда следует, что решения системы (1.52) удовлетворяют заключению теоремы.

Замечание. Следуя работе [8], можно показать, что при выполнении условий теоремы 1.6 нулевое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = \int_{-h}^{0} dG(\vartheta)\,[x(t+\vartheta) + F(t, x(t+\vartheta))], \tag{1.77}$$

(где $F(t, x(t+\vartheta))$ — вектор, каждая компонента которого является нелинейным функционалом) будет также асимптотически устойчиво при надлежащем выполнении некоторых условий, накладываемых на F.

До сих пор мы рассматривали тот случай, когда уравнение (1.73) имеет бесконечное число корней. Однако возможны и такие случаи, когда таких корней лишь конечное число (вырожденный случай). Рассмотрим этот случай.

Лемма 1.2. *Функция* $\det A(\lambda)$ *имеет конечный порядок* $\rho \leqslant 1$.

Действительно, оценим функцию $\det A(\lambda)$ в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$:

$$\det A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} b_k \lambda^{n-k},$$

где функции $b_k(\lambda)$ представляют собой однородные многочлены степени k относительно величин

$$\psi_{sl}(\lambda) = \int_{-h}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, dg_{sl}(\vartheta),$$

поэтому $|b_k| \leqslant q_k$, где q_k — тот же многочлен степени k, что и b_k, коэффициенты которого заменены на их абсолютные значения, а функции $\psi_{sl}(\lambda)$ — на полные вариации V_{sl} функций $g_{sl}(\lambda)$. Таким образом, в правой полуплоскости имеет место неравенство

$$|\det A(\lambda)| \leqslant |\lambda|^n + \sum_{k=1}^{n} q_k |\lambda|^{n-k}. \tag{1.78}$$

Оценим теперь функцию $\det A(\lambda)$ в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$.

В этом случае $|\psi_{st}(\lambda)| \leqslant e^{-h\,\mathrm{Re}\,\lambda} V_{st}$, откуда

$$|\det A(\lambda)| \leqslant |\lambda|^n + \sum_{k=1}^{n} q_k |\lambda|^{n-k} e^{-kh\,\mathrm{Re}\,\lambda}. \qquad (1.79)$$

Из неравенств (1.78) и (1.79) следует, что функция $\det A(\lambda)$ имеет конечный порядок.

Теорема 1.9. *Если уравнение* (1.73) *имеет конечное число корней, то функция* $\det A(\lambda)$ *является полиномом степени* n, *равной порядку системы* (1.52).

Доказательство. Пусть число корней функции $\det A(\lambda)$ конечно, а именно равно s, и пусть $s \neq n$. Тогда $\det A(\lambda) = P_s(\lambda) e^{q(\lambda)}$, где $q(\lambda)$ в силу леммы 1.2 имеет вид $q(\lambda) = \alpha\lambda$. Требуется показать, что $s = n$ и $\alpha = 0$. Пусть $s > n$, тогда

$$e^{\mathrm{Re}\,\alpha\lambda} = \frac{|\det A(\lambda)|}{|P_s(\lambda)|}$$

и при $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$ см. (1.78)

$$e^{\mathrm{Re}\,\alpha\lambda} \leqslant \frac{|\lambda|^n + \sum_{k=1}^{n} q_k |\lambda|^{n-k}}{|P_s(\lambda)|}. \qquad (1.80)$$

При $\mathrm{Re}\,\alpha\lambda = 0$ и $|\lambda| \to +\infty$ имеем

$$1 \leqslant \frac{|\lambda|^n + \sum_{k=1}^{n} q_k |\lambda|^{n-k}}{|P_s(\lambda)|},$$

что невозможно при $s > n$. Следовательно, $s \leqslant n$. Так как на мнимой оси $\det A(\lambda)$ растет, как $|\lambda|^n$, то $s = n$.

Покажем теперь, что $\alpha = 0$. Для этого установим сначала, что α является вещественным числом. Действительно, если это не так, то на оси $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ левая часть неравенства (1.80) была бы функцией экспоненциального типа, а правая часть была бы ограничена. Следовательно, α — вещественное число. Из неравенства (1.80) вытекает также, что α не может быть положительным.

Таким образом, заключаем, что

$$\alpha \leqslant 0. \qquad (1.81)$$

В левой полуплоскости имеет место неравенство

$$|P_s(\lambda)| e^{\mathrm{Re}\,\alpha\lambda} \leqslant |\lambda|^n + \sum_{k=1}^{n} |\lambda|^{n-k} q_k e^{-kh\,\mathrm{Re}\,\lambda}.$$

Рассмотрим вертикальную прямую $\mathrm{Re}\,\lambda = \frac{\ln 10}{\alpha}$. На этой прямой

$$10 \leqslant \frac{|\lambda|^n + \sum_{k=1}^{n} q_k |\lambda|^{n-k} e^{-kh \frac{\ln 10}{\alpha}}}{|P_s(\lambda)|}. \qquad (1.82)$$

Ясно, что при $|\lambda| \to \infty$ правая часть неравенства (1.82) стремится к 1, но это невозможно. Следовательно,

$$\alpha \geqslant 0 \tag{1.83}$$

Из (1.81) и (1.83) следует, что $\alpha = 0$. Таким образом,

$$\det A(\lambda) = P_n(\lambda).$$

Следствие 1. *Если* $\det A(\lambda) = P_n(\lambda)$ *имеет конечное число корней, то любое решение системы* (1.52) *представимо в форме конечной суммы*

$$x(t, \varphi) = \sum_{j=1}^{k} y_j(t, \varphi); \quad \varphi \in C,$$

где k — *число различных корней функции* $\det A(\lambda)$, *которым соответствуют собственные группы решений.*

Следствие 2. *Все теоремы о поведении решений при* $t \to +\infty$ *переносятся на вырожденный случай без всякого изменения.*

К рассмотренным выше уравнениям примыкают линейные системы, включающие в себя как дифференциальные уравнения, так и разностные или интегральные уравнения.

§ 2. Построение программных движений в управляемых системах

1°. Рассмотрим сначала построение программных движений в линейных управляемых системах в простейшем случае. Пусть дана система n дифференциальных уравнений в векторной форме

$$dx/dt = P(t)x + Q(t)u + F(t). \tag{2.1}$$

Будем считать, что элементы матриц $P(t) = \{n \times n\}$, $Q(t) = \{n \times r\}$ и компоненты вектора $F(t)$ заданы при $t \geqslant 0$, вещественны и непрерывны.

Пусть заданы два постоянных вектора x_0 и x_1 — начальное и конечное положение системы (2.1). Требуется найти вектор-функцию $u = u(t)$ размерности r такую, чтобы решение системы (2.1), начинающееся при $t = 0$ в точке $x = x_0$, попадало при $t = T$ в точку $x = x_1$ и при этом интеграл $\int_0^T u^*(\tau)u(\tau)\,d\tau$ был ограничен. Такие управления $u = u(t)$ будем называть *программными.*

Рассмотрим вопрос существования программных управлений и их построения. Обозначим через $Y(t)$ фундаментальную матрицу решений системы уравнений

$$dx/dt = P(t)x \tag{2.2}$$

при начальном условии $Y(0) = E$, где E — единичная матрица.

Выполним в системе (2.1) замену искомой функции по формуле

$$\mathbf{x} = Y(t)\,\mathbf{z}, \tag{2.3}$$

где вектор $\mathbf{z}$ представляет собой новую искомую вектор-функцию. Эта векторная функция удовлетворяет уравнению

$$d\mathbf{z}/dt = B(t)\,\mathbf{u} + \mathbf{G}(t), \tag{2.4}$$

где $B(t) = Y^{-1}(t)\,Q(t)$ и $\mathbf{G}(t) = Y^{-1}(t)\,\mathbf{F}(t)$.

Выполним далее в системе (2.4) замену

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\xi} + \int_0^t \mathbf{G}(\tau)\,d\tau. \tag{2.5}$$

Тогда векторная функция $\boldsymbol{\xi}(t)$ будет удовлетворять уравнению

$$d\boldsymbol{\xi}/dt = B(t)\,\mathbf{u}. \tag{2.6}$$

В результате этих преобразований над исходной системой краевые (начальное $\mathbf{x}_0$ и конечное $\mathbf{x}_1$) условия переходят в такие:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(0) &= \boldsymbol{\xi}_0 = \mathbf{x}_0, \\ \boldsymbol{\xi}(T) &= \boldsymbol{\xi}_1 = Y^{-1}(T)\,\mathbf{x}_1 - \int_0^T Y^{-1}(\tau)\,\mathbf{F}(\tau)\,d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Для простоты положим $r=1$. Интегрирование уравнения (2.6) от 0 до T дает

$$\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_0 = \int_0^T B(\tau)\;\mathbf{u}\;(\tau)\,d\tau. \tag{2.8}$$

Таким образом, для нахождения программного управления $\mathbf{u}(t)$ получили систему (2.8) линейных интегральных уравнений.

Решение уравнения (2.8) будем искать в виде

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^*\mathbf{c} + v(t), \tag{2.9}$$

где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, подлежащий определению, а $v(t)$ — некоторая функция, суммируемая вместе со своим квадратом на $[0, T]$ и такая, что

$$\int_0^T b_s(t)\,v(t)\,dt = 0, \qquad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.10}$$

Здесь $b_s(t)$, $s = 1, \ldots, n$, означают компоненты вектора $\mathbf{B}$, и равенство (2.10) выражает условие ортогональности функции $v(t)$ ко всем компонентам вектора $\mathbf{B}$.

Подставляя (2.9) в (2.8), находим

$$\xi_1-\xi_0=A(T)\,\mathbf{c}, \tag{2.11}$$

где $A(T)=\int\limits_0^T \mathbf{B}(t)\,\mathbf{B}^*(t)\,dt$.

Уравнение (2.11) имеет решение, если $\det A(T)\neq 0$, либо ранг матрицы $A(T)$ совпадает с рангом расширенной матрицы $\tilde{A}=\{A(T);\ \xi_1-\xi_0\}$. Таким образом, справедлива

Теорема 2.1. *Для того чтобы существовало программное управление, переводящее систему* (2.1) *из любого положения* $\mathbf{x}_0$ *в любое другое положение* $\mathbf{x}_1$ *за время* T, *необходимо и достаточно, чтобы матрица* $A=\int\limits_0^T B^*B\,dt$, *где* $B=Y^{-1}Q$, *была неособой. При этом все множество программных управлений дается формулой*

$$\mathbf{u}=B^*\mathbf{c}+\mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}(t)$ — *суммируемая с квадратом на* $[0,\ T]$ *функция и*

$$\int\limits_0^T B\mathbf{v}\,dt=0,\quad \mathbf{c}=A^{-1}(T)\left[Y^{-1}(T)\,\mathbf{x}_1-\int\limits_0^T Y^{-1}(\tau)\,\mathbf{F}(\tau)\,d\tau-\mathbf{x}_0\right].$$

Определение 2.1. *Функции* $b_1(t),\ \ldots,\ b_n(t)$ *будем называть линейно независимыми при* $t\geqslant 0$, *если существует число* $T>0$ *такое, что из равенства*

$$\sum_{i=1}^n c_i b_i(t)=0 \quad \text{при} \quad t\in[0,\ T] \tag{2.12}$$

следует $c_i=0$, $i=1,\ \ldots,\ n$.

Теорема 2.2. *Для того чтобы функции* $b_1(t),\ \ldots,\ b_n(t)$ *были линейно независимыми при* $t\geqslant 0$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало число* $T>0$ *такое, что матрица*

$$A(T)=\int\limits_0^T \mathbf{B}\mathbf{B}^*\,dt$$

положительно определенная.

Здесь $\mathbf{B}(t)$ — вектор с компонентами $b_1(t),\ \ldots,\ b_n(t)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть функции $b_1(t),\ \ldots,\ b_n(t)$ линейно независимы при $t\geqslant 0$. Покажем, что матрица $A(T)$ положительно определенная.

Действительно, из линейной независимости указанных функций по определению существует такое $T>0$, что при любом выборе постоянного вектора $\mathbf{c}$, компоненты которого одновременно не равны нулю, будет существовать по крайней мере одна точка

в промежутке $[0, T]$, в которой $\mathbf{B}^*\mathbf{c} \neq 0$. Отсюда вытекает, что $[\mathbf{B}^*\mathbf{c}]^2 > 0$ в этой точке, а в силу непрерывности компонент вектора $\mathbf{B}(t)$ и в некоторой окрестности. Следовательно,

$$\int_0^T [\mathbf{B}^*\mathbf{c}]^2\, dt > 0. \tag{2.13}$$

Неравенство (2.13) можно записать в виде

$$\mathbf{c}^* \int_0^T \mathbf{B}\mathbf{B}^*\, dt \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}^* A(T)\, \mathbf{c} > 0$$

при любом $\mathbf{c}$, которое и означает положительную определенность матрицы $A(T)$.

Заметим, что матрица $A(t)$ будет также положительно определенной при всех $t \geqslant T$.

Достаточность. Пусть матрица $A(T)$ — положительно определенная; тогда для любого вектора $\mathbf{c} = \{c_1, \ldots, c_k\}$ и такого, что $\|\mathbf{c}\| \neq 0$, будет

$$\mathbf{c}^* A(T)\, \mathbf{c} = \int_0^T \mathbf{c}^* B B^* \mathbf{c}\, dt = \int_0^T [\mathbf{c}^* B]^2\, dt > 0.$$

Следовательно, существует по крайней мере одна точка $\bar{t} \in [0, T]$, где $\mathbf{c}^* B(\bar{t}) \neq 0$. Это и показывает, что функции $b_1, \ldots, b_n$ линейно независимы при $t \geqslant 0$.

2°. Пусть в более общем случае граничные условия заданы в виде

$$\sum_{j=0}^{s} G_j \cdot \mathbf{x}(t_j) = \mathbf{H}, \tag{2.14}$$

где G_j — вещественные постоянные матрицы порядка $m \times n$, $\mathbf{H}$ — m-мерный вектор, t_j — моменты времени $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_s \leqslant T$. Требуется найти условия, при которых существует программное управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ и программное движение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, удовлетворяющие системе (2.1) и условию (2.14). При этом предполагается $\mathbf{u}(t) \in L_2$, $\mathbf{x}(t)$ — непрерывная вещественная векторная функция, заданная на промежутке $[0, T]$.

Выразим решение системы (2.1) с помощью формулы Коши, считая, что $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ известно. Тогда будем иметь

$$\mathbf{x}(t) = Y(t)\, \mathbf{x}_0 + \int_0^t Y(t)\, Y^{-1}(\tau)\, Q(\tau)\, \mathbf{u}(\tau)\, d\tau + \int_0^t Y(t)\, Y^{-1}(\tau)\, \mathbf{F}(\tau)\, d\tau. \tag{2.15}$$

Подставляя (2.15) в (2.14), найдем

$$\sum_{j=0}^{s}[G_jY(t_j)]\,\mathbf{x}_0+\sum_{j=0}^{s}\int_0^{t_j}G_jY(t_j)Y^{-1}(\tau)Q(\tau)\mathbf{u}(\tau)\,d\tau+\sum_{j=0}^{s}\int_0^{t_j}G_jY(t_j)Y^{-1}(\tau)\mathbf{F}(\tau)\,d\tau=\mathbf{H}.$$

Положим

$$\varphi_j(\tau)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad \tau\in[0,\ t_j];\\ 0 & \text{при} \quad \tau\in[t_j,\ T].\end{cases}$$

Тогда последнее соотношение можно переписать в форме

$$A_1\mathbf{x}_0+\int_0^T B_1(\tau)\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau=\mathbf{H}_1, \tag{2.16}$$

где положено

$$A_1=\sum_{j=0}^{s}G_jY(t_j),$$

$$B_1=\sum_{j=0}^{s}\varphi_j(\tau)\,G_jY(t_j)Y^{-1}(\tau)Q(\tau)$$

и

$$\mathbf{H}_1=\mathbf{H}-\sum_{j=0}^{s}\int_0^{t_j}G_jY(t_j)Y^{-1}(\tau)\mathbf{F}(\tau)\,d\tau.$$

Равенство (2.16) можно рассматривать как систему интегральных уравнений, служащую для определения уравнения $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$. Полагая опять $r=1$, будем искать решение этих интегральных уравнений в форме

$$\mathbf{u}=B_1^*\mathbf{c}+\mathbf{v}, \tag{2.17}$$

где $\mathbf{v}\in L_2$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию ортогональности

$$\int_0^T B_1\mathbf{v}\,dt=0. \tag{2.18}$$

Положим

$$A_2=\int_0^T B_1B_1^*\,dt.$$

Подставляя (2.17) в (2.16) и учитывая (2.18), найдем

$$A_1\mathbf{x}_0+A_2\mathbf{c}=\mathbf{H}_1. \tag{2.19}$$

Теорема 2.3. *Для того чтобы существовало программное управление* (2.17) *и соответствующее ему непрерывное решение системы* (2.1), *удовлетворяющее условиям* (2.14), *необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц* $\{A_1, A_2\}$ *и* $\{A_1, A_2, \mathbf{H}_1\}$ *совпадали между собой.*

Здесь матрицы $\{A_1, A_2\}$ и $\{A_1, A_2, \mathbf{H}_1\}$ получаются приписыванием столбцов.

Доказательство. Необходимость условий теоремы устанавливается приведенными выше рассуждениями, так как было установлено, что из предположения существования управления (2.17) и соответствующего ему непрерывного решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, удовлетворяющего (2.14), вытекает, что система (2.19) алгебраических уравнений совместна, а это и означает, что ранги матриц, упомянутых в теореме, необходимо совпадают между собой.

Достаточность условий теоремы вытекает из того, что линейная система (2.19) будет разрешима и какому-либо ее решению $\mathbf{x}_0$, с отвечает управление (2.17) и решение, определяемое этим управлением и формулой Коши.

Упомянутое решение будет непременно удовлетворять условию (2.14), так как это эквивалентно выполнению условий (2.19).

Замечание 1. В более общем виде линейное краевое условие (2.14) может быть записано в виде

$$\int_0^T dG(\vartheta)\,\mathbf{x}(\vartheta) = \mathbf{H}, \tag{2.20}$$

где G — вещественная матрица, элементами которой, вообще говоря, могут являться произвольные функции ограниченной вариации.

Если умножить обе части формулы Коши на $dG(t)$ слева и затем проинтегрировать почленно обе части в пределах от 0 до T, то получим

$$\int_0^T dG(t)\,Y(t)\,\mathbf{x}_0 + \int_0^T dG(t)\int_0^t Y(t)\,Y^{-1}(\tau)\,Q(\tau)\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau + \\ + \int_0^T dG(t)\int_0^t Y(t)\,Y^{-1}(\tau)\,\mathbf{F}(\tau)\,d\tau = \mathbf{H}.$$

Произведем перестановку порядка интегрирования во втором слагаемом. Тогда будем иметь

$$\int_0^T dG(t)\int_0^t Y(t)\,Y^{-1}(\tau)\,Q(\tau)\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau = \int_0^T B_1(t)\,\mathbf{u}(t)\,dt,$$

где $B_1 = \int_t^T dG(\tau)\,Y(\tau)\,Y^{-1}(t)\,Q(t)$.

Вводя, как и выше, обозначения

$$A_1 = \int_0^T dG(t) Y(t),$$

$$\mathbf{H}_1 = \int_0^T dG(t) \int_0^t Y(t) Y^{-1}(\tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau,$$

получим, что управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, для которого существует непрерывное решение системы (2.1), удовлетворяющее (2.20), непременно будет удовлетворять системе интегральных уравнений

$$A_1 \mathbf{x}_0 + \int_0^T B_1(t) \mathbf{u}(t) dt = \mathbf{H}_1. \tag{2.21}$$

Дадим более конкретные условия разрешимости поставленной краевой задачи (2.20), чем те, которые вытекают из теоремы (2.3). Будем в дальнейшем считать для определенности $m > n$. Столбцы матрицы A_1 не образуют базиса в пространстве E_m, поэтому существует подпространство, являющееся ортогональным дополнением к подпространству, натянутому на столбцы матрицы A_1. Векторы, входящие в базис этого ортогонального дополнения, расположим в виде матрицы Z.

Если k есть ранг матрицы A_1, то матрица Z будет иметь $m-k$ столбцов и будет иметь ранг $m-k$. Домножим систему (2.21) слева на матрицу Z^*; тогда будем иметь

$$\int_0^T Z^* B_1(t) \mathbf{u}(t) dt = Z^* \mathbf{H}_1. \tag{2.22}$$

Таким образом, установлено, что если система (2.1) имеет непрерывное решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, соответствующее управлению $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, которое удовлетворяет (2.20), то это программное управление будет удовлетворять системе интегральных уравнений (2.22).

Будем разыскивать решение этой системы интегральных уравнений в виде

$$\mathbf{u} = B_1^* \mathbf{c} + \mathbf{v},$$

где $\mathbf{c} = Z\gamma$ и $\mathbf{v}$, как и прежде, удовлетворяют условию

$$\int_0^T B_1 \mathbf{v}\, dt = 0.$$

Для вектора γ, таким образом, получаем систему алгебраических уравнений

$$Z^* A_2 Z \gamma = Z^* \mathbf{H}_1, \tag{2.23}$$

где, как и выше,

$$A_2 = \int_0^T B_1 B_1^* \, dt.$$

Теорема 2.4. *Если матрица Z^*AZ неособая, то при любом выборе векторной функции* **F** *и вектора* **H** *существует непрерывное решение системы* (2.1), *удовлетворяющее условию* (2.20). *При этом каждое программное управление представимо в форме*

$$\mathbf{u} = B_1^* Z\gamma + \mathbf{v}, \tag{2.24}$$

где γ есть постоянный вектор, определяемый единственным образом.

Векторная функция $\mathbf{v}$ суммируема с квадратом и удовлетворяет условию ортогональности

$$\int_0^T B_1 \mathbf{v} \, dt = 0.$$

Теорема 2.5. *Если матрица Z^*A_2Z неособая и матрица A_1 имеет ранг n, то каждому управлению* (2.24) *отвечает единственное решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, удовлетворяющее условию* (2.20). *Если же ранг матрицы A_1 есть $k < n$, то каждому управлению* (2.24) *отвечает семейство решений системы* (2.1), *удовлетворяющее условию* (2.20) *и зависящее от $(n-k)$ произвольных постоянных.*

Доказательство. Приведем доказательство теорем (2.4) и (2.5). Найдем вектор γ из линейной системы (2.23) и полученное с помощью его управление (2.24) подставим в систему интегральных уравнений (2.21). Тогда эти уравнения превратятся в линейные уравнения, служащие для определения вектора $\mathbf{x}_0$.

Пусть k есть ранг матрицы A_1. Тогда, если $k = n$, то эта система определяет единственное значение вектора $\mathbf{x}_0$. Если же $k < n$, то вектор $\mathbf{x}_0$ определяется с точностью до $(n-k)$ произвольных постоянных.

Эти утверждения вытекают из того, что ранг матрицы A_1 будет совпадать с рангом расширенной матрицы $\{A_1, (\mathbf{H}_1 - A_2 Z\gamma)\}$. Это последнее утверждение справедливо потому, что вектор $(\mathbf{H}_1 - A_2 Z\gamma)$ ортогонален всем векторам, являющимся столбцами матрицы Z, что следует из вектора γ, и, следовательно, этот вектор располагается в линейном подпространстве, натянутом на столбцы матрицы A_1. Этим теоремы 2.4 и 2.5 доказаны полностью, ибо по найденным векторам γ и $\mathbf{x}_0$ указан способ построения управлений и решений.

Теорема 2.6. *Если матрица Z^*A_2Z — особая и имеет ранг l, то решение системы* (2.1), *удовлетворяющее* (2.20), *существует*

тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\{Z^*A_2Z,\ Z^*H_1\}$ *также будет равен* l.

В этом случае каждое допустимое управление представимо в форме (2.24), *однако вектор* γ *зависит от* $m-k-l$ *произвольных постоянных. Каждому такому управлению при* $k=n$ *соответствует единственное решение* $x=x(t)$, *при* $k<n$ *— семейство решений, зависящее от* $(n-k)$ *произвольных постоянных.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы 2.6 алгебраическая система (2.23) имеет решение, зависящее от $m-k-l$ произвольных постоянных. Подставляя это решение в (2.24) и затем в (2.21), находим, что, как и прежде, вектор x_0 будет удовлетворять линейной системе $A_1x_0+A_2Z\gamma=H_1$. Как и выше, ранг матрицы A_1 будет совпадать с рангом расширенной матрицы $\{A_1,\ H_1-A_2Z\gamma\}$.

Следовательно, при $k=n$ x_0 определяется единственным образом, при $k<n$ вектор x_0 будет определяться с точностью до $n-k$ произвольных постоянных.

Решения, соответствующие построенным таким образом управлениям и начальным условиям, будут непременно удовлетворять условиям (2.20).

Обратное утверждение теоремы вытекает из рассуждений, в результате которых были построены уравнения (2.22) и (2.23).

Заметим, что подобная задача была решена Н. Н. Красовским для случая перехода из одной точки фазового пространства в другую за время T.

3°. Рассмотрим теперь построение программных управлений в случае нелинейных систем.

Пусть задана система n нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=P(t)x+Q(t)u+F(t)+\mu G(t,\ x,\ u,\ \mu). \qquad (2.25)$$

Матрицы $P(t)=\{n\times n\}$ и $Q(t)=\{n\times r\}$ заданы при $t\geqslant 0$, вещественны и непрерывны. $G(t,\ x,\ u,\ \mu)$ — вещественная, непрерывно дифференцируемая по любой из компонент x и u вектор-функция; μ — малый положительный параметр. Для простоты будем считать, что $r=1$.

Пусть заданы точки x_0 и x_1. Требуется построить управление $u=u(t)$, переводящее систему (2.25) из положения x_0 в положение x_1 за время T, при этом управление должно удовлетворять условию

$$\int_0^T u^2(t)\,dt<+\infty.$$

Эта проблема может быть разбита условно на две задачи: задачу существования и задачу приближенного отыскания упо-

мянутого управления. Решение этих задач дается следующей теоремой.

Теорема 2.9. *Пусть матрица*

$$A(T)=\int_0^T BB^* dt$$

неособая. Здесь $B=Y^{-1}(t)\,Q$; $Y(t)$ — *фундаментальная система решений дифференциальных уравнений* $\dot{x}=P(t)\,x$ *с начальным условием* $Y(0)=E$.

Тогда для любых двух ограниченных множеств G^0 *и* G^1 *можно указать число* $\mu^0=\mu_0(G^0,\ G^1)$ *такое, что при всех* $\mu\leqslant\mu^0$ *существует управление* $u(t)$, *переводящее систему из произвольной точки* $x_0\in G^0$ *в произвольную точку* $x_1\in G^1$ *за время* T. *Это управление непрерывно и может быть построено как предел равномерно сходящейся последовательности, каждый член которой определяется единственным образом рекуррентным соотношением.*

Доказательство. Пусть задача решена, т. е. имеем $u=u(t)$ и $x=x(t)$ такие, что они связаны уравнением (2.25) и движение $x(t)$ переходит из точки x_0 в точку x_1 за время T под действием этого управления.

Используя формулу Коши, получим, что (2.25) эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$x(t)=Y(t)\,x_0+\\ +Y(t)\int_0^t Y^{-1}(t)\,[Q(t)\,u(t)+F(t)+\mu G(t,\ x(t),\ u(t),\ \mu)]\,dt.$$

Мы считаем, что $x(t)$ и $u(t)$ известны. Тогда, полагая $t=T$, получим соотношение

$$Y^{-1}(T)\,x_1-x_0=\\ =\int_0^T B(t)\,u(t)\,dt+\int_0^T Y^{-1}(t)\,[F(t)+\mu G(t,\ x(t),\ u(t),\ \mu)]\,dt. \qquad (2.26)$$

Представим управление $u(t)$ в виде

$$u=B^*c+v, \qquad (2.27)$$

где функция v удовлетворяет условиям

$$\int_0^T b_s v\,dt=0, \quad s=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

и (2.27′)

$$\int_0^T v^2\,dt<+\infty.$$

Подставляя (2.27) в (2.26) и разрешая полученное уравнение относительно компонент вектора c, получим

$$\mathbf{c} = A^{-1}(T)\left\{Y^{-1}(T)\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 - \int_0^T Y^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt - \mu\int_0^T Y^{-1}(t)G(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mu)\,dt\right\}. \quad (2.28)$$

Подстановка (2.28) в (2.27) дает

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(t) + \mu B^*(t)A^{-1}(T)\left[-\int_0^T Y^{-1}(t)G(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mu)\,dt\right], \quad (2.29)$$

где

$$\mathbf{u}_0(t) = B^*(t)A^{-1}(T)\left[Y^{-1}(T)\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 - \int_0^T Y^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt\right] + \mathbf{v}(t), \quad (2.30)$$

По формуле Коши решением системы (2.25) при управлении (2.29) будет

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mu\left[\int_0^t Y(t)Y^{-1}(\tau)G(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \mu)\,d\tau - Y(t)A(t)A^{-1}(T)\int_0^T Y^{-1}(\tau)G(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \mu)\,d\tau\right], \quad (2.31)$$

где

$$\mathbf{x}_0(t) = Y(t)\left[\mathbf{x}_0 + \int_0^t B(\tau)\mathbf{u}_0(\tau)\,d\tau + \int_0^t Y^{-1}(\tau)\mathbf{F}(\tau)\,d\tau\right]. \quad (2.32)$$

Формулы (2.30) и (2.32) показывают, что решением системы (2.25) при $\mu = 0$ и управлении $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(t)$ является $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t)$, которое проходит через точку $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ при $t = 0$ и через точку $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ при $t = T$.

Соотношения (2.29) и (2.31) представляют собой систему интегральных уравнений для определения управления $\mathbf{u}(t)$ и соответствующего ему движения $\mathbf{x}(t)$.

Покажем, что при любой функции $\mathbf{v} \in L_2[0, T]$, удовлетворяющей условиям (2.27′), система (2.25), (2.31) имеет единственное решение при $\mu \leqslant \mu^0$, где μ^0 — некоторая положительная постоянная. При этом решение этой системы дает искомое управление $\mathbf{u}(t)$ и требуемое движение $\mathbf{x}(t)$. Для доказательства этого

утверждения введем в рассмотрение вектор $\xi(\mathrm{x}, \mathrm{u})$. Тогда систему интегральных уравнений можно записать в виде

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \mu \mathrm{K}(\xi, \mu, t), \tag{2.33}$$

где $\xi_0(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_0(t) \\ \mathrm{u}_0(t) \end{pmatrix}$, $\mathrm{K}(\xi, \mu, t)$ является оператором, получающимся из системы (2.31) и (2 29):

$$\mathrm{K}(\xi, \mu, t) = \begin{Vmatrix} \int\limits_0^t Y(t) Y^{-1}(\tau) G(\tau, \mathrm{x}, \mathrm{u}, \mu)\, d\tau - \\ - Y(t) A(t) A^{-1}(T) \int\limits_0^T Y^{-1}(\tau) G(\tau, \mathrm{x}, \mathrm{u}, \mu)\, d\tau - \\ - B^*(t) A^{-1}(T) \int\limits_0^T Y^{-1}(\tau) G(\tau, \mathrm{x}, \mathrm{u}, \mu)\, d\tau \end{Vmatrix}.$$

Легко видеть, что при $\mathrm{x}_0 \in G^0$, $\mathrm{x}_1 \in G^1$ и фиксированной функции $\mathrm{v}(t)$ имеем $\|\xi_0(t)\| < r_1$, $r_1 > 0$ при $t \in [0, T]$. Пусть $r_2 > r_1$ — некоторое число. Так как $\mathrm{K}(\xi, \mu, t)$ является непрерывной функцией своих аргументов, то при любой непрерывной функции $\xi(t)$ такой, что $\|\xi(t)\| \leqslant r_2$, при $\mu \leqslant \mu_1$ и $t \in [0, T]$, имеем $\|\mathrm{K}(\xi, \mu, t)\| \leqslant M$, где M — некоторая положительная константа.

Выберем число μ_2 такое, чтобы при любом $\mu \leqslant \mu_2$ было

$$\|\xi_0(t) + \mu \mathrm{K}(\xi(t), \mu, t)\| \leqslant r_2,$$

где $\xi(t)$ — любая непрерывная функция и такая, что $\|\xi(t)\| \leqslant r_2$, $t \in [0, T]$. Для этого достаточно взять

$$\mu_2 \leqslant \min\left[\mu_1, \frac{r_2 - r_1}{M}\right].$$

Построим последовательные приближения $\xi_0, \xi_1(t), \ldots, \xi_m(t), \ldots$ по формуле

$$\xi_{m+1}(t) = \xi_0(t) + \mu \mathrm{K}(\xi_m, \mu, t), \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.34}$$

При этом оказывается, что $\xi_{m+1}(t)$ является непрерывной вектор-функцией, заданной на $[0, T]$ и удовлетворяющей условию

$$\|\xi_{m+1}(t)\| \leqslant \|\xi_0(t)\| + \mu \|\mathrm{K}(\xi_m, \mu, t)\| \leqslant r_1 + \mu M \leqslant r_2,$$

если только $\|\xi_m(t)\| \leqslant r_2$ при $t \in [0, T]$.

При $m = 0$ и $m = 1$ последнее имеет место. По индукции будем иметь $\|\xi_m(t)\| \leqslant r_2$ для всех $m \geqslant 0$. Покажем теперь, что

существует число $\mu^0 < \mu_2$ такое, что при любом $\mu \leqslant \mu^0$ ряд

$$\xi_0 + (\xi_1 - \xi_0) + \ldots \tag{2.35}$$

сходится равномерно на промежутке $[0, T]$.

Так как функция $G(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mu)$ непрерывно дифференцируема по компонентам векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$, то, как легко показать, существует положительная величина L такая, что для любых векторов $\bar{\xi}$ и $\bar{\bar{\xi}}$, удовлетворяющих неравенствам $\|\bar{\xi}(t)\| \leqslant r_2$, $\|\bar{\bar{\xi}}(t)\| \leqslant r_2$, будет $\|\mathbf{K}(\bar{\xi}, \mu, t) - \mathbf{K}(\bar{\bar{\xi}}, \mu, t)\| \leqslant L \|\bar{\xi} - \bar{\bar{\xi}}\|$ при $t \in [0, T]$ и $\mu \leqslant \mu_2$.

Вычтем почленно из равенства (2.34) при $m = n-1$ его же при $m = n-2$. Тогда получим

$$\xi_n - \xi_{n-1} = \mu [\mathbf{K}(\xi_{n-1}, \mu, t) - \mathbf{K}(\xi_{n-2}, \mu, t)],$$

откуда

$$\|\xi_n - \xi_{n-1}\| \leqslant \mu L \max_{t \in [0, T]} \|\xi_{n-1}(t) - \xi_{n-2}(t)\|. \tag{2.36}$$

Обозначим через $\varphi_n = \max\limits_{t \in [0, T]} \|\xi_n - \xi_{n-1}\|$. Из неравенства (2.36) будем иметь также

$$\varphi_n \leqslant \mu L \varphi_{n-1}. \tag{2.37}$$

Рекуррентное соотношение (2.36) дает

$$\varphi_n \leqslant (\mu L)^{n-1} \varphi_1, \tag{2.38}$$

где

$$\varphi_1 = \max_{t \in [0, T]} \|\xi_1 - \xi_0\| \leqslant \mu \max_{\substack{t \in [0, T] \\ \|\xi\| \leqslant r_2 \\ \mu < \mu_1}} \|\mathbf{K}(\xi, \mu, t)\| = \mu M.$$

Из оценки (2.38) вытекает, что упомянутый выше ряд равномерно сходится при $t \in [0, T]$ и любом выборе $\mu \leqslant \mu_3$, где $\mu_3 L = 1$. Положим $\mu^0 = \min(\mu_2, \mu_3)$. При $\mu \leqslant \mu^0$ построение последовательных приближений (2.34) оказывается возможным, каждая из $\xi_m(t)$ непрерывна и последовательность $\{\xi_m(t)\}$, $m = 0, 1, \ldots$, равномерно сходится на промежутке $[0, T]$. Обозначим ее предел через $\xi(t) = \{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\}$. Покажем, что $\xi(t)$ искомое. Действительно, подставляя это управление и это движение в интегральное уравнение, получим тождество. Дифференцируя по t обе части (2.31), находим, что $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет системе (2.25) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$. Если в (2.31) положить $t = 0$ и $t = T$, то можно убедиться, что это движение переводит систему из положения $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ в положение $\mathbf{x}_1$ за время T.

Замечание. Рассмотрение вопроса построения программных движений в общем случае краевых условий (2.20) проводится

аналогично приведенным рассуждениям, так как интегральные уравнения для программных движений и управлений изменяются несущественным образом с точки зрения проведения всех оценок.

§ 3. Устойчивость по Ляпунову программных движений

1°. Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \tag{3.1}$$

где x — вектор и $f(x, t)$ — вектор-функция размерности n.

Пусть знаем некоторое решение этого дифференциального уравнения

$$x = \bar{x}(t), \tag{3.2}$$

определенное при $t \geqslant 0$. Это решение условимся называть *невозмущенным (программным) движением*, а любое другое, в отличие от него, *возмущенным*.

Определение 3.1. *Невозмущенное движение* $x = \bar{x}(t)$ *называется устойчивым по Ляпунову, если для любого* $t_0 \geqslant 0$ *и любого числа* $\varepsilon > 0$ *можно указать число* $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *такое, что при* $\|x_0 - \bar{x}_0\| < \delta(\varepsilon, t_0)$ *будет* $\|x(t, x_0, t_0) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon$ *при* $t \geqslant t_0$, *где* $x(t, x_0, t_0)$ *есть возмущенное движение, проходящее через точку* x_0 *в момент* $t = t_0$, *т. е.*

$$x(t_0, x_0, t_0) = x_0, \quad a \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0.$$

Определение 3.2. *Невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым по Ляпунову, если:* 1) *оно устойчиво по Ляпунову и к тому же* 2) *величину* $\delta(t_0, \varepsilon)$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *можно выбрать так, что*

$$\|x(t, x_0, t_0) - \bar{x}(t)\| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$$

Здесь под нормой понимаем $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Сделаем в исходной системе преобразование координат по формуле

$$x(t) = y(t) + \bar{x}(t), \tag{3.3}$$

где $y(t)$ — новая искомая вектор-функция. В результате получим

$$\frac{dy}{dt} = f(y + \bar{x}(t), t) - f(\bar{x}(t), t). \tag{3.4}$$

Система (3.4) имеет решение (положение равновесия)

$$\mathrm{y} = 0. \tag{3.5}$$

Если это решение принять за невозмущенное движение, то определение 3.1 примет вид:

Определение 3.3. *Нулевое решение* $\mathrm{y}=0$ *называется устойчивым по Ляпунову, если для любого* $t_0 \geqslant 0$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, *что при* $\|\mathrm{y}_0\| < \delta$ *будет* $\|\mathrm{y}(t, \mathrm{y}_0, t_0)\| < \varepsilon$ *при* $t \geqslant t_0$, *причем* $\mathrm{y}(t, \mathrm{y}_0, t_0)$ — *возмущенное движение такое, что* $\mathrm{y}(t_0, \mathrm{y}_0, t_0) = \mathrm{y}_0$.

Пример 3.1. Рассмотрим систему

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = A(\mathrm{x}, t)\,\mathrm{x}. \tag{3.6}$$

где A — матрица вещественная, непрерывная и заданная при $t \geqslant 0$, $x \in E_n$.

Уравнение (3.6) умножим скалярно на x; получим

$$\mathrm{x}^* \frac{d\mathrm{x}}{dt} = \mathrm{x}^* A(\mathrm{x}, t)\,\mathrm{x}$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathrm{x}^2 = \mathrm{x}^* B(\mathrm{x}, t)\,\mathrm{x}, \tag{3.6}$$

где $B(\mathrm{x}, t) = \frac{1}{2}(A + A^*)$ есть симметризованная матрица A.

Пусть b_{ij} — элементы матрицы B. Тогда существует ортогональная матрица R такая, что $R^*BR = P$, где P — диагональная матрица.

Сделаем линейное преобразование над переменными $x_1, \ldots, x_n$:

$$\mathrm{x} = R\mathrm{z}; \tag{3.7}$$

получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathrm{z}^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i z_i^2. \tag{3.8}$$

Обозначим

$$\lambda = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i; \qquad \nu = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i. \tag{3.9}$$

Тогда верно неравенство

$$\nu \mathrm{z}^2 \leqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathrm{z}^2 \leqslant \lambda \mathrm{z}^2$$

или

$$\mathrm{z}_0^2(t_0)\, e^{2\int_{t_0}^{t} \nu(\tau, \mathrm{z}(\tau))\, d\tau} \leqslant \mathrm{z}^2(t) \leqslant \mathrm{z}_0^2(t_0)\, e^{2\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau, \mathrm{z}(\tau))\, d\tau} \tag{3.10}$$

Так как ортогональное преобразование (3.7) не меняет суммы квадратов переменных, то эта же оценка справедлива для вектор-функции $\mathrm{x}(t)$. Если

$\lambda \leqslant 0$, то из формулы (3.10) следует, что положение равновесия $x = 0$ устойчиво по Ляпунову и при $\lambda \leqslant \alpha < 0$ оно будет асимптотически устойчиво по Ляпунову. При этом предполагается, что решения существуют при $t \geqslant 0$.

Пример 3.2. Рассмотрим систему n дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt = f_s(x_j, t), \quad s = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

или, в векторной форме,

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \tag{3.11}$$

Пусть система (3.11) имеет положение равновесия $\mathbf{x} \equiv 0$, т. е. $\mathbf{f}(0, t) \equiv 0$ для $\forall t \geqslant 0$ или $t \in (-\infty, +\infty)$.

Рассмотрим вопрос об устойчивости невозмущенного движения $\mathbf{x} \equiv 0$, для чего умножим равенство (3.11) скалярно на $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}^* \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_{s=1}^{n} x_s \frac{dx_s}{dt} = \sum_{s=1}^{n} x_s f(x_j, t) = \mathbf{x}^* \mathbf{f}(\mathbf{x}, t),$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^* \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \tag{3.12}$$

Вектор-функцию $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ разложим по формуле конечных приращений

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = A\mathbf{x}, \tag{3.13}$$

где

$$A = \{a_{s,j}\} = \left\{\frac{\partial f_s(\bar{\tau}_s x_j, t)}{\partial x_j}\right\}, \quad i, s, j = 1, 2, \ldots, n; \quad 0 < \bar{\tau}_s < 1.$$

Тогда

$$\mathbf{x}^* \mathbf{f} = \mathbf{x}^* A \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \frac{A + A^*}{2} \mathbf{x}.$$

Пусть $A + A^* = B$; тогда равенство (3.12) перепишется в виде

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^* B \mathbf{x}. \tag{3.14}$$

Обозначая через $\mu(\mathbf{x}, t)$ наибольшее собственное число квадратичной формы (3.14), через $\lambda(\mathbf{x}, t)$ — наименьшее, имеем

$$\lambda \mathbf{x}^2 \leqslant \frac{d}{dt} \mathbf{x}^2 \leqslant \mu \mathbf{x}^2,$$

или, интегрируя, получим

$$\mathbf{x}^2(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \lambda(\mathbf{x}(\tau), \tau)\, d\tau} \leqslant \mathbf{x}^2(t) \leqslant \mathbf{x}^2(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \mu(\mathbf{x}(\tau), \tau)\, d\tau} \tag{3.15}$$

Убедимся, что при $\mu(\mathbf{x}, t) \leqslant 0$ положение равновесия устойчиво.

Действительно, устойчивость означает, что по любому $\varepsilon > 0$ и любому $t_0 \geqslant 0$ можно указать $\delta(t_0, \varepsilon)$ такое, что если только

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| = \|\mathbf{x}_0\| < \delta(t_0, \varepsilon),$$

то будет $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ при любом $t \geqslant t_0$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и положим, например,

$\delta=\alpha\varepsilon$, где $\alpha<1$. Тогда из неравенств (3.15) следует, что

$$\mathrm{x}^2(t)\leqslant \mathrm{x}^2(t_0)\,e^{\int\limits_{t_0}^{t}\mu(\mathrm{x}(\tau),\,\tau)\,d\tau}$$

и при $\mu(\mathrm{x}(\tau),\tau)\leqslant 0$ будет $\int\limits_{t_0}^{t}\mu(\mathrm{x}(\tau),\tau)\,d\tau\leqslant 0$; следовательно, $\|\mathrm{x}(t)\|\leqslant\delta\cdot 1=$ $=\alpha\varepsilon<\varepsilon$ при $\alpha<1$, что и требовалось доказать. Здесь предполагается, что система (3.11) имеет решение, заданное при $t>0$.

Пример 3.3. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{sj}(t)\,x_j^{\sigma},\quad s=1,\,2,\,\ldots,\,n,$$

где $\sigma=p/q$, p и q — нечетные числа, величины $a_{sj}(t)$ — вещественные функции времени, заданные и непрерывные при $t>0$. Умножим каждое из уравнений соответственно на x_s^{σ} и затем просуммируем. Тогда получим

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^{\sigma+1}\right)=(\sigma+1)\,\mathrm{y}^*B\mathrm{y},$$

где по-прежнему $B=(A+A^*)/2$ (см. пример 3.1), y есть вектор с компонентами $y_j=x_j^{\sigma}$.

Обозначим, как и выше, через λ и μ соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы B. Тогда

$$\lambda\mathrm{y}^2\leqslant\mathrm{y}^*B\mathrm{y}\leqslant\mu\mathrm{y}^2.$$

Положим

$$z=\sum_{j=1}^{n}x_j^{\sigma+1}.$$

Заметим, что так как $\sigma+1=\dfrac{p+q}{q}$ и $p+q$ — четное число, то $z>0$ если не все x_j равны нулю.

Рассмотрим для функции $\mathrm{y}^2z^{-2\sigma/(\sigma+1)}$ наибольшее и наименьшее значения на поверхности $z=1$. Обозначим эти значения соответственно через a и b. Получим

$$az^{2\sigma/(\sigma+1)}\leqslant\mathrm{y}^2\leqslant bz^{2\sigma/(\sigma+1)}.$$

Из этих неравенств вытекает

$$\alpha z^{2\sigma/(\sigma+1)}\leqslant\frac{d}{dt}z\leqslant\beta z^{2\sigma/(\sigma+1)},$$

где

$$\alpha=\lambda(\sigma+1)\,az^{2\sigma/(\sigma+1)},\qquad \beta=\mu(\sigma+1)\,bz^{2\sigma/(\sigma+1)}.$$

Проинтегрируем полученные неравенства

$$\int\limits_0^t\alpha\,d\tau\leqslant\int\limits_0^t z^{-\frac{2\sigma}{\sigma+1}}\,dz\leqslant\int\limits_0^t\beta\,d\tau,$$

Отсюда

$$\int_0^t \alpha\,d\tau \leqslant \frac{1+\sigma}{1-\sigma}\left(z^{\frac{1-\sigma}{1+\sigma}} - z_0^{\frac{1-\sigma}{1+\sigma}}\right) \leqslant \int_0^t \beta\,d\tau.$$

Пусть для определенности $\sigma > 1$. Тогда

$$z_0\left(1 + z_0^{-\frac{1-\sigma}{1+\sigma}} \int_0^t \frac{1-\sigma}{1+\sigma}\alpha\,d\tau\right)^{\frac{1+\sigma}{1-\sigma}} \leqslant z(t) \leqslant z_0\left(1 + z_0^{-\frac{1-\sigma}{1+\sigma}} \int_0^t \frac{1-\sigma}{1+\sigma}\beta\,d\tau\right)^{\frac{1+\sigma}{1-\sigma}}; (*)$$

так как $z_0 > 0$, $1-\sigma < 0$, то это неравенство показывает, что $z \to 0$ при $t \to \infty$, т. е. что положение равновесия будет асимптотически устойчивым, если

$$\int_0^t \frac{1-\sigma}{1+\sigma}\beta\,d\tau \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Тогда также $\int_0^t \frac{1-\sigma}{1+\sigma}\alpha \to +\infty$, поскольку $\alpha < \beta$, $\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\alpha > \frac{1-\sigma}{1+\sigma}\beta$. Функции справа и слева в неравенствах (*) стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Если величины a_{sj} являются вещественными постоянными, то это имеет место при условии $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$. (Тогда наибольшее собственное число μ матрицы B отрицательно.)

2°. Геометрический смысл второго метода исследования устойчивости по А. М. Ляпунову заключается в том, что изучаем изменение расстояния от движущейся точки по траектории до положения равновесия или изменение некоторой другой функции, имеющей общие свойства с расстоянием.

В рассмотренных примерах в качестве такой функции была взята функция

$$V(x_1, \ldots, x_n) = V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2.$$

Поверхности уровня $V(\mathbf{x}) = \text{const}$ в этом случае охватывают положение равновесия и составляют систему вложенных поверхностей.

Рассмотрим полную производную по времени функции $V(\mathbf{x})$ в силу системы (3.1)

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_s} \cdot \frac{dx_s}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_s} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = (\operatorname{grad} V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)).$$

Если $(\operatorname{grad} V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) < 0$, т. е. угол между градиентом функции $V(\mathbf{x})$ и вектором $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ больше угла $\pi/2$, то все траектории втекают внутрь поверхности $V(\mathbf{x}) = \text{const}$.

Определение 3.4. *Вещественная однозначная функция* $V(\mathrm{x}, t)$ $(n+1)$ *аргумента, заданная в области*

$$\|\mathrm{x}\| \leqslant h, \quad t \geqslant 0,$$

где $h > 0$ *и* $V(0, t) = 0$ *при любом* $t \geqslant 0$, *называется положительно определенной, если существует вещественная непрерывная функция* $W(\mathrm{x})$, *заданная при* $\|\mathrm{x}\| \leqslant h$, *такая, что*: 1) $W(0) = 0$; 2) $W(\mathrm{x}) > 0$ *при* $\|\mathrm{x}\| \neq 0$; 3) $V(\mathrm{x}, t) \geqslant W(\mathrm{x})$.

Если в этом определении свойства 2) и 3) функции $W(\mathrm{x})$ заменить свойствами 2′) $W(\mathrm{x}) < 0$ при $\|\mathrm{x}\| \neq 0$ и 3′) $V(\mathrm{x}, t) \leqslant W(\mathrm{x})$, то функцию $V(\mathrm{x}, t)$ будем называть *отрицательно определенной*.

Например, функция $V(x, y, t) = x^2 + \frac{y^2}{1+t}$ не является положительно определенной, а функция

$$V = x^2 + y^2 + \frac{1}{2} xy \sin t$$

положительно определенная.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в векторной форме

$$d\mathrm{x}/dt = \mathrm{f}(\mathrm{x}, t), \tag{3.16}$$

где $\mathrm{f}(\mathrm{x}, t)$ — вещественная и непрерывная вектор-функция, заданная при $\|\mathrm{x}\| \leqslant h_0$, $t \geqslant 0$, и удовлетворяющая условию Липшица относительно x в этой области.

Система (3.16), предполагаем, имеет положение равновесия $\mathrm{x} = 0$, т. е.

$$\mathrm{f}(0, t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad \forall t \geqslant 0 \qquad (\forall \text{ означает «любой»}).$$

Очевидно, что через каждую точку $\|\mathrm{x}_0\| < h_0$ при $t \geqslant t_0$ проходит единственное решение

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}(t, \mathrm{x}_0, t_0). \tag{3.17}$$

Если существует производная функции $V_1(t, \mathrm{x}_0, t_0) = V(\mathrm{x}(t, \mathrm{x}_0, t_0), t)$ по t, то говорят, что функция $V(\mathrm{x}, t)$ дифференцируема в силу системы (3.16) вдоль выбранной интегральной кривой и

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_1}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \cdot f_s(\mathrm{x}, t) + \frac{\partial V}{dt} \tag{3.18}$$

Теорема 3.1 (теорема об устойчивости). *Для того чтобы нулевое решение системы дифференциальных уравнений* (3.16) *было устойчивым по Ляпунову*, необходимо и достаточно, *чтобы существовала функция* $V(\mathrm{x}, t)$, *удовлетворяющая следующим условиям*:

1) *функция* $V(\mathbf{x}, t)$ *задана при* $\|\mathbf{x}\| \leqslant h_0$, $t \geqslant 0$, *где* h_0 — *положительная постоянная*;

2) *функция* $V(0, t) \equiv 0$ *для* $\forall t \geqslant 0$ *и при фиксированном значении* t *непрерывна по переменной* $\mathbf{x}$ *в точке* $\mathbf{x} = 0$;

3) *функция* $V(\mathbf{x}, t)$ — *положительно определенная*;

4) *функция* $V_1(t, \mathbf{x}_0, t_0) = V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0), t)$ *не возрастает при* $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ *для всех* $\mathbf{x}_0$ *таких, что* $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant h_0$.

Все функции, которые решают вопрос об устойчивости, называются функциями Ляпунова.

Доказательство. Достаточность [10]. Предположим, что существует функция $V(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющая условиям теоремы. Требуется показать, что в этом случае нулевое решение системы (3.16) устойчиво по Ляпунову. Для этого возьмем $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < h_0$) и зафиксируем число $t_0 > 0$. Рассмотрим сферу $\|\mathbf{x}\| = \varepsilon$ и найдем наименьшее значение $W(\mathbf{x})$ на этой сфере. $W(\mathbf{x})$ определена и непрерывна, так как $V(\mathbf{x}, t)$ по условию теоремы положительно определенная.

Пусть

$$\inf_{\|\mathbf{x}\| = \varepsilon} W(\mathbf{x}) = \lambda > 0, \tag{3.19}$$

причем точная нижняя граница достигается.

В силу непрерывности $V(\mathbf{x}, t)$ в точке $\mathbf{x} = 0$ существует число $\delta(t_0, \varepsilon)$ такое, что

$$V(\mathbf{x}, t_0) < \lambda \quad \text{при} \quad \|\mathbf{x}\| < \delta. \tag{3.20}$$

Покажем, что найденное число $\delta(t_0, \varepsilon)$ отвечает взятому числу ε по определению устойчивости.

Возьмем любую точку, удовлетворяющую неравенству

$$\|\mathbf{x}_0\| < \delta(t_0, \varepsilon). \tag{3.21}$$

Тогда по свойству (3.20)

$$V(\mathbf{x}_0, t_0) < \lambda. \tag{3.22}$$

Далее в силу условия 4 теоремы функция $V_1(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ является невозрастающей при $t \geqslant t_0$. Поэтому

$$V_1(t, \mathbf{x}_0, t_0) \leqslant V(\mathbf{x}_0, t_0) < \lambda \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0 \tag{3.23}$$

и, следовательно,

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \forall t \geqslant t_0,$$

ибо в противном случае существует момент $T > t_0$ такой, что

$$\|\mathbf{x}(T, \mathbf{x}_0, t_0)\| = \varepsilon.$$

Но тогда в силу свойств положительно определенной функции

$V(x, t)$ и определения (3.19) числа λ будем иметь

$$V_1(T, x_0, t_0) = V(x(T, x_0, t_0), T) \geqslant W(x(T, x_0, t_0)) \geqslant \lambda,$$

что противоречит неравенству (3.23), справедливому для $\forall t \geqslant t_0$ (в частности, и при $t = T > t_0$). Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Необходимость [20]. Пусть положение равновесия устойчиво по Ляпунову. Покажем, что в таком случае существует функция Ляпунова, удовлетворяющая теореме 3.1.

Рассмотрим решение (3.17) $x = x(t, x_0, t_0)$ при каких-либо x_0, t_0, удовлетворяющих условиям

$$\|x_0\| < \delta \quad \text{и} \quad t_0 \geqslant 0. \qquad (3.24')$$

Функцию V в любой такой точке (x_0, t_0) определим следующим образом:

$$V(x_0, t_0) = \sup_{t \geqslant t_0} \|x(t, x_0, t_0)\|. \qquad (3.24)$$

Если окажется, что на интегральной кривой $x(t, x_0, t_0)$ правая часть соотношения (3.24) $\geqslant h_0$, то положив в этой точке $V(x_0, t_0) = h_0$. Заменив в (3.24) x_0 на x и t_0 на t, получим однозначную функцию $V(x, t)$, определенную единственным образом и заданную (в соответствии со сделанным замечанием) в области $\|x\| \leqslant h_0$, $t \geqslant 0$. Таким образом, условие теоремы 3.1 выполнено.

Так как точка $x = 0$ является положением равновесия системы (3.16), то $V(0, t) = 0$ при $t \geqslant t_0$, что следует из (3.24).

Покажем, что функция $V(x, t)$ непрерывна при фиксированном $t = t_0$ в точке $\|x\| = 0$. Возьмем $\varepsilon_1 > 0$. Так как имеет место устойчивость, то существует $\delta(t_0, \varepsilon_1) > 0$ такое, что $\|x(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon_1$ для всех $t \geqslant t_0$ при условии $\|x\| < \delta(t_0, \varepsilon_1)$.

В силу (3.24) $V(x, t_0) < \varepsilon_1$, т. е. при заданном $\varepsilon_1 > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что как только $\|x\| < \delta$, то $V(x, t_0) < \varepsilon_1$, что и доказывает выполнение свойства 2 теоремы.

Легко видеть, что

$$V(x_0, t_0) \geqslant \|x(t, x, t_0)\| \equiv W(x) > 0$$

(положительная определенность функции $V(x, t)$).

Проверим теперь условие 4. Для этого следует установить, что если $x = x(t, x_0, t_0)$ — некоторая интегральная кривая, проходящая при $t = t_0$ через точку x_0, то функция $V(x, t)$ вдоль этой интегральной кривой не возрастает. Другими словами, если t_1 и t_2 — произвольные два момента такие, что $t_0 \leqslant t_1 < t_2$, а $x_1 = x(t_1, x_0, t_0)$, $x_2 = x(t_2, x_0, t_0)$ — соответствующие точки на рассматриваемой интегральной кривой, то должно иметь место не-

равенство

$$V(x_1, t_1) \geqslant V(x_2, t_2). \qquad (*)$$

Действительно, в соответствии с нашим определением функции $V(x, t)$ мы имеем

$$V(x_1, t_1) = \sup_{t \geqslant t_1} \| x(t, x_1, t_1) \|,$$
$$V(x_2, t_2) = \sup_{t \geqslant t_2} \| x(t, x_2, t_2) \|,$$

где $x(t, x_1, t_1)$ — интегральная кривая, проходящая при $t = t_1$ через точку x_1, а $x(t, x_2, t_2)$ — интегральная кривая, проходящая при $t = t_2$ через точку x_2. В силу единственности решения исходной системы (3.16) обе эти интегральные кривые совпадают с рассматриваемой интегральной кривой $x(t, x_0, t_0)$, поскольку при t_1 и t_2 эта интегральная кривая проходит именно через точки x_1 и x_2 соответственно.

Таким образом, $V(x_1, t_1)$ и $V(x_2, t_2)$ равны верхним пределам нормы одной и той же функции $x(t, x_0, t_0)$ при $t \geqslant t_1$ и $t \geqslant t_2$ соответственно. Но так как $t_1 < t_2$ и область (t_1, ∞) включает в себя область (t_2, ∞), то первый верхний предел не меньше второго, т. е. справедливо неравенство (*). Этим необходимость условий теоремы 3.1 доказывается полностью.

Следствие 1. *Требования, предъявляемые теоремой* 3.1 *к функции* V (*за исключением условия* 4)), *легко непосредственно проверить.*

Условие 4) на первый взгляд представляется необозримым, так как интегральные кривые системы (3.17) неизвестны, и, следовательно, проверить непосредственно это условие не представляется возможным. Однако функция V, согласно этому условию, монотонная вдоль любой интегральной кривой при $t \geqslant t_0$ и потому дифференцируемая почти для всех значений t при $t \geqslant t_0$ (согласно теореме Лебега [21] о существовании почти везде производной у монотонной функции). При этом почти везде имеет место соотношение

$$dV/dt = W \leqslant 0.$$

Таким образом, условие 4) можно проверить непосредственно путем нахождения полной производной функции V в силу системы.

Следствие 2 [10]. *Если функция* $V(x, t)$ *является положительно определенной и непрерывной по переменной* x *в точке* $\|x\| = 0$ *равномерно относительно* t *при* $t \geqslant 0$ и $dV/dt \leqslant 0$, *то нулевое решение системы* (3.16) *будет устойчиво равномерно относительно* $t_0 \geqslant 0$, *т. е. в определении устойчивости можно выбрать* $\delta(t_0, \varepsilon) = \delta(\varepsilon)$ *независимым от* t_0.

Доказательство. Пусть существует такая функция $V(\mathbf{x}, t)$. Покажем, что нулевое решение будет устойчивым равномерно относительно t_0.

Действительно, при доказательстве теоремы 3.1 число $\delta(t_0, \varepsilon)$ выбиралось из условия

$$V(\mathbf{x}, t_0) < \lambda \quad \text{при} \quad \|\mathbf{x}\| < \delta(t_0, \varepsilon).$$

Так как функция $V(\mathbf{x}, t_0)$ непрерывна по $\mathbf{x}$ в точке $\|\mathbf{x}\| = 0$ равномерно относительно t при $t \geqslant 0$, то существует число $\delta(\varepsilon)$ такое, что

$$V(\mathbf{x}, t_0) < \lambda \quad \text{при} \quad \|\mathbf{x}\| < \delta(\varepsilon)$$

для $\forall t_0 \geqslant 0$. Далее ясно, что число $\delta(\varepsilon)$ соответствует выбранному числу $\varepsilon > 0$ из определения устойчивости. Этим доказано следствие 2.

Следствие 3 [10]. *Пусть функция $V(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет условиям следствия 2, т. е. она положительно определенная, непрерывная по $\mathbf{x}$ при $\mathbf{x} = 0$ равномерно относительно t при $t \geqslant 0$ и, кроме того, такая, что*

$$dV/dt = -W(\mathbf{x}, t), \tag{3.25}$$

в силу системы (3.16), где $W(\mathbf{x}, t)$ — положительно определенная функция. Тогда положение равновесия $\mathbf{x} = 0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову равномерно относительно $t_0 \geqslant 0$.

Доказательство. Покажем, что $\|\mathbf{x}(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$, т. е. что по любому $\varepsilon' > 0$ можно указать $T(\varepsilon')$ такое, что

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\| < \varepsilon' \quad \text{при} \quad t > T(\varepsilon').$$

С этой целью заметим, что по заданному $\varepsilon' > 0$ можно найти в соответствии со следствием 2 $\delta(\varepsilon') = \delta' > 0$, удовлетворяющее определению устойчивости и не зависящее от t_0. При этом $\delta' < \varepsilon'$. Тогда возможны два случая:

1) существует T такое, что

$$\|\mathbf{x}(T, \mathbf{x}_0, t_0)\| < \delta', \quad \|\mathbf{x}_0\| < \delta',$$

и, следовательно,

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\| < \varepsilon' \quad \text{при} \quad \forall t > T;$$

2) не существует такого T, т. е. для $\forall t \geqslant t_0$ всегда будет $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\| \geqslant \delta'$. В этом случае, так как $W(\mathbf{x}, t)$ — положительно определенная функция, то всегда $W(\mathbf{x}, t) > \alpha > 0$ для $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$. Следовательно, всегда

$$\frac{dV(\mathbf{x}, t)}{dt} \leqslant -\alpha. \tag{3.25'}$$

Интегрируя (3.25′), получим

$$V(x(t,\ x_0,\ t_0);\ t) \leqslant -\alpha(t-t_0)+V(x_0,\ t_0). \qquad (3.26)$$

Так как $\|x(t,\ x_0,\ t_0)\| \geqslant \delta'$ при $\forall t \geqslant t_0$ и функция $V(x,\ t)$ положительно определенная, то $V(x(t,\ x_0,\ t_0),\ t) > \beta > 0$. Правая же часть неравенства (3.26) с ростом t стремится к $-\infty$. Таким образом, получили противоречие, так что случай 2) невозможен. Следовательно, имеет место только случай 1), который и соответствует тому, что

$$\|x(t,\ x_0,\ t_0)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Следствие 3 доказано.

Пример 3.4. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt = f_s(x_1,\ \ldots,\ x_n) \quad s=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (3.27)$$

где $f_s(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ — функции, заданные в R^n, вещественные и непрерывно дифференцируемые. Предполагаем, что система (3.27) имеет единственное положение равновесия $x=0$, т. е.

$$f_s(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,|_{x_1=x_2=\ldots=x_n=0}=0, \quad s=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

В качестве функции Ляпунова возьмем

$$V(x)=\sum_{s=1}^{n} f_s^2(x)=f^*(x)\,f(x).$$

Тогда

$$\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}f^2=2f^*\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{dt}=2f^*\frac{\partial f}{\partial x}\cdot f,$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

т. е.

$$dV/dt=f^*Bf,$$

где

$$B=\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^*\right].$$

Если все собственные числа матрицы B не превосходят нуля, т. е. $f^*Bf \leqslant 0$, то выполнены условия теоремы об устойчивости, и положение $x=0$ будет устойчивым.

Если все собственные числа матрицы B отрицательны и могут обращаться в нуль лишь в положении равновесия, т. е. $f^*Bf < 0$, то $dV/dt=-W(x)$, и положение равновесия $x=0$ будет асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Задача. Дана система дифференциальных уравнений вида

$$dx_s/dt = x_s^{(m)}(x_1, \ldots, x_n), \quad s = 1, 2, \ldots, n,$$

где $x_s^{(m)}(x_1, \ldots, x_n)$ — однородные формы переменных $x_1, \ldots, x_n$ степени m с вещественными коэффициентами.

Требуется найти необходимые и достаточные условия, налагаемые на коэффициенты, при которых положение равновесия $\mathbf{x} = 0$ асимптотически устойчиво.

Теорема 3.2 (о неустойчивости). *Для того чтобы нулевое решение системы* (3.16) *было неустойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы существовали две функции* $V(\mathbf{x}, t)$ *и* $W(\mathbf{x}, t)$, *обладающие следующими свойствами:*

1) *функция* $V(\mathbf{x}, t)$ *ограничена в некоторой окрестности точки* $\mathbf{x} = 0$, *т. е.* $V(\mathbf{x}, t) < l$ *при* $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant h_0$;

2) *в сколь угодно малой окрестности точки* $\mathbf{x} = 0$ *существует по крайней мере одна точка* $\bar{\mathbf{x}}$ *такая, что* $V(\bar{\mathbf{x}}, t_0) > 0$;

3) *полная производная функции* $V(\mathbf{x}, t)$ *в силу системы* (3.16) *удовлетворяет соотношению*

$$dV/dt = \lambda V + W(\mathbf{x}, t),$$

где $\lambda > 0$, *а* $W(\mathbf{x}, t)$ *является неотрицательной функцией при* $\|\mathbf{x}\| \leqslant h_0$, *вещественной и непрерывной.*

Доказательство. Необходимость [20]. Пусть имеет место неустойчивость, что означает: существует такое $\varepsilon > 0$, что, какое бы $\delta > 0$ ни взять, обязательно найдется по крайней мере хоть одна точка $(\mathbf{x}_0, t_0)$ $(\|\mathbf{x}_0\| < \delta)$, время $\tau(\mathbf{x}_0, t_0)$ такие, что $\|\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}_0, t_0)\| \geqslant \varepsilon$.

Возьмем любую точку $\mathbf{x}_0$, удовлетворяющую неравенству $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ $(\delta < \varepsilon < h_0)$. Возможны два случая:

1) либо $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$;

2) либо существует такой момент $\tau \geqslant t_0$, что $\|\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}_0, t_0)\| = \varepsilon$.

Положим $V(\mathbf{x}_0, t_0) = 0$ в первом случае и $V(\mathbf{x}_0, t_0) = e^{-(\tau - t_0)} = e^{t_0 - \tau}$ во втором случае.

Таким образом, функция определена в любой точке множества $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < \delta\}$ и ограничена там: $V(\mathbf{x}, t) < 1$. Как было отмечено выше, точки $\mathbf{x}$ второго типа существуют в любой сколь угодно малой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$. Поэтому построенная функция $V(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет условию 2). Покажем теперь, что функция $V(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет также условию 3). Действительно, если точка $\mathbf{x}$ относится к первому типу, то $V \equiv 0$, так как $\|\tilde{\mathbf{x}}(t', \mathbf{x}, t)\| < \varepsilon$, поэтому $dV/dt = V$ вдоль любого такого движения. Если точка $\mathbf{x}$ второго типа, то $V(\mathbf{x}, t) = e^{t-\tau}$, откуда следует, что $dV/dt = V$.

Таким образом, условие 3) выполняется вдоль любого движения $\tilde{\mathbf{x}}(t', \mathbf{x}, t)$, $t' > t$ при $\lambda = 1$ и $W = 0$.

Достаточность [10]. Пусть существуют функции $V(\mathbf{x}, t)$, $W(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющие условиям теоремы. Покажем, что $\mathbf{x}=0$ неустойчиво.

Пусть, напротив, положение равновесия $\mathbf{x}=0$ устойчиво. Тогда по любому $\varepsilon>0$ можно указать величину $\delta>0$ такую, что при $\|\mathbf{x}_0\|<\delta$ будет

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\|<\varepsilon<h_0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0.$$

Тогда на любом движении $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ функция $V(\mathbf{x}, t)$ ограничена при $t>t_0$ и $\|\mathbf{x}_0\|<\delta$ (свойство 1)). По свойству 2) существует точка $\mathbf{x}_0$ такая, что $V(\mathbf{x}_0, t_0)>0$. Функция $V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0), t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dV(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0), t)}{dt}=\lambda V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0), t)+W(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0), t)$$

с начальным условием

$$V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0), t)=V(\mathbf{x}_0, t_0)>0.$$

Интегрируя это уравнение и переходя к неравенству, получим

$$V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)) \geqslant V(\mathbf{x}_0, t_0) e^{\lambda(t-t_0)} \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0,$$

что противоречит ограниченности функции $V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0), t)$. Полученное противоречие показывает, что положение равновесия $\mathbf{x}=0$ неустойчиво.

3°. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=P(t)\mathbf{x}, \tag{3.28}$$

где функции $p_{si}(t)$ являются вещественными, непрерывными и ограниченными, заданными при $t \geqslant 0$.

Систему (3.28) можно рассматривать как линейное приближение системы (3.16), поэтому характер решения системы (3.28) существенно связан с поведением решения системы (3.16). Точнее, если нулевое решение системы (3.28) устойчиво или асимптотически устойчиво, то нулевое решение системы (3.16) также будет соответственно устойчиво или асимптотически устойчиво при довольно широких допущениях относительно нелинейных членов.

Из сказанного следует значимость критериев устойчивости и асимптотической устойчивости линейных систем при решении общей задачи об устойчивости нулевого решения системы (3.16).

Если в системе (3.28) все коэффициенты являются постоянными, то решение вопроса об асимптотической устойчивости сводится к исследованию корней уравнения $\det(P-\lambda E)=0$.

В общем случае вопрос остается открытым.

Теорема 3.3 [22]. *Для того чтобы любое решение, проходящее через точку* $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ *при* $t=t_0$ *системы* (3.28), *удовлетворяло неравенствам вида*

$$a_1\|\mathbf{x}_0\|e^{-b_1(t-t_0)}\leqslant\|\mathbf{x}(t)\|\leqslant a_2\|\mathbf{x}_0\|e^{-b_2(t-t_0)} \quad \text{при} \quad t>t_0, \tag{3.29}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали две квадратичные формы

$$V(\mathbf{x},\ t)=\mathbf{x}^*A(t)\mathbf{x}, \tag{3.30}$$

$$W(\mathbf{x},\ t)=\mathbf{x}^*B(t)\mathbf{x}, \tag{3.31}$$

удовлетворяющие условиям:

1) *функция* $V(\mathbf{x},\ t)$ *положительно определенная, а* $W(\mathbf{x},\ t)$ *отрицательно определенная, и для них справедливы неравенства*

$$\begin{aligned}\alpha_1\|\mathbf{x}\|^2\leqslant V(\mathbf{x},\ t)\leqslant\alpha_2\|\mathbf{x}\|^2,\\ -\beta_1\|\mathbf{x}\|^2\leqslant W(\mathbf{x},\ t)\leqslant-\beta_2\|\mathbf{x}\|^2,\end{aligned} \tag{3.31'}$$

где α_i, β_i, a_i, b_i, $i=1,\ 2$,— *положительные константы;*

2) *выполнено соотношение в силу системы* (3.28)

$$dV/dt=W. \tag{3.32}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы (3.28); тогда любое решение, проходящее через точку $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ при $t=t_0$, представится формулой

$$\mathbf{x}(t)=Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0. \tag{3.33}$$

Пусть любое такое решение удовлетворяет неравенству (3.29). Тогда возьмем квадратичную форму $W(\mathbf{x},\ t)$ в виде $W(\mathbf{x},\ t)=-\mathbf{x}^*\cdot\mathbf{x}$. Положим

$$V(\mathbf{x},\ t)=-\int_t^{+\infty}W(\mathbf{x},\ \tau)\,d\tau. \tag{3.34}$$

Ясно, что $W(\mathbf{x},\ t)$ удовлетворяет неравенствам (3.31) при $\beta_1=\beta_2=1$ и $dV/dt=W$.

Покажем, что $V(\mathbf{x},\ t)$ является квадратичной формой, удовлетворяющей неравенствам (3.31′). Действительно,

$$V(\mathbf{x},\ t)=\int_t^{+\infty}\mathbf{x}^*(\tau)\mathbf{x}(\tau)\,d\tau=\mathbf{x}_0^*\int_t^{+\infty}Y^{-1*}(t_0)Y^*(\tau)Y(\tau)Y^{-1}(t_0)\,d\tau\cdot\mathbf{x}_0=$$

$$=\mathbf{x}^*(t)\int_t^{+\infty}B^*(\tau,\ t)B(\tau,\ t)\,d\tau\cdot\mathbf{x}(t),$$

где $B(\tau,\ t)=Y(\tau)Y^{-1}(t)$, $\mathbf{x}_0=Y(t_0)Y^{-1}(t)\mathbf{x}(t)$.

Учитывая неравенство (3.29) и интегрируя (3.34) в пределах от t_0 до $+\infty$, получим

$$\int \alpha_1^2 \|x_0\|^2 e^{-2b_1(\tau-t_0)}\,d\tau \leqslant V(x_0, t_0) = \int_{t_0}^{+\infty} x^2(\tau)\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{+\infty} a_2^2 \|x_0\|^2 e^{-2b_2(\tau-t_0)}\,d\tau$$

или

$$\frac{1}{2b_1} a_1^2 \|x_0\|^2 \leqslant V(x_0, t_0) \leqslant \frac{1}{2b_2} a_2^2 \|x_0\|^2.$$

Ясно, что функция $V(x, t)$ положительно определенная и существуют положительные числа α_1, α_2 такие, что

$$\alpha_1 \|x\|^2 \leqslant V(x, t) \leqslant \alpha_2 \|x\|^2.$$

Достаточность. Пусть существуют функции V и W, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда, согласно следствию 3, положение равновесия асимптотически устойчиво. Покажем далее, что любая интегральная кривая системы (3.28) не только стремится к началу координат при $t \to \infty$, но и удовлетворяет неравенствам (3.29).

Действительно, разделим обе части равенства (3.32) на V и проинтегрируем в пределах от t_0 до t. Тогда получим

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dV}{V} = \int_{t_0}^{t} \frac{W}{V}\,d\tau,$$

откуда

$$V_1(t, x_0, t_0) = V(x(t, x_0, t_0), t) = V(x_0, t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \frac{W}{V}\,d\tau} \tag{3.35}$$

Функция V_1, стоящая в левой части равенства (3.35), является значением функции V на выбранной интегральной кривой системы (3.28). Оценим интеграл, входящий в правую часть (3.35). Для этого рассмотрим подынтегральное выражение

$$\frac{W}{V} = \frac{x^* B(t)\, x}{x^* A(t)\, x}.$$

Если теперь числитель и знаменатель этой дроби заменить большими значениями из условий теоремы 3 и наоборот, получим оценки

$$-\frac{\beta_1}{\alpha_1} \leqslant \frac{W}{V} \leqslant -\frac{\beta_2}{\alpha_2}.$$

Применяя их к соотношению (3.35), имеем

$$V(\mathrm{x}_0,\ t_0)\,e^{-\frac{\beta_1}{\alpha_1}(t-t_0)} \leqslant V_1(t,\ \mathrm{x}_0,\ t_0) \leqslant V(\mathrm{x}_0,\ t_0)\,e^{-\frac{\beta_2}{\alpha_2}(t-t_0)}.$$

Заменим функцию $V(\mathrm{x}_0, t_0)$ на ее наименьшее значение (условие 1) теоремы 3.3), а функцию $V_1(t, \mathrm{x}_0, t_0)$ — на ее наибольшее значение из того же неравенства. Тогда

$$\alpha_1\|\mathrm{x}_0\|^2 e^{-\frac{\beta_1}{\alpha_1}(t-t_0)} \leqslant \alpha_2\|\mathrm{x}(t)\|^2.$$

Аналогично

$$\alpha_1\|\mathrm{x}(t)\|^2 \leqslant \alpha_2\|\mathrm{x}_0\|^2 e^{-\frac{\beta_2}{\alpha_2}(t-t_0)}.$$

Извлекая из обеих частей последних неравенств квадратный корень и объединяя их, получим неравенство (3.29), что и требовалось доказать.

Замечание. Запишем в развернутом виде соотношение (3.32) в соответствии с (3.30):

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d\mathrm{x}^*}{dt}A(t)\,\mathrm{x} + \mathrm{x}^*\frac{dA(t)}{dt}\mathrm{x} + \mathrm{x}^*A(t)\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \mathrm{x}^*B\mathrm{x}.$$

Заменяя $d\mathrm{x}/dt$ и $d\mathrm{x}^*/dt$ из системы (3.28), получим равенство

$$\frac{dV}{dt} = \mathrm{x}^*\left[P^*(t)\,A(t) + \frac{dA}{dt} + A(t)\,P(t)\right]\cdot\mathrm{x} = \mathrm{x}^*B\mathrm{x},$$

которое имеет место вдоль любой траектории системы, т. е.

$$\frac{dA}{dt} + P^*A + AP = B. \qquad (3.36)$$

Уравнение (3.36) называют *матричным уравнением Ляпунова*.

Если $P = \mathrm{const}$, то и матрица $A = \mathrm{const}$; тогда (3.36) есть алгебраическое матричное уравнение вида

$$P^*A + AP = B. \qquad (3.37)$$

Для решения вопроса об асимптотической устойчивости $\mathrm{x} = 0$ системы (3.28) необходимо и достаточно, чтобы уравнение (3.36) или (3.37) имели решение в виде положительно определенной матрицы A при условии, что матрица B является отрицательно определенной.

Рассмотрим наряду с системой (3.28) нелинейную систему

$$\dot{\mathrm{x}} = P(t)\,\mathrm{x} + \mathrm{G}(\mathrm{x},\ t), \qquad (3.38)$$

где $\mathrm{G}(\mathrm{x}, t)$ — вещественная непрерывная векторная функция, заданная при $t \geqslant 0$, $\|\mathrm{x}\| \leqslant h_0$.

Теорема 3.4. *Если векторная функция* $G(x, t)$ *удовлетворяет условию*

$$\|G(x, t)\| \leqslant c(\varepsilon, t)\|x\| \quad \text{при} \quad \|x\| \leqslant \varepsilon, \quad t \geqslant 0, \tag{3.39}$$

где $c(\varepsilon, t) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$ *равномерно по отношению к* $t \geqslant 0$, *то из асимптотической устойчивости системы* (3.28) *и оценок* (3.29) *вытекает, что положение равновесия* $x = 0$ *системы* (3.38) *будет асимптотически устойчивым, и любое решение этой системы, начинающееся в достаточно малой окрестности* $x = 0$ *будет удовлетворять оценкам* (3.29) *с некоторыми другими константами, входящими в эти оценки.*

Доказательство. Из асимптотической устойчивости положения равновесия системы (3.28) и оценок (3.29) вытекает существование квадратичных форм V и W, удовлетворяющих оценкам (3.30) и (3.31).

Найдем полную производную функции V в силу системы (3.38) $dV/dt = W + W_1$, где $W_1 = (\operatorname{grad} V, G)$, откуда имеем $|W_1| \leqslant \gamma \cdot c(\varepsilon, t)\|x\|^2$ при $\|x\| \leqslant \varepsilon$. Здесь γ — некоторая положительная постоянная.

Из этой оценки вытекает, что функция $W + W_1$ определенно отрицательная, во всяком случае, в достаточно малой окрестности положения равновесия $x = 0$ системы (3.38), и, следовательно, это положение равновесия асимптотически устойчиво.

При доказательстве достаточности условий теоремы 3.3 не использовалось свойство линейности системы (2.28), а также не использовались свойства функции V и W как квадратичных форм по отношению к компонентам вектора x. Строго говоря, оценки (3.29) были получены на основе использования (3.30) и (3.31).

Укажем теперь $\varepsilon_0 > 0$ такое, что функция $W + W_1$ будет удовлетворять оценкам (3.31) при $\|x\| \leqslant \varepsilon_0$, $t \geqslant 0$, разумеется, с некоторыми другими константами.

Из свойства асимптотической устойчивости вытекает тогда существование $\delta_0 > 0$ такого, что все движения, начинающиеся $\|x_0\| \leqslant \delta_0$ при $t = t_0$, будут удовлетворять оценке $\|x(t, x_0, t_0)\| \leqslant \varepsilon_0$ при $t \geqslant t_0$.

Вдоль таких движений будут выполняться все неравенства (3.31). Следовательно, эти движения будут удовлетворять оценкам типа (3.29) во все время движения $t \geqslant t_0$, если только $\|x_0\| \leqslant \delta_0$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Рассмотрим управляемую систему*

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)u + G(x, u, t). \tag{3.40}$$

Если $\|G(x, u, t)\| \leqslant c(\varepsilon, t) \cdot [\|x\| + \|u\|]$ *при* $\|x\| < \varepsilon$, $\|u\| < \varepsilon$ *и* $c(\varepsilon, t) \to 0$ *равномерно по отношению к* $t \geqslant 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то при любом управлении* $u = u(t, x)$, *заданном при* $\|x\| \leqslant h_0$, $t \geqslant 0$ *и удовлетворяющем условию* $\|u\| < \gamma(\varepsilon, t)\|x\|$ *при* $\|x\| \leqslant \varepsilon$,

$\gamma(\varepsilon, t)\to 0$ *при* $\varepsilon\to 0$ *равномерно по отношению к* $t\geqslant 0$, *система* (3.40) *будет иметь асимптотически устойчивое положение равновесия* $x=0$. *При этом будет существовать некоторая окрестность, в которой все движения будут удовлетворять оценкам типа* (3.29).

Здесь предполагается, что функция $u(t, x)$ и компоненты векторной функции G вещественны и непрерывны по совокупности аргументов при $t\geqslant 0$, $\|x\|\leqslant h_0$, $\|u\|\leqslant h_0$.

Рассмотрим далее квазилинейную систему

$$\dot{x}=P(t)x+F(t)+\mu G(x, t), \qquad (3.41)$$

где $F(t)$ — вещественная векторная функция, заданная при $t\geqslant 0$, непрерывная и ограниченная. Векторную функцию $G(x, t)$ будем считать заданной при $t\geqslant 0$, $x\in E_n$, вещественной, непрерывной и непрерывно дифференцируемой по отношению к компонентам вектора x. При этом как векторная функция $G(x, t)$, так и ее частные производные по компонентам вектора x, ограничены в любой конечной области равномерно по отношению к $t\geqslant 0$.

Теорема 3.5. *Если решения системы* (3.28) *удовлетворяют оценкам* (3.29), *то для любого* $r_1>0$ *можно указать число* $r_2>r_1$ *и число* $\mu_0>0$ *такие, что любое решение системы* (3.41), *начинающееся в области* $\|x_0\|\leqslant r_1$, *будет ограниченным и оставаться в области* $\|x\|\leqslant r_1$ *при* $t\geqslant t_0$, *если только вещественный параметр* μ *в системе* (3.41) *удовлетворяет неравенству* $|\mu|\leqslant\mu_0$. *Каждое из упомянутых решений будет асимптотически устойчивым, и, кроме того, если* $x=x(t, x_0, t_0)$ *взято в качестве невозмущенного движения, а* $\bar{x}=x(t, \bar{x}_0, t_0)$ — *в качестве возмущенного движения, то функция* $z=x-\bar{x}$ *будет удовлетворять оценкам типа* (3.29) *при любом выборе* x_0 *и* $\bar{x}_0$ *из условия* $\|x_0\|\leqslant r_1$, $\|\bar{x}_0\|\leqslant r_1$. *В оценках* (3.29) *следует заменить* x *на* z, x_0 *на* $z_0=x_0-\bar{x}_0$.

Доказательство. Из (3.29) вытекает существование двух квадратичных форм V и W, удовлетворяющих оценкам (3.31′).

Предположим, что число $r_1>0$ задано. Найдем полную производную V в силу (3.41). Тогда будем иметь

$$dV/dt=W+(\operatorname{grad}V, F)+\mu(\operatorname{grad}V, G).$$

Выберем $\bar{r}>r_1$ так, чтобы было $W+(\operatorname{grad}V, F)<0$ при $\|x\|\geqslant\bar{r}$, $t\geqslant 0$.

Такое $\bar{r}$ существует в силу (3.31) и ограниченности функции F. Положим $m=\max V$ при $\|x\|=\bar{r}$, $t\geqslant 0$. В качестве $r_2>\bar{r}$ выберем такое число, чтобы было $V>m$ при $\|x\|=r_2$, $t\geqslant 0$. Выберем далее число $\mu_1>0$ так, чтобы при $t\geqslant 0$, $\bar{r}\leqslant\|x\|\leqslant r_2$ было $W+(\operatorname{grad}V, F)+\mu(\operatorname{grad}V, G)<0$ при $|\mu|\leqslant$

г. Покажем теперь, что любое решение, начинающееся при $t = t_0$ в области $\|x_0\| \leqslant r_1$, будет оставаться в области $\|x\| \leqslant r_2$ при $t \geqslant t_0$.

Действительно, если это движение пересечет поверхность $\|x\| = \bar{r}$, то, начиная с момента пересечения, будет $dV/dt < 0$. Это неравенство будет сохраняться до тех пор, пока движение будет располагаться в области $\bar{r} \leqslant \|x\| \leqslant r_2$. При этом должно также быть $V \leqslant m$. Если предположить, что в какой-либо момент движение достигнет поверхности, то в этот момент будет необходимо выполняться противоположное неравенство $V > m$; следовательно, из этого противоречия вытекает, что имеет место лишь одна возможность: движение будет оставаться в области $\|x\| < r_2$ при $t \geqslant t_0$.

Возьмем теперь какие-либо две начальные точки x_0 и $\bar{x}_0$ из области $\|x\| \leqslant r_1$ и построим соответствующее им движение

$$x = x(t, x_0, t_0) \quad \text{и} \quad \bar{x} = x(t, \bar{x}_0, t_0).$$

Тогда функция $z = x - \bar{x}$ будет удовлетворять системе уравнений

$$\dot{z} = Pz + \mu\left\{\frac{\partial G}{\partial x}\right\} \cdot z. \tag{3.42}$$

Система (3.42) получена из системы (3.41) после подстановки в нее решений x и $\bar{x}$ и почленного вычитания. При этом матрица $\left\{\frac{\partial G}{\partial x}\right\}$ получается в результате применения формулы конечных приращений к разности

$$G(x, t) - G(\bar{x}, t),$$

и, следовательно, элементы этой матрицы будут ограничены при $t \geqslant t_0$ равномерно для всех x_0, $\bar{x}_0$, так как по доказанному выше соответствующие решения x и $\bar{x}$ будут оставаться в области $\|x\| \leqslant r_2$.

Найдем полную производную функции $V(z, t)$ в силу (3.42). Тогда получим

$$\frac{dV}{dt} = W(z, t) + \mu\left(\operatorname{grad} V, \left\{\frac{\partial G}{\partial x}\right\} z\right). \tag{3.43}$$

Из вида (3.43) вытекает, что существует $\mu_2 > 0$ такое, что при $|\mu| < \mu_2$ правая часть будет удовлетворять оценкам типа (3.31), в которых следует x заменить на z. Из этих оценок и оценок, существующих для функции V, будет вытекать тогда, что векторная функция z будет удовлетворять оценкам типа (3.29), если в них x заменить на z, что и требовалось доказать.

Следствие. *Рассмотрим управляемую систему*

$$\dot{\mathbf{x}} = P(t)\mathbf{x} + Q(t)\mathbf{u} + \mathbf{F}(t) + \mu\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \tag{3.44}$$

Пусть U — семейство управлений, заданных при $t \geqslant 0$, непрерывных и ограниченных в совокупности.

Будем считать, что элементы матриц P, Q, $\mathbf{F}$ заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, непрерывны и ограничены. Если $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ задана при $\mathbf{x} \in E_n$, $\mathbf{u} \in E_r$, $t \geqslant 0$, вещественна, непрерывна по всем своим аргументам и непрерывно дифференцируема по компонентам вектора $\mathbf{x}$, а также если упомянутые частные производные ограничены вместе с $\mathbf{G}$ равномерно по отношению к $t \geqslant 0$ во всякой конечной области изменения $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$, то при любом выборе $r_1 > 0$ можно указать $\mu_0 > 0$ и $r_2 > r_1$ такие, что область достижимости для любых решений, начинающихся в области $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant r_1$ при $t = t_0$, будет располагаться при любом $t \geqslant t_0$ в области $\|\mathbf{x}\| \leqslant r_2$. При этом любое программное движение, начинающееся в области $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant r_1$, $t = t_0$, будет асимптотически устойчивым.

Действительно, обозначим через $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u})$ решение системы (3.44), начинающееся в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ при $t = t_0$ и соответствующее выбранному управлению $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \in U$.

Совокупность всех векторов $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in U$ в момент t образует в фазовом пространстве некоторое множество, которое называют обычно множеством достижимости.

Найдем полную производную функции V в силу системы (3.44). Тогда будем иметь

$$\frac{dV}{dt} = W + (\operatorname{grad} V, Q\mathbf{u}) + (\operatorname{grad} V, \mathbf{F}) + \mu(\operatorname{grad} V, \mathbf{G}).$$

Выберем $\bar{r}$ теперь так, чтобы было $W + (\operatorname{grad} V, Q\mathbf{u}) + (\operatorname{grad} V, \mathbf{F}) < 0$ при $\|\mathbf{x}\| \geqslant \bar{r}$, $t \geqslant 0$ и $\mathbf{u} \in U$. Далее выбираем r_1 и r_2, как в доказательстве предыдущей теоремы. Легко видеть, что существует $\mu_1 > 0$ такое, что $dV/dt < 0$ при $r_1 \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant r_2$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{u} \in U$, если только $|\mu| \leqslant \mu_1$.

Из этих неравенств устанавливаем с помощью таких же рассуждений, как и при доказательстве предыдущей теоремы, что область достижимости будет располагаться в $\|\mathbf{x}\| < r_2$ при $t \geqslant t_0$, так как таким свойством будет обладать любое программное движение.

Матрица $\{\partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{x}\}$ в данном случае будет зависеть также и от управления. Однако по-прежнему можно выбрать $\mu_2 > 0$ так, чтобы при $|\mu| \leqslant \mu_2$ было возможно оценить $W(\mathbf{z}) + \mu(\operatorname{grad} V, \{\partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{x}\}\mathbf{z})$ так же, как это было сделано в предыдущей теореме. Из этого будет следовать асимптотическая устойчивость любого

программного движения $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u})$ и справедливость оценок (3.29) для векторной функции $\mathbf{z}=\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u})-\mathbf{x}(t, \bar{\mathbf{x}}_0, t_0, \mathbf{u})$ при любом выборе $\mathbf{x}_0$ и $\bar{\mathbf{x}}_0$ из области $\|\mathbf{x}\| \leqslant r_1$ и любом выборе управления $\mathbf{u} \in U$.

§ 4. Область асимптотической устойчивости

1°. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt}=f_s(x_1, \ldots, x_n), \quad s=1, 2, \ldots, n, \tag{4.1}$$

правые части которой определены, вещественны и непрерывны при $-\infty < x < +\infty$. Кроме того, пусть функции $f_s(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяют условию Липшица по переменным $x_1, \ldots, x_n$ в любой конечной области G пространства E_n, т. е. для любых $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, x_1, \ldots, x_n$ в области G

$$|f_s(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)-f_s(x_1, \ldots, x_n)| < L_G\left(\sum_{i=1}^{n}|\bar{x}_i-x_i|\right),$$

где L_G — постоянная, не зависящая от $x_1, \ldots, x_n$ и определяемая областью G. Пусть начало координат является положением равновесия для системы (4.1), т. е.

$$f_s(0, \ldots, 0)=0, \quad s=1, 2, \ldots, n,$$

и пусть оно асимптотически устойчиво по Ляпунову. Обозначим решение системы (4.1) при начальных условиях $t=t_0$, $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ через $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$.

Определение 4.1. *Множество A всех точек $\mathbf{x}_0$, для которых*

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty$$

называется областью[1]) *асимптотической устойчивости (или областью напряжения).*

Определение 4.2. *Система называется асимптотически устойчивой в целом, если $A=E_n$.*

---

[1]) Под областью G вообще мы будем понимать непустое множество G точек, обладающее двумя свойствами: 1) каждая точка множества G есть внутренняя, т. е. принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью; 2) множество G связно, т. е. каждые две точки этого множества можно соединить ломаной, состоящей из конечного числа звеньев, которая целиком лежит внутри G.

Совокупность точек, которые являются предельными для точек области G, но не принадлежат этой области, называется границей области G.

Здесь нужно обратить внимание на фундаментальное различие между линейными и нелинейными системами; в линейных системах всегда бывает асимптотическая устойчивость в целом, тогда как в нелинейных системах она может не быть таковой (область A не совпадает со всем пространством).

Замечание. Рассмотрим линейную систему и некоторый класс допустимых характеристик нелинейности. Возникает задача (задача Лурье): указать необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости такой системы независимо от начального состояния системы и конкретного выбора допустимой характеристики нелинейности. В этом случае говорят, что гарантирована абсолютная устойчивость системы.

Таково различие между понятием асимптотической устойчивости в целом и абсолютной устойчивостью системы.

Легко показать, что множество A открыто и связно.

Теорема 4.1. *Для того чтобы наперед заданная инвариантная область A, содержащая точку $\mathbf{x}=0$, была областью асимптотической устойчивости положения равновесия системы* (4.1), *необходимо и достаточно, чтобы существовали две функции $V(\mathbf{x})$ и $W(\mathbf{x})$, обладающие следующими свойствами:*

1) *Функции $V(\mathbf{x})$, $W(\mathbf{x})$ заданы в A, вещественны и непрерывны;*

2) *функция $V(\mathbf{x})$ отрицательно определенная и $W(\mathbf{x})$ положительно определенная;*

3) *в области A выполнены неравенства*

$$-1 < V(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{при} \quad \forall \mathbf{x} \in A,\ \mathbf{x} \neq 0; \tag{4.2}$$

$$W(\mathbf{x}) \geqslant \varphi(\mathbf{x}) \sqrt{1+\sum_{s=1}^{n} f_s^2}, \tag{4.3}$$

где $\varphi(\mathbf{x})$ — некоторая положительно определенная функция такая, что

$$\varphi(\mathbf{x}) > \alpha > 0 \quad \textit{при} \quad \|\mathbf{x}\| > \beta > 0; \tag{4.4}$$

4) *вдоль интегральных кривых системы* (4.1) *функция $V(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема и*

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = W(1+V) \tag{4.5}$$

в силу системы (4.1).

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда, так как функция $V(\mathbf{x})$ отрицательно определенная (условие 2)) и ее полная производная в силу системы (4.1) является положительно определенной функцией (условие 4)), будет выполнено условие асимптотической устойчивости положения равновесия $\mathbf{x}=0$. Следовательно, по любому $\varepsilon > 0$ можно

указать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\|x_0\| < \delta$ будет

1) $$\|x(t, x_0)\| < \varepsilon,$$

2) $$\lim_{t \to +\infty} \|x(t, x_0)\| = 0, \tag{4.6}$$

где $x(t, x_0)$ — решение системы (4.1) с начальным условием $x(t_0, x_0) = x_0$.

Покажем теперь, что любая интегральная кривая, начинающаяся в области A ($x_0 \in A$), обладает свойством

$$\|x(t, x_0)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Сделаем в системе (4.1) замену

$$ds = dt \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2}. \tag{4.7}$$

Тогда получим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{f_i(x_1, \ldots, x_n)}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_1, \ldots, x_n)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.8}$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{1} f_i^2}},$$

причем правые части системы являются непрерывными функциями вектора x и ограниченными, так как

$$\left\| \frac{f(x)}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} f_i(x)}} \right\| \leqslant \frac{\|f(x)\|}{\sqrt{1 + \|f(x)\|^2}} < 1. \tag{4.8*}$$

Это обеспечивает существование решения на всей оси $-\infty < s < +\infty$.

Покажем, например, что интегральная кривая $x = x(s, x_0)$ системы (4.8) определена при всех $s > 0$. Действительно, возможны два случая: либо эта интегральная кривая ограничена при $s > 0$, либо не ограничена при $s \geqslant 0$. В первом случае последовательное применение теоремы существования показывает, что интегральная кривая определена при всех $s > 0$. Во втором случае предположим напротив, что интегральная кривая определена лишь при

$s \leqslant s^* < +\infty$. Тогда, как следует из равенства

$$x_i = x_i^{(0)} + \int_0^s \frac{f_i(x_1, \ldots, x_n)}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2(x_1, \ldots, x_n)}} ds$$

и (4.8*), получим оценку

$$|x_i(s, \mathrm{x}_0)| < |x_i^{(0)}| + s^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.9}$$

что противоречит предположению о неограниченности интегральной кривой.

Возьмем любую точку $\mathrm{x}_0 \in A$ и покажем, что

$$\|\mathrm{x}(s, \mathrm{x}_0)\| \to 0 \quad \text{при} \quad s \to +\infty,$$

т. е. по любому ε' (можно взять его меньше $\delta = \delta(\varepsilon)$) в (4.6)) существует $S(\varepsilon')$ такое, что для всех $s \geqslant S(\varepsilon')$ будет

$$\|\mathrm{x}(s, \mathrm{x}_0)\| < \varepsilon'.$$

Достаточно существования такого $\tilde{S}(\varepsilon')$, что $\|\mathrm{x}(\tilde{S}, \mathrm{x}_0)\| = \varepsilon'$. Тогда по имеющейся асимптотической устойчивости (4.6)

$$\|\mathrm{x}(s, \mathrm{x}_0)\| \to 0 \quad \text{при} \quad s \to +\infty.$$

Ясно, что для любой точки $\mathrm{x}_0 \in A$ возможно: либо существует такое $\tilde{S}(\varepsilon')$, либо не существует. В последнем случае для всех $s > 0$ будет $\|\mathrm{x}(s, \mathrm{x}_0)\| > \varepsilon'$.

В этом случае в качестве функции Ляпунова возьмем

$$\overline{V} = \ln(1 + V), \tag{4.10}$$

которая будет отрицательно определенной, а полная производная в силу системы (4.8)

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{1}{1+V}\frac{dV}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{1+V} W(1+V) \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2}} \geqslant \varphi(x) \geqslant \alpha(\varepsilon') > 0 \tag{4.11}$$

по условию (4.3). Отсюда

$$\overline{V} \geqslant V_0 + s \cdot \alpha(\varepsilon'). \tag{4.12}$$

Таким образом, функция $\overline{V}$ будет сколь угодно большой при $s \to +\infty$, что невозможно ($\overline{V}$ отрицательна). Полученное противоречие показывает: обязательно существует $\tilde{S}(\varepsilon')$, что и доказывает наше утверждение.

Определение 4.3. *Множество M точек $\mathbf{x}=\{x_1, \ldots, x_n\}$ фазового пространства системы* (4.8) *называется инвариантным, если из условия $\mathbf{x}_0 \in M$ следует, что $\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0) \in M$ при $s \in (-\infty, +\infty)$.*

Замечание. При доказательстве достаточности условий теоремы используется факт инвариантности области притяжения A. Согласно условию 3) настоящей теоремы, соотношения (4.10)—(4.12) справедливы разве лишь в области A, т. е. когда $\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0) \in A$, для всех $s>0$, где $\mathbf{x}_0 \in A$. Последнее справедливо в силу определения 4.1 и единственности решения системы (4.1).

Необходимость. Пусть A является областью асимптотической устойчивости, что означает: 1) любая интегральная кривая $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ системы (4.1), начинающаяся в области A, при любом t принадлежит области A; 2) имеет место устойчивость решения $\mathbf{x}\equiv 0$ и

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x}_0 \in A. \tag{4.13}$$

Построим функции V и W, удовлетворяющие условиям теоремы. Мы будем рассматривать систему (4.8), решение которой определено при всех $s \in (-\infty, +\infty)$. Однако геометрически интегральные кривые систем (4.1) и (4.8) будут совпадать.

Изложим сначала программу действий.

1. Покажем, что из асимптотической устойчивости, равномерной относительно $s_0\,[t_0]$ (правые части систем (4.8) и (4.1) не зависят явным образом от $s\,[t]$), следует существование непрерывной функции $L(s)$, заданной при $s>-\infty$, строго монотонно убывающей от $+\infty$ до 0 при $s\to+\infty$ и такой, что

$$\|\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0)\| \leqslant L(s) \quad \text{при} \quad s>0 \quad \text{и} \quad \|\mathbf{x}_0\| \leqslant \delta. \tag{4.14}$$

2. Выберем функцию

$$\bar{\varphi}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0)\|\, e^{-L^{-1}(\|\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0)\|)}, \tag{4.15}$$

где $L^{-1}(\xi)$ — функция, обратная к L.

3. Положим

$$\bar{V}(\mathbf{x}_0) = -\int_0^{-\infty} \bar{\varphi}\, ds, \tag{4.16}$$

причем требуемые в теореме функции V и W выражаются через $\bar{\varphi}$ и $\bar{V}$ следующим образом:

$$\bar{\varphi} = \frac{W}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n} f_i^2}}, \qquad \bar{V} = \ln(1+V). \tag{4.17}$$

Во исполнение этого плана возьмем $\varepsilon>0$. Согласно определению равномерной асимптотической устойчивости, найдем $\delta(\varepsilon)>0$

такое, что при $\|x_0\| < \delta$:

1) $\|x(s, x_0)\| < \varepsilon$ при всех $s > 0$,

2) $\|x(s, x_0)\| \to 0$ при $s \to +\infty$.

Положим

$$\overline{L}(s) = \sup_{\|x_0\| < \delta} \|x(s, x_0)\|.$$

Ясно, что функция $\overline{L}(s)$ задана при $s > 0$ и обладает свойствами:

1) $0 \leqslant \overline{L}(s) < \varepsilon$ при $s > 0$,

2) $\overline{L}(s) \to 0$ при $s \to +\infty$.

Выберем теперь строго монотонную функцию $L(\tau)$, заданную и непрерывную при $-\infty < \tau < +\infty$, строго монотонно убывающую от $+\infty$ до 0 при возрастающем τ от $-\infty$ до $+\infty$ и такую, что

$$L(s) \geqslant \overline{L}(s).$$

Легко видеть, что построенная таким образом функция удовлетворяет всем требованиям пункта 1 нашего плана. Функция $\overline{\varphi}$ положительно определенна, так что W в силу соотношений (4.15), (4.17) удовлетворяет условиям 1)—3) теоремы.

Покажем теперь, что интеграл в (4.16) сходится при $x_0 \in A$. Если $x_0 \in A$, то можно указать величину $S(x_0)$ такую, что

$$\|x(s, x_0)\| < \delta \quad \text{при} \quad s > S(x_0).$$

Разобьем интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \overline{\varphi}\, ds$ на два:

$$\int\limits_0^{+\infty} \overline{\varphi}\, ds = \int\limits_0^{S(x_0)} \overline{\varphi}\, ds + \int\limits_{S(x_0)}^{+\infty} \overline{\varphi}\, ds. \tag{4.18}$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной интегрирования $s = s' + S$, получим

$$\int\limits_{S(x_0)}^{+\infty} \overline{\varphi}\, ds = \int\limits_0^{+\infty} \|x(s'+S, x_0)\| e^{-L^{-1}(\|x(s+S,\, x_0)\|)} ds' =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \|x(s', \overline{x}_0)\| e^{-L^{-1}(\|x(s',\, \overline{x}_0)\|)} ds', \tag{4.19}$$

где $\overline{x}_0 = x(S(x_0), x_0)$, $\|\overline{x}_0\| < \delta$ в силу выбора $S(x_0)$, а тогда $\|x(s', \overline{x}_0)\| < \varepsilon$ для всех $s' > 0$. К тому же имеем неравенство (4.14)

$$\|x(s, \overline{x}_0)\| < L(s) \quad \text{при} \quad s > 0 \quad \text{и} \quad \|\overline{x}_0\| < \delta,$$

откуда путем применения обратной функции к неравенству (4.14) получим

$$s < L^{-1}(\|x(s, x_0)\|). \tag{4.20}$$

Легко получить из (4.20)

$$\|x(s, \bar{x}_0)\| e^{-s} > \|x(s, \bar{x}_0)\| e^{-L^{-1}(\|x(s, \bar{x}_0)\|)}. \tag{4.21}$$

Применяя (4.21) к оценке интеграла (4.19), получим

$$\int_{S(x_0)}^{+\infty} \bar{\varphi}\, ds < \varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-s'} ds' < \varepsilon.$$

Таким образом, сходимость (4.18) доказана. Ясно, что из непрерывности $\bar{V}(x_0)$ следует непрерывность $V(x)$.

Покажем непрерывность $\bar{V}(x_0)$ при $x_0 \in A$:

$$|\bar{V}(x_0^{(1)}) - \bar{V}(x_0^{(2)})| = \left| \int_0^{+\infty} (\bar{\varphi}(\|x(s, x_0^{(1)})\|) - \bar{\varphi}(\|x(s, x_0^{(2)})\|))\, ds \right|. \tag{4.22}$$

Так как $x_0^{(1)}, x_0^{(2)} \in A$, то можно указать величину $s > 0$ такую, что

$$\int_S^{+\infty} \bar{\varphi}(\|x(s, x_0^{(1)})\|)\, ds < \frac{1}{3}\varepsilon_1 \quad \text{и} \quad \int_S^{+\infty} \bar{\varphi}(\|x(s, x_0^{(2)})\|)\, ds < \frac{1}{3}\varepsilon_1,$$

где ε_1 — некоторая положительная константа. В силу интегральной непрерывности по числу $S > 0$ и $r_2 > 0$ можно выбрать $r_1 = r_1(S, r_2)$ такое, что при $\|x_0^{(1)} - x_0^{(2)}\| < r_1$ будет

$$\|x(s, x_0^{(1)}) - x(s, x_0^{(2)})\| < r_2 \quad \text{при всех } s \in [0, S].$$

Далее, r_2 можно взять столь малым, чтобы

$$|\bar{\varphi}(\|x(s, x_0^{(1)})\|) - \bar{\varphi}(\|x(s, x_0^{(2)})\|)| < \frac{1}{3} \cdot \frac{\varepsilon_1}{s} \quad \text{при} \quad s \in [0, S],$$

а тогда из (4.22) получим

$$|\bar{V}(x_0^{(1)}) - \bar{V}(x_0^{(2)})| < \varepsilon_1 \quad \text{при} \quad \|x_0^{(1)} - x_0^{(2)}\| < r_1. \tag{4.23}$$

Таким образом, по $\varepsilon_1 > 0$ указано $r_1 > 0$ такое, что имеет место (4.23), а это означает, что функция $\bar{V}(x)$ непрерывна в A (в силу произвольности выбора точки, например, $x_0^{(1)}$).

Покажем, что функция $\bar{V}(x)$ отрицательно определенная. Рассмотрим функцию

$$\bar{l}(s) = \inf_{\substack{\tau \in [0, s] \\ \|x_0\| = \delta}} \|x(\tau, x_0)\|. \tag{4.24}$$

Легко видеть, что inf достигается и функция $\bar{l}(s)$ обладает свойствами:

1) $\bar{l}(s)$ не возрастает с ростом s;

2) $\bar{l}(s)\to 0$ при $s\to+\infty$; кроме того, $\bar{l}(s)$ в нуль не обращается.

Пусть это не так, т. е. существует $\bar{s}$ такое, что $\bar{l}(\bar{s})=0$. Тогда существует такие $\bar{x}_0$ и $\bar{\tau}$, что $\|x(\bar{x}_0, \bar{\tau})\|=0$, или $x(\bar{x}_0, \bar{\tau})=0$. Последнее невозможно в силу единственности решения. Полученное противоречие показывает, что $\bar{l}(s)\neq 0$ для всех $s>0$;

3) $$\|x(s, x_0)\|\geqslant \bar{l}(s) \quad \text{при} \quad \|x_0\|=\delta. \tag{4.25}$$

Можно взять непрерывную функцию $l(s)\leqslant \bar{l}(s)$. Возьмем теперь любое $x_0\in A$. Существует S такое, что $\|x(S, x_0)\|=\|\bar{x}_0\|=\delta_1$. Тогда имеем

$$\bar{V}(x_0)=-\int_0^S \bar{\varphi}\,ds-\int_S^{+\infty}\bar{\varphi}\,ds.$$

После замены переменной интегрирования в последнем интеграле $s=S+s'$ получим

$$\bar{V}(x_0)=-\int_0^S \bar{\varphi}\,ds'-\int_0^{+\infty}\bar{\varphi}(\|x(s', x_0)\|\,ds'=-\int_0^S \bar{\varphi}\,ds'+V(\bar{x}_0). \tag{4.26}$$

Так как $\|x(s', x_0)\|>\delta_1$ при $s'\in[0, S]$, то существует такое α_1, что $\bar{\varphi}(x)>\alpha_1$, а тогда

$$\int_0^S \bar{\varphi}\,ds'>S\alpha_1. \tag{4.27}$$

Рассмотрим $\bar{V}(\bar{x}_0)$ при $\|\bar{x}_0\|=\delta$. Обозначим $\int_0^{+\infty}\bar{\varphi}(l(s))ds=h$. С учетом неравенства (4.25) легко показать, что

$$\bar{V}(\bar{x}_0)<-h. \tag{4.28}$$

Из соотношений (4.26)—(4.28) имеем

$$\bar{V}(x_0)<-(S\alpha_1+h). \tag{4.29}$$

Покажем, что $\bar{V}(x_0^{(k)})\to 0$ при $\|x_0^{(k)}\|\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$. Можно взять $\|x_0^{(k)}\|<\delta$, $k=1, 2, \ldots$, и из полученной оценки интеграла (4.19) следует требуемое.

Таким образом, $\bar{V}(x)$ принимает в области A отрицательные значения, и лишь при $x=0$ $\bar{V}(x)=0$.

Покажем далее, что $\lim\limits_{k\to+\infty} \bar{V}(x_0^{(k)}) = -\infty$, если только $\lim\limits_{k\to+\infty} x_0^{(k)} \to x_0^*$, где $x_0^{(k)} \in A$, $x_0^* \in A \setminus \bar{A}$ ($\bar{A}$ — замыкание множества A).

Пусть в моменты S_k интегральная кривая $x(s, x_0^{(k)})$ попадает на поверхность сферы $\|x\| = \delta_1 < \delta$. Последовательность $\{S_k\}$ при этом стремится к $+\infty$. Покажем это. Пусть S_k не $\to +\infty$. Тогда можно выделить ограниченную подпоследовательность. Обозначим ее $\{S_{k_j}\}$. В силу интегральной непрерывности по $\bar{s}$ и h_1 можно выбрать $h_2 > 0$ такое, что $\|x(s, x_0^{(k)}) - x(s, x_0^*)\| < h_1$ для всех $s \in [0, \bar{s}]$ при $\|x_0^{(k)} - x_0^*\| < h_2$. Далее h_1 можно взять столь малым, чтобы $\|x(s, x_0^*)\| < \delta$. Этим самым $x_0^* \in A$ вопреки предположению. Следовательно, $S_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$.

Рассмотрим $V(x_0^{(k)})$. Проводя оценки (4.26)—(4.29) (всюду s' и x_0 следует заменить на S_k и $x_0^{(k)}$), получим

$$\bar{V}(x_0) < -(S_k \alpha_1 + h),$$

что и доказывает свойство 3) функции $V(x)$.

Наконец, определим $d\bar{V}/ds$. Для этого возьмем интегральную кривую $x(s, x_0)$ и фиксируем момент s. Тогда

$$V(x(s, x_0)) = -\int_0^{+\infty} \bar{\varphi}(\|x(s', x(s, x_0))\|)\,ds' \tag{4.30}$$

и

$$\bar{V}(x(s + \Delta s, x^0)) = -\int_0^{+\infty} \bar{\varphi}(\|x(s', x(s + \Delta s, x_0))\|)\,ds'. \tag{4.31}$$

Вычитая почленно (4.30) из (4.31) и деля обе части на Δs, получим

$$\frac{\Delta \bar{V}}{\Delta s} = \frac{1}{\Delta s} \int_s^{s+\Delta s} \bar{\varphi}(\|x(\eta, x_0)\|)\,d\eta, \tag{4.32}$$

где $\Delta \bar{V}$ означает приращение функции $\bar{V}$ вдоль интегральной кривой. Устремляя Δs к 0, получим $d\bar{V}/ds = \bar{\varphi}$ вдоль интегральной кривой. Этим теорема доказана полностью.

Следствие 1. *При помощи функции $V(x)$, о которой идет речь в теореме, можно всегда принципиально решить задачу отыскания границы области асимптотической устойчивости. Если последовательность точек $x_0^{(k)}$ стремится к граничной точке, то, как следует из доказательства необходимости, в этом случае имеем*

$$V(x_0^{(k)}) \to -1 \quad \textit{при} \quad k \to +\infty.$$

Уравнение границы области A будет

$$V(\mathbf{x}) = -1. \qquad (4.33)$$

Граница области A состоит из целых траекторий и представляет собой инвариантное множество. Это следует из того, что

$$dV/dt = W(1+V) = 0 \quad \text{при} \quad V = -1.$$

Следствие 2. *Если $V(\mathbf{x}) \to -1$ при $\|\mathbf{x}\| \to +\infty$ и выполнены все условия теоремы, то имеет место асимптотическая устойчивость в целом.*

Нужно отметить, что впервые необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в целом были даны Барбашиным и Красовским.

2°. В некоторых задачах теории автоматического регулирования, особенно в теории электрических систем, возникает следующий вопрос.

Пусть $\mathbf{x} = 0$ есть установившееся состояние исследуемой системы. Известно, что параметры системы можно выбрать так, чтобы это установившееся состояние было асимптотически устойчивым. Необходимо определить множество начальных возмущений $\mathbf{x}_0$, при которых рассматриваемая система возвращается в заданную окрестность установившегося состояния. Можно также рассматривать вопрос выбора параметров регулирования системы так, чтобы это множество начальных отклонений было в некотором смысле наибольшим.

Предположим, что переходные процессы рассматриваемой системы можно описать при помощи системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i + X_s, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \qquad (4.34)$$

где X_s — функции, разлагающиеся в сходящиеся ряды в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ и не содержащие членов ниже второго порядка относительно $\mathbf{x}$.

Далее, пусть вещественные части корней характеристического уравнения $\det(A - \lambda E)$ отрицательны. Построим для этой системы уравнений функции, о которых идет речь в теореме, чтобы с их помощью построить область асимптотической устойчивости нулевого решения (4.34) или же аппроксимировать эту область изнутри некоторыми вложенными областями. Для этого рассмотрим уравнение в частных производных

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i + X_s\right) = W(\mathbf{x})(1+V). \qquad (4.35)$$

Будем искать решение $V(\mathbf{x})$ в виде ряда

$$V(\mathbf{x}) = V_2(\mathbf{x}) + V_3(\mathbf{x}) + \ldots + V_m(\mathbf{x}) + \ldots \qquad (4.36)$$

где $V_m(\mathbf{x})$ — однородная форма m-й степени относительно $x_1, \ldots, x_n$.

Подставляя (4.36) в (4.35), получим для определения форм $V_m(\mathbf{x})$ систему уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial V_2}{\partial x_s}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{sl}x_l\right) = W_2(\mathbf{x}), \\ &\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial V_m}{\partial x_s}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{sl}x_l\right) = R_m(\mathbf{x}), \quad m = 3,\ 4,\ \ldots, \end{aligned} \qquad (4.37)$$

где R_m является известной формой m-й степени, если найдены формы $V_2, \ldots, V_{m-1}$. При этом в качестве $W(\mathbf{x})$ можно взять любую голоморфную положительную функцию, наименьшие члены в разложении которой по целым положительным степеням величин $x_1, \ldots, x_n$ образуют квадратичную положительно определенную форму.

Из системы (4.37) последовательно найдем формы V_2, V_3, ... Отыскание этих форм осуществляется следующим образом. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую системе (4.37):

$$d\mathbf{x}/dt = A\mathbf{x}, \quad dV_m/dt = R_m, \quad m = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \qquad (4.38)$$

По теореме 3.3 существует отрицательно определенная квадратичная форма V_2, которую можно представить в виде

$$V_2 = -\int_t^{+\infty} W_2(\mathbf{x})\, d\tau.$$

Последовательно определим

$$V_m = -\int_t^{+\infty} R_m\, d\tau, \quad m = 3,\ 4,\ \ldots$$

Ряд (4.36) формально можно построить, и сходимость его в достаточно малой окрестности начала координат следует из вспомогательной теоремы Ляпунова. Отметим, что выбор функции $W(\mathbf{x})$ в уравнении (4.35) влияет на область сходимости этого ряда. Например, для системы $\dot{x}_l = -x_l$ уравнение (4.35) примет вид

$$-\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_l} x_l = W(1 + V).$$

При $W = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ оно имеет решение

$$V(\mathbf{x}) = e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2} - 1,$$

а при

$$W(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{-3/2}$$

— решение в виде

$$V(\mathbf{x}) = e^{\left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{-1/2}} - 1.$$

Если искать в этом примере $V(\mathbf{x})$ в виде ряда, то областью сходимости его в первом случае будет все пространство, тогда как во втором — лишь его ограниченная часть.

Теперь построим область, целиком погруженную в A. Для этого рассмотрим семейство поверхностей

$$V_2(\mathbf{x}) = -\mu, \tag{4.39}$$

где $\mu \in (0, +\infty)$, $\mu = \text{const}$. Если поверхность является границей области A, то найдется такое значение $\mu = \mu^*$, что $V_2(\mathbf{x}) = -\mu^*$ касается поверхности σ в некоторой точке $\bar{\mathbf{x}}$.

Действительно, так как семейство (4.39) заполняет все пространство, то существует такое значение μ, при котором $V_2 = -\mu$ пересекает поверхность σ.

Обозначим через $(-\mu^*)$ наибольшее значение $V_2(\mathbf{x})$ на куске поверхности σ, заключенной внутри $V_2 = -\mu$. Тогда $V_2(\mathbf{x}) = -\mu^*$ будет касаться σ. Поверхность σ задается уравнением $1 + V(\mathbf{x}) = 0$. Тогда в точке касания $\bar{\mathbf{x}}$ имеем $(\operatorname{grad} V(\bar{\mathbf{x}}))(A\mathbf{x} + X) = 0$, откуда $(\operatorname{grad} V(\bar{\mathbf{x}})) = (\operatorname{grad} V_2)$, $(\operatorname{grad} V_2)^*(A\mathbf{x} + X) = 0$.

Рассмотрим $V_2(\mathbf{x})$ как функцию Ляпунова для системы (4.34). Найдем dV_2/dt в силу этой системы

$$dV_2/dt = (\operatorname{grad} V_2, (A\mathbf{x} + X)) = W(\mathbf{x}).$$

Положим $W_0 = \{\mathbf{x} : W(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \neq 0\}$ (W_0 не пусто, например, $\bar{\mathbf{x}} \in W_0$). Найдем наибольшее значение функции $V_2(\mathbf{x})$ на множестве W_0 и обозначим его через $(-\mu_0)$. Очевидно, что поверхность $V_2(\mathbf{x}) = \mu_0$ целиком содержится в области A. Аналогично с успехом можно использовать семейство поверхностей

$$V^N(\mathbf{x}) = \sum_{i=2}^{N} V_i(\mathbf{x}) = -\mu^{(N)}$$

и найти такое $\mu_0^{(N)}$, что поверхность $V^N = -\mu_0^{(N)}$ будет целиком содержаться в области A. В связи с этим возникают вопросы разработки удобных методов построения границы области A (изнутри или снаружи) для инженерных задач.

§ 5. Стабилизация программного движения

1°. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{5.1}$$

где $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор, $\mathbf{u}$ — r-мерный вектор, $\mathbf{F}$ — n-мерная вектор-функция.

Система (5.1) описывает движение некоторого управляемого объекта, причем величины $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ являются фазовыми координатами этого объекта, а $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = \{u_1, \ldots, u_r\}$ — его управляющими органами, или законом отклонения рулей. Будем называть $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ *управлением*.

Рассмотрим некоторое управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}_p(t)$. Пусть известны начальные данные $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Тогда система дифференциальных уравнений (5.1) при довольно широких допущениях относительно функций $\mathbf{F}$ (теорема Каратеодори) имеет единственное решение:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}_p). \tag{5.2}$$

Это движение может быть построено из различных соображений, в частности программные управления $\mathbf{u}_p(t)$ и программная траектория $\mathbf{x}_p(t)$ могут быть оптимальными в том или ином смысле.

В настоящем параграфе ставится задача отыскания такого закона управления объектом, при котором программное движение оказывается устойчивым, или, скажем, стабильным (в каком смысле — будет оговорено ниже).

Здесь займемся вопросом устойчивости, точнее, асимптотической устойчивости программного движения по Ляпунову.

Сделаем в системе (5.1) замену искомых функций и управляющих величин по формулам

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{y}, \qquad \mathbf{u} = \mathbf{u}_p(t) + \mathbf{v}.$$

Тогда система (5.1) примет вид

$$d\mathbf{y}/dt = \mathbf{G}(t, \mathbf{y}, \mathbf{v}), \tag{5.3}$$

где

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{y}, \mathbf{v}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_p + \mathbf{y}, \mathbf{u}_p + \mathbf{v}) - \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p). \tag{5.4}$$

причем $\mathbf{G}(t, 0, 0) \equiv 0$. Из (5.4) вытекает, что при управлении $\mathbf{v} = 0$ система (5.3) имеет движение $\mathbf{y} = 0$.

Здесь нас могут интересовать следующие вопросы:

1) Существуют ли управления $(v_1, \ldots, v_r)$, при которых положение равновесия $\mathbf{y}=0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову?

2) Пусть существуют такие $(v_1, \ldots, v_r)$. Как их построить?

3) Пусть можно построить такие $(v_1, \ldots, v_r)$ и не единственным образом. Как из множества управлений $(v_1, \ldots, v_r)$ выбрать оптимальное в том или ином смысле?

Выделим в системе (5.3) члены, линейные относительно $\mathbf{y}$ и $\mathbf{v}$. Тогда получим

$$d\mathbf{y}/dt = A(t)\mathbf{y} + B(t)\mathbf{v} + \mathbf{H}(t, \mathbf{y}, \mathbf{v}), \tag{5.5}$$

где будем считать, что $A(t)$, $B(t)$ — вещественные непрерывные матрицы, заданные при $t \geqslant 0$, с ограниченными элементами:

$$\|\mathbf{H}(t, \mathbf{y}, \mathbf{v})\| \leqslant L(\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{v}\|)^{1+\alpha}, \tag{5.6}$$

причем $\alpha = \mathrm{const} > 0$, $L = \mathrm{const}$.

Предположим, что при управлении

$$\mathbf{v} = C(t)\mathbf{z} \tag{5.7}$$

нулевое решение системы

$$d\mathbf{z}/dt = A(t)\mathbf{z} + B(t)\mathbf{v} \tag{5.8}$$

асимптотически устойчиво по Ляпунову и любое решение ее удовлетворяет неравенствам

$$\|\mathbf{z}_0\| a_1 e^{-a_2(t-t_0)} \leqslant \|\mathbf{z}(t)\| \leqslant b_1 \|\mathbf{z}_0\| e^{-b_2(t-t_0)}. \tag{5.9}$$

Тогда (теорема 3.3) существуют две квадратичные формы $\overline{V}(\mathbf{z}, t)$ и $\overline{W}(\mathbf{z}, t)$ такие, что

$$c_1\|\mathbf{z}\|^2 \leqslant \overline{V}(\mathbf{z}, t) \leqslant c_2\|\mathbf{z}\|^2,$$
$$-d_1\|\mathbf{z}\|^2 \leqslant \overline{W}(\mathbf{z}, t) \leqslant -d_2\|\mathbf{z}\|^2,$$

где a_i, b_i, c_i, d_i $(i=1, 2)$ — положительные постоянные, и выполнено соотношение $d\overline{V}/dt = \overline{W}$ в силу системы (5.8) при $\mathbf{v} = C(t)\mathbf{z}$. Продифференцируем квадратичную форму $\overline{V}$ в силу системы (5.5). Тогда получим

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{W} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y_s} H_s.$$

Легко видеть, что

$$\left| \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y_s} H_s(t, \mathbf{y}, C(t)\mathbf{y}) \right| \leqslant h\|\mathbf{y}\|^{2+\alpha},$$

где $h = \mathrm{const} > 0$.

Таким образом,

$$d\overline{V}/dt = W_1 \tag{5.10}$$

в силу системы (5.5) при управлении

$$\mathbf{v} = C(t)\,\mathbf{y}, \tag{5.11}$$

причем W_1—отрицательно определенная функция при достаточно малой $\|\mathbf{y}\|$. Ввиду оценки (5.6)

$$W_1 \leqslant \|\mathbf{y}\|^2(-d_2 + h\|\mathbf{y}\|^\alpha). \tag{5.12}$$

Отсюда следует, что положение равновесия $\mathbf{y} = 0$ нелинейной системы (5.5) асимптотически устойчиво.

Итак, имеет место следующая

Теорема 5.1. *Если при управлении* (5.7) *решение* $\mathbf{z} = 0$ *системы* (5.8) *асимптотически устойчиво и выполнены неравенства* (5.9), *то решение* $\mathbf{y} = 0$ *системы* (5.5) *асимптотически устойчиво при управлении* (5.11) *и любое ее движение, начинающееся в достаточно малой окрестности точки* $\mathbf{y} = 0$, *удовлетворяет оценкам типа* (5.9).

Осталось показать, что для $\mathbf{y}(t)$ выполнены неравенства типа (5.9).

Легко видеть: существуют такие r_1, r_2, δ—положительные константы, что

$$-r_1\|\mathbf{y}\|^2 \leqslant W_1 \leqslant -r_2\|\mathbf{y}\|^2, \tag{5.13}$$

если только $\|\mathbf{y}\| < \delta$.

Аналогично, как и в теореме 3.3, получим требуемые неравенства.

2°. Рассмотрим теперь линейную систему

$$d\mathbf{y}/dt = A\mathbf{y} + \mathbf{b}u. \tag{5.14}$$

Предположим, что для простоты $r = 1$, т. е. имеется один управляющий орган, и пусть матрица A и вектор $\mathbf{b}$ постоянны.

Теорема 5.2. *Пусть векторы*

$$\mathbf{b},\ A\mathbf{b},\ A^2\mathbf{b},\ \ldots,\ A^{n-1}\mathbf{b} \tag{5.15}$$

линейно независимы.

В этом случае всегда можно построить управление вида

$$u = \mathbf{c}^*\mathbf{y}, \tag{5.16}$$

доставляющее системе (5.14) *любые наперед заданные собственные числа.*

Доказательство. Введем в рассмотрение матрицу

$$S = \{\mathbf{b},\ A\mathbf{b},\ A^2\mathbf{b},\ \ldots,\ A^{n-1}\mathbf{b}\},$$

которая является неособой в силу линейной независимости системы векторов (5.15). Сделаем в системе (5.14) замену искомых функций по формуле $\mathbf{y}=S\mathbf{x}$. Тогда для новой искомой векторной функции получим систему уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=S^{-1}AS\mathbf{x}+S^{-1}\mathbf{b}u. \tag{5.17}$$

Так как $S^{-1}S=E$, то

$$S^{-1}\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}.$$

Вектор $A^n\mathbf{b}$ может быть разложен по векторам $\mathbf{b}$, $A\mathbf{b}$, ..., $A^{n-1}\mathbf{b}$, как по базису, причем это разложение представимо в форме

$$A^n\mathbf{b}=-p_n\mathbf{b}-p_{n-1}A\mathbf{b}-\ldots-p_1A^{n-1}\mathbf{b}=-\sum_{s=1}^{n}p_sA^{n-s}\mathbf{b};$$

система (5.14) примет вид

$$\begin{aligned}&dx_1/dt=-p_nx_n+u,\\&dx_s/dt=x_{s-1}-p_{n-s+1}x_n,\quad s=2,\,3,\,\ldots,\,n.\end{aligned} \tag{5.18}$$

Положим $z=x_n$ и будем дифференцировать это равенство, определяя правую часть из системы (5.18). Тогда получим

$$dz/dt=dx_n/dt=x_{n-1}-p_1x_n=x_{n-1}-p_1z$$

или

$$dz/dt+p_1z=x_{n-1}.$$

Дифференцируя еще $n-1$ раз, для z будем иметь уравнение

$$z^{(n)}+p_1z^{(n-1)}+\ldots+p_nz=u. \tag{5.19}$$

Положим

$$u=\gamma_1z^{(n-1)}+\gamma_2z^{(n-2)}+\ldots+\gamma_nz. \tag{5.20}$$

Тогда

$$z^{(n)}+(p_1-\gamma_1)\,z^{(n-1)}+(p_2-\gamma_2)\,z^{(n-2)}+\ldots+(p_n-\gamma_n)\,z=0,$$

и каковы бы ни были числа λ_1, ..., λ_n (в случае комплексных будем считать, что есть и комплексно-сопряженные), всегда по формулам Виета можно записать зависимость коэффициентов

многочлена через его корни:

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= p_1 + \sum_{s=1}^{n} \lambda_s, \\
\gamma_2 &= p_2 - \sum_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n} \lambda_i \lambda_j, \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\gamma_n &= p_n - (-1)^n \lambda_1, \ldots, \lambda_n.
\end{aligned} \tag{5.21}
$$

Осталось показать, что $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ единственным образом определяют набор чисел $c_1, \ldots, c_n$ и, следовательно, $u = \mathbf{c}^*\mathbf{y}$.

Действительно, подставляя в (5.20) значение $z, \ldots, z^{(n-1)}$ через $x_1, \ldots, x_n$, выразим u как линейную форму $x_1, \ldots, x_n$:

$$
u = \sum_{s=1}^{n} \overline{\gamma}_s x_s, \tag{5.22}
$$

откуда, учитывая, что $\mathbf{x} = S^{-1}\mathbf{y}$, получим

$$
u = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i = \mathbf{c}^*\mathbf{y}.
$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если векторы* $\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \ldots, A^{n-1}\mathbf{b}$ *линейно независимы, то всегда можно сделать асимптотическую устойчивость решения* $\mathbf{y} = 0$ *управлением вида* $u = \mathbf{c}^*\mathbf{y}$.

В ходе доказательства теоремы дан конструктивный метод построения управления u; при этом коэффициенты усиления $c_1, \ldots, c_n$ определяются в замкнутой форме через элементы матрицы A и вектора $\mathbf{b}$.

3°. Условие (5.15) теоремы 5.2 является, вообще говоря, излишне жестким. Определим подход к построению системы автоматического управления, обеспечивающей асимптотическую устойчивость программного управления для тех случаев, когда оно может не выполняться.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A. Предположим, что среди них имеются в точности k таких, у которых вещественные части неотрицательны. Тогда неособым линейным преобразованием над искомыми функциями линейную систему (5.14) можно привести к виду

$$
d\mathbf{y}_1/dt = A_+\mathbf{y}_1 + \mathbf{b}_1 u, \qquad d\mathbf{y}_2/dt = A_-\mathbf{y}_2 + \mathbf{b}_2 u, \tag{5.23}
$$

где A_+, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{y}_1$ — размерности k и A_-, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{y}_2$ — размерности $n-k$. Матрица A_+ имеет собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ с неотрицательными вещественными частями, а матрица A_- — только с отрицательными.

Теорема 5.3. *Если векторы* $\mathbf{b}_1, A_+\mathbf{b}_1, \ldots, A_+^{n-1}\mathbf{b}_1$ *линейно независимы, то положение равновесия* $\mathbf{y}=0$ *можно сделать асимптотически устойчивым выбором управления*

$$u = \mathbf{c}^*\mathbf{y}. \tag{5.24}$$

Доказательство. Как следует из доказательства теоремы 5.2, для первой группы уравнений системы (5.23) можно выбрать управление $u=\Gamma^*\mathbf{y}_1$ так, чтобы нулевое решение этой системы было асимптотически устойчивым.

Рассмотрим теперь совокупную систему уравнений (5.23) при этом управлении. Матрица этой системы имеет вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} A_+ + \mathbf{b}_1\Gamma^*, & 0 \\ \mathbf{b}_2\Gamma^*, & A_- \end{pmatrix};$$

по теореме Лапласа характеристическое уравнение запишем так:

$$\det(\Phi - \lambda E) = \det(A_+ + \mathbf{b}_1\Gamma^* - \lambda E_k)\det(A_- - \lambda E_{n-k}) = 0.$$

Отсюда следует, что все собственные числа матрицы Φ имеют отрицательные вещественные части.

Таким образом, положение $\mathbf{y}=0$ асимптотически устойчиво.

Замечание 1. При обратном переходе к системе (5.14) управление (5.24) подвергнется линейному преобразованию. Ясно, что управление $u=\mathbf{c}^*\mathbf{y}$ стабилизирует систему (5.14).

Замечание 2. Теорема 5.3 заключает в себе необходимые и достаточные условия стабилизации программного движения по первому линейному приближению.

Предположим, что условия теоремы 5.3 не выполнены, т. е. среди векторов

$$\mathbf{b}_1, A_+\mathbf{b}_1, \ldots, A_+^{n-1}\mathbf{b}_1 \tag{5.25}$$

имеются линейно зависимые.

Пусть $l<k$ первых векторов (5.25) линейно независимы; тогда $k-l$ остальных векторов представляют собой линейные комбинации первых. Дополним систему из l векторов до k так, чтобы совокупная система была линейно независимой:

$$\mathbf{b}_1, A_+\mathbf{b}_1, \ldots, A_+^{l-1}\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_l, \mathbf{b}_{l+1}, \ldots, \mathbf{b}_k. \tag{5.26}$$

Образуем из них матрицу S и сделаем замену по формуле $y_1 = Sz$. Тогда первая группа уравнения (5.23) примет вид

$$\dot{z} = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 & -p_l & c_{11}^{(1)} & \dots & c_{1,k-l}^{(1)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -p_{l-1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -p_1 & c_{l,1}^{(1)} & \dots & c_{l,k-l}^{(1)} \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & c_{11}^{(2)} & \dots & c_{1,k-l}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & c_{k-l,1}^{(2)} & \dots & c_{k-l,k-l}^{(2)} \end{array}\right) z + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} u,$$

или

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} P, & C_1 \\ 0, & C_2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} u. \tag{5.27}$$

Здесь можно различить два случая:

1) среди собственных чисел матрицы C_2 есть собственные числа с положительными вещественными частями;

2) собственные числа матрицы C_2 имеют только равные нулю вещественные части.

В первом случае программное движение не может быть стабилизировано управлением вида

$$u = \mathbf{c}^*\mathbf{y} + o(\|\mathbf{y}\|),$$

как бы ни выбрать вектор $\mathbf{c}$; поэтому, верно следующее утверждение.

Теорема 5.4. *Если при любом управлении*

$$u = \mathbf{c}^*\mathbf{y} \tag{5.28}$$

среди собственных чисел матрицы $A + \mathbf{b}\mathbf{c}^*$ существует хоть одно число с положительной вещественной частью, то положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы

$$d\mathbf{y}/dt = A\mathbf{y} + \mathbf{b}u + \mathbf{H}(t, \mathbf{y}, u), \tag{5.29}$$

где

$$\|\mathbf{H}(t, \mathbf{y}, u)\| \leqslant L(\|\mathbf{y}\| + \|u\|)^{1+\alpha}; \qquad L > 0, \ \alpha > 0,$$

нельзя сделать устойчивым (асимптотически) по Ляпунову путем выбора управления такого, что

$$\|u\| \leqslant \beta \|\mathbf{y}\|, \qquad \beta > 0.$$

Доказательство. Докажем ее с помощью теоремы Ляпунова о неустойчивости, т. е. построим соответствующие функции V и W.

Рассмотрим самый простой и характерный случай единственного положительного корня. Тогда линейные члены дифференциальных уравнений (5.29) при управлении (5.28) можно привести к виду

$$dy_1/dt=\lambda_1 y_1, \qquad d\bar{y}/dt=\bar{A}\bar{y}, \tag{5.30}$$

где $\bar{y}^*=\{y_2, \ldots, y_n\}$, $\lambda_1>0$.

Рассмотрим функцию

$$V=V_1+V_2,$$

где

$$V_1=y_1^2, \qquad V_2=V_2(y_2, \ldots, y_n).$$

Будем считать, что $\bar{y}\equiv 0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову и функция $V_2(\bar{y})$ отрицательно определенна. Тогда

$$dV_2(\bar{y})/dt=W_2(\bar{y})$$

в силу второй группы уравнений системы (5.30) будет положительно определенной.

Вычислим полную производную dV/dt в силу системы (5.30):

$$\frac{dV}{dt}=2\lambda_1 y_1^2+W_2=2\lambda_1 y_1^2+W_2+\mu V-\mu V=\mu V+(2\lambda_1-\mu)\,y_1^2+(W_2-\mu V_2).$$

Пусть $2\lambda_1>\mu>0$; тогда

$$dV/dt=\mu V+W, \tag{5.31}$$

где $W(y)=(2\lambda_1-\mu)\,y_1^2+(W_2-\mu_1 V_2)$ является положительно определенной функцией переменных $y_1, \ldots, y_n$.

Ясно, что функция V в сколь угодно малой окрестности точки $y=0$ принимает положительные значения.

Таким образом, выполнены все условия теоремы о неустойчивости для системы (5.30).

Теперь перейдем к нелинейному случаю. Полная производная dV/dt в силу таким образом преобразованной нелинейной системы будет

$$\frac{dV}{dt}=\mu V+W+[\operatorname{grad} V, \bar{H}(t,\ y,\ c^*y)]=\mu V+W_1. \tag{5.32}$$

Ясно, что существуют такие положительные постоянные a_1, a_2 и δ, что

$$a_1\|y\|^2\leqslant W_1\leqslant a_2\|y\|^2,$$

если только $\|y\|<\delta$. Этим теорема доказана полностью.

4°. Во втором случае, когда $\operatorname{Re}\lambda_j=0$ для матрицы C_2, во многих задачах оказывается возможным сделать программное движение стабильным: устойчивым или асимптотически устойчивым. Эти случаи носят название критических (сомнительных).

Предположим, что система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dy}{dt}=Ay+bu+\sum_{m=2}^{\infty}y^m, \tag{5.33}$$

где y^m — однородные формы степени m относительно отклонений $y_1, \ldots, y_n$ и управлений $u_1, \ldots, u_r$. Коэффициенты этих форм пусть не зависят от времени t. Будем считать, что управление $u=c^*y$ не может быть выбрано так, чтобы положение равновесия было асимптотически устойчивым. Кроме того, матрица $A+bc^*$ не имеет собственных чисел с положительными вещественными частями. Пусть при некотором выборе c матрица $A+bc^*$ имеет k собственных чисел, равных нулю, которым отвечают простые элементарные делители, и остальные $n-k$ чисел с отрицательными вещественными частями.

Тогда систему дифференциальных уравнений (5.33) при управлении $u=c^*y$ можно привести к виду

$$\begin{aligned}&\frac{dx_s}{dt}=X_s(x, y), \quad s=1, 2, \ldots, k,\\ &\frac{dy_i}{dt}=\sum_{j=1}^{N}p_{ij}y_j+Y_i(x, y), \quad i=1, 2, \ldots, N, \ N=n-k,\end{aligned} \tag{5.34}$$

где

$$X_s=\sum_{m=2}^{\infty}X_s^m, \quad Y_i=\sum_{m=2}^{\infty}Y_i^m \tag{5.35}$$

и X_s^m, Y_i^m являются однородными формами степени m относительно переменных $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_N$ с коэффициентами, не зависящими от времени t.

Ряды (5.35) сходятся при достаточно малых $|x_s|$, $s=1, \ldots, k$, и $|y_i|$, $i=1, \ldots, N$. Собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы $P=\{p_{ij}\}$ имеют отрицательные действительные части.

А. М. Ляпуновым рассмотрен случай одного и двух нулевых корней и даны условия, при выполнении которых имеет место устойчивость, асимптотическая устойчивость и неустойчивость.

Нерешенная задача: дать условия, при которых в случае k нулевых корней будет иметь место устойчивость, асимптотическая устойчивость и неустойчивость.

Рассмотрим систему уравнений в матричной форме

$$Py+Y(x, y)=0. \tag{5.36}$$

Левые части этих уравнений обращаются в нуль при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0, \qquad y_1 = \ldots = y_N = 0.$$

Но их функциональный определитель по отношению к $y_1, \ldots, y_N$ при значениях $x_s = 0$ и $y_i = 0$ обращается в величину, не равную нулю. Поэтому в силу известной теоремы из теории неявных функций, уравнения эти разрешимы относительно величин $y_1, \ldots, y_N$ и допускают одно определенное решение вида

$$y_i = u_i(x_1, \ldots, x_k), \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{5.37}$$

где $u_i(x_1, \ldots, x_k)$ суть голоморфные функции переменных $x_1, \ldots, x_k$, обращающиеся в нуль при $x_s = 0$.

Подставим решение (5.37) в функции $X_s(\mathrm{x}, \mathrm{y})$. Тогда $X_s(x, u(\mathrm{x}))$ представляют собой голоморфную функцию переменных $x_1, \ldots, x_k$. Возможны два случая: либо $X_s(x, u(\mathrm{x})) \equiv 0$ для всех s, $1 \leqslant s \leqslant k$, либо для некоторого s_0 будет $X_{s_0}(\mathrm{x}, u(\mathrm{x})) \not\equiv 0$. Первый случай А. М. Ляпуновым назван особенным, второй — общим.

Рассмотрим особенный случай. Сделаем в системе (5.34) замену

$$\begin{gathered} x_s = \bar{x}_s, \\ y_i = \bar{y}_i + u_i(\bar{x}), \qquad s = 1, \ldots, k; \; i = 1, \ldots, N. \end{gathered} \tag{5.38}$$

Тогда система (5.34) примет вид

$$\begin{gathered} \frac{d\bar{x}_s}{dt} = \bar{X}_s(\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{y}}), \\ \frac{d\bar{y}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}\bar{y}_j + \bar{Y}_i(\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{y}}), \end{gathered} \tag{5.39}$$

где функции $\bar{X}_s(\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{y}}) = X_s(\bar{\mathrm{x}}, u(\bar{\mathrm{x}}) + \bar{\mathrm{y}})$ и $\bar{Y}_i(\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{y}}) = Y_i(\bar{\mathrm{x}}, u(\bar{\mathrm{x}}) + \bar{\mathrm{y}}) - Y_i(\bar{\mathrm{x}}, u(\bar{\mathrm{x}})) - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial u_k(\bar{x})}{\partial \bar{x}_j} \bar{X}_j(\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{y}})$ являются голоморфными при достаточно малых $|\bar{x}_s|$, $|\bar{y}_i|$ и разложения их по целым положительным степеням $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N$ не содержат членов, линейных относительно этих величин.

Система (5.39) имеет целое семейство положений равновесия:

$$\bar{x}_s = c_s, \quad \bar{y}_i = 0, \quad s = 1, \ldots, k; \quad i = 1, \ldots, N, \tag{5.40}$$

так как $\bar{X}_s(\mathrm{c}, 0) = X_s(\mathrm{c}, u(\mathrm{c}) + 0) \equiv 0$ (особенный случай). Изучим движение около этих положений равновесия, для чего рассмотрим систему дифференциальных уравнений с частными производными

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial \bar{y}_i} \left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\bar{y}_j + \bar{Y}_i(\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{y}}) \right) = \bar{X}_s(\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{y}}). \tag{5.41}$$

Сделаем в системе (5.41) замену $\bar{x}_s = c_s + z_s$, где z_s — новые искомые функции, а c_s, $s = 1, \ldots, k$ — достаточно малые произвольные постоянные. При этом система (5.41) перейдет в

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial z_s}{\partial \bar{y}_i}\left(\sum_{j=1}^{N} \tilde{p}_{ij}(\mathrm{c})\bar{y}_j + \tilde{Y}\right) = \sum_{j=1}^{N} b_{sj}(\mathrm{c})\bar{y}_j + \tilde{X}_s, \tag{5.42}$$

которая полностью совпадает с (5.41) при $\|\mathrm{c}\| = 0$.

На основании вспомогательной теоремы Ляпунова при $\|\mathrm{c}\| \leqslant c_0$ всегда можно найти систему голоморфных функций переменных $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N$

$$z_s = z_s(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N, c_1, \ldots, c_k), \tag{5.43}$$

удовлетворяющих уравнениям (5.42) и обращающихся в нуль при $\bar{y}_1 = \ldots = \bar{y}_N = 0$, т. е.

$$z_s(0, \ldots, 0, c_1, \ldots, c_k) \equiv 0, \quad s = 1, \ldots, k.$$

Каждая из этих функций также обладает свойством

$$z_s(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N, 0, \ldots, 0) \equiv 0.$$

Возвращаясь к прежним искомым функциям, получим

$$\bar{x}_s = c_s + z_s(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N, c_1, \ldots, c_N), \quad s = 1, \ldots, k. \tag{5.44}$$

Система (5.44) в силу свойств функций z_s разрешима относительно $c_1, \ldots, c_k$ так, что

$$c_s = \bar{x}_s + \varphi_s(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N), \quad s = 1, \ldots, k. \tag{5.45}$$

Полагая в (5.45) $\bar{x}_s = x_s$, $\bar{y}_l = y_l - u_l(\mathrm{x})$, получим систему голоморфных интегралов, не зависящих от t, для системы (5.34)

$$c_s = x_s + \varphi_s(x_1, \ldots, x_k, y_1 - u_1(\mathrm{x}), \ldots, y_N - u_N(\mathrm{x})), \quad s = 1, \ldots, k. \tag{5.46}$$

С помощью этих интегралов можно понизить порядок исходной системы. Исключим из второй группы уравнений (5.39) функции $\bar{x}_s$ с помощью соотношений (5.44). Тогда получим для определения функций $\bar{y}_i$, $i = 1, \ldots, N$, систему уравнений

$$\frac{d\bar{y}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \tilde{p}_{ij}(\mathrm{c})\bar{y}_j + \tilde{Y}_i(\bar{\mathrm{y}}, \mathrm{c}). \tag{5.47}$$

Нулевое решение системы (5.47) асимптотически устойчиво по Ляпунову, причем устойчивость равномерная по отношению к параметрам c_s, $s = 1, \ldots, k$. Последнее означает: по любому

$\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при всех достаточно малых $|c_s|$

$$\|\bar{y}_i(t, \bar{y}_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geqslant t_0 \quad \text{при} \quad \|\bar{y}_0\| < \delta$$

и

$$\|\bar{y}(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Действительно, найдем положительно определенную квадратичную форму величин $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N$ в силу линейной системы (5.47) при $\|c\| = 0$. Так как $\tilde{P}(c)|_{c=0} = P$, то существуют V и W такие, что $dV/dt = W$ в силу линейной системы (5.47) при $\|c\| = 0$. Вычисляя dV/dt в силу системы (5.47), получим

$$\frac{dV}{dt} = W + [\operatorname{grad} V, (\tilde{P}(c) - \tilde{P}(0)\bar{y})] + (\operatorname{grad} V, \tilde{Y}(\bar{y}, c)) = W_1. \quad (5.48)$$

За счет выбора $|c_s| < c_0$ можно добиться, чтобы W_1 была отрицательно определенной для всех c_s. Из теоремы 3.4, § 3, следует высказанное утверждение относительно функций $\bar{y}(t)$.

Подставляя функции $\bar{y}(t)$ в интегралы (5.44), получим, что $\bar{x}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, а значит, $y(t) \to u(c_1, \ldots, c_k)$ при $t \to +\infty$.

Такит образом, в особенном случае нулевое решение системы (5.34) устойчиво.

Если выбрать достаточно малые величины $\bar{x}_s^{(0)}$ и $\bar{y}_i^{(0)}$, $s = 1, \ldots, k$; $i = 1, \ldots, N$, то из (5.45) можно определить единственную систему величин c_s^0, $s = 1, \ldots, k$. Если последние достаточно малы, то любое решение (5.39) обладает свойством

$$\bar{x}_s(t) \to c_s^0,$$
$$\bar{y}(t) \to 0, \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

поэтому $y(t) \to u(c^0)$. При $c_s^0 = 0$, $u(0) = 0$. Следовательно, имеет место условная асимптотическая устойчивость нулевого решения, так как величины x_s^0 определяются в этом случае не произвольно, а из интегралов системы (5.46) при $c_s^0 = 0$.

Рассмотрим теперь общий случай, когда

$$X_s(x_1, \ldots, x_k, u_1(x), \ldots, u_n(x)) \neq 0.$$

Положим $\bar{y} = 0$ в функциях $\bar{X}_s(\bar{x}, \bar{y})$ и $\bar{Y}_i(\bar{x}, \bar{y})$, которые определены в системе (5.39). Получим

$$\bar{X}_s^{(0)}(x) = \bar{X}_s(x, 0) = X_s(x, u(x)) = \sum_{l=\mu}^{\infty} X_s^{(l)},$$
$$\bar{Y}_i^{(0)}(\bar{x}) = \bar{Y}_i(\bar{x}, 0) = \sum_{l=\nu}^{\infty} Y_i^{(l)}. \quad (5.49)$$

Здесь μ и ν означают наинизшую степень однородных форм относительно переменных $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$, с которых начинаются в действительности разложения функций $\bar{X}_s^{(0)}$ и $\bar{Y}_i^{(0)}$ соответственно.

Из вида функций $\bar{Y}_i(\bar{x}, \bar{y})$ следует, что $\nu \geqslant \mu + 1$.

Отметим, что в общем случае может иметь место устойчивость, асимптотическая устойчивость и неустойчивость. И решение вопроса об устойчивости в ряде случаев сводится к рассмотрению проблемы устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений с однородными правыми частями:

$$\frac{d\bar{x}_s}{dt} = X_s^{(\mu)}, \quad s = 1, \ldots, k. \tag{5.50}$$

Определение 5.1. *Функцию $f(x_1, \ldots, x_k)$, заданную в R^k, называют однородной порядка μ, если имеет место равенство*

$$f(cx_1, \ldots, cx_k) = c^\mu f(x_1, \ldots, x_k).$$

При этом функцию $f(x_1, \ldots, x_k)$ будем называть положительно однородной, если $c > 0$.

Из анализа известно, что $f(\mathrm{x}) \in C^1$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = \mu f(\mathrm{x}). \tag{5.51'}$$

Система (5.50) имеет нулевое решение $\bar{\mathrm{x}} = 0$. Если $\bar{\mathrm{x}}(t, \mathrm{x}_0)$ является интегральной кривой системы (5.50), то

$$\varkappa = c\bar{\mathrm{x}}(c^{\mu-1}t, \mathrm{x}_0) \tag{5.51}$$

также является интегральной кривой этой системы, причем

$$c\bar{\mathrm{x}}(c^{\mu-1}t, \mathrm{x}_0) = \bar{\mathrm{x}}(t, c\mathrm{x}_0). \tag{5.52}$$

Действительно, вычисляя производную по t от равенства (5.51), получим

$$\frac{d\varkappa}{dt} = c\,\frac{d\bar{x}(c^{\mu-1}t, \mathrm{x}_0)}{dt}\,c^{\mu-1} = c^\mu X^{(\mu)}(\bar{x}(c^{\mu-1}t, \mathrm{x}_0)) = X^{(\mu)}(c\bar{x}(c^{\mu-1}t, \mathrm{x}_0)),$$

т. е. $d\varkappa/dt = X^{(\mu)}(\varkappa)$.

Равенство (5.52) выполняется при $t = 0$, а при $t \neq 0$ оно будет иметь место в силу единственности решения (5.50).

Таким образом, семейство интегральных кривых (5.51) заполняет коническую поверхность, вершина которой лежит в точке $\bar{\mathrm{x}} = 0$, а направляющим множеством является интегральная кривая $\bar{x}(t) = \bar{x}(t, \mathrm{x}_0)$.

Теорема 5.5. *Нулевое решение системы* (5.50) *не может быть асимптотически устойчивым при* μ *четном.*

Доказательство. Пусть нулевое решение $\bar{x}=0$, напротив, асимптотически устойчиво. Тогда существует интегральная кривая $\bar{x}(t, x_0)$ системы (5.50), обладающая свойством $\bar{x}(t, x_0)\to 0$ при $t\to 0$.

Рассмотрим интегральную кривую $\bar{x}(t, -x_0)$. Из равенства (5.52) при $c=-1$ имеем $\bar{x}(t, -x_0)=-\bar{x}(-t, x_0)$, откуда следует, что $\bar{x}(t, -x_0)\to 0$ при $t\to-\infty$. Последнее противоречит наличию асимптотической устойчивости нулевого решения системы (5.50).

Теорема 5.6. *Для того чтобы нулевое решение системы* (5.50) *было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовали две функции* $V(x)$ и $W(x)$, *удовлетворяющие следующим условиям:*

1) *функции* $V(x)$ и $W(x)$ — *положительно определенные;*

2) *функция* $W(x)$ — *положительно однородная порядка* m; *функция* $V(x)$ — *положительно однородная порядка* $m+1-\mu$;

3) $$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}x_i^{(\mu)}=W,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}x_i=(m+1-\mu)V. \tag{5.53}$$

Уравнение (5.53) может быть разрешено всегда, так что функция $V(x)$ определяется через функции $x_s^{(\mu)}$ и W.

Теорема 5.7. *Если нулевое решение системы* k *уравнений* (5.50) *асимптотически устойчиво, то нулевое решение системы* n *уравнений* (5.34) *также будет асимптотически устойчиво.*

Правые части системы (5.50) представляют собой однородные формы степени μ относительно величин $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ и являются первыми формами в разложении функций

$$x_s^{(0)}(\bar{x})=x_s(\bar{x}, 0)=x_s(x, u(x)).$$

Доказательство. Сделаем ряд преобразований над исходной системой, которые не меняют задачи об устойчивости. Замена (5.38) приводит нас к уравнениям (5.39).

Положим далее в системе (5.39)

$$\begin{aligned}\bar{x}_s&=\zeta_s+\varphi_s(\eta_1, \ldots, \eta_N), \quad s=1, \ldots, k;\\ \bar{y}_i&=\eta_i, \quad i=1, \ldots, N,\end{aligned} \tag{5.54}$$

где функции $\bar{x}_s=\varphi_s(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N)$ представляют собой голоморфное

решение системы (5.41), существование которого следует из вспомогательной теоремы Ляпунова, причем

$$\varphi_s(0, 0, \ldots, 0) \equiv 0, \quad s = 1, \ldots, k.$$

После замены (5.54) система (5.39) будет иметь вид

$$d\zeta/dt = \mathrm{F}(\zeta, \eta), \qquad d\eta/dt = P\eta + \mathrm{G}(\zeta, \eta), \tag{5.55}$$

где $\mathrm{F}(\zeta, \eta) = \overline{X}(\zeta + \varphi, \eta) - \overline{X}(\varphi, \eta)$, $\mathrm{G}(\zeta, \eta) = \overline{\mathrm{Y}}(\zeta + \varphi, \eta)$.

Ясно, что $\mathrm{F}(\zeta, \eta)|_{\zeta=0} \equiv 0$. При указанной замене имеют место следующие равенства:

$$F_s^{(0)}(\zeta) = F_s(\zeta, 0) = \overline{X}_s(\zeta, 0) = \overline{X}_s^{(0)}(\zeta) = \overline{X}_s(\zeta, u(\zeta)),$$
$$G_j^{(0)}(\zeta) = G_j(\zeta, 0) = Y_j(\zeta, 0) = \overline{Y}_j^{(0)}(\zeta).$$

Положим

$$F_s(\zeta, \eta) = F_s^{(0)}(\zeta) + \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{F}_s^{(l)},$$
$$G_j(\zeta, \eta) = G_j^{(0)}(\zeta) + \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{G}_j^{(l)},$$

где функции $\mathrm{F}_s^{(l)}$ и $\mathrm{G}_j^{(l)}$ представляют собой однородные формы величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ порядка l с аналитическими по $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$ коэффициентами, уничтожающимися при $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_N = 0$ Отметим, что

$$G_j^{(0)}(\eta) = \mathrm{G}_j(0, \eta) = \overline{Y}(\varphi(\eta), \eta)$$

не содержит членов, линейных относительно переменных $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$.

Нашей ближайшей целью будет построение такого преобразования, которое систему (5.55) приводит к виду

$$d\bar{\zeta}/dt = \overline{\mathrm{F}}(\bar{\zeta}, \bar{\eta}), \quad d\bar{\eta}/dt = \mathrm{P}\bar{\eta} + \mathrm{G}(\bar{\zeta}, \bar{\eta}). \tag{5.56}$$

Здесь $\overline{\mathrm{F}}(\bar{\zeta}, \bar{\eta}) = \overline{\mathrm{F}}^{(0)}(\zeta) + \sum_{l=\mu+1}^{\infty} \overline{\mathrm{F}}^{(l)}$, $\overline{\mathrm{G}}(\bar{\zeta}, \bar{\eta}) = \overline{\mathrm{G}}^{(0)}(\zeta) + \sum_{l=1}^{\infty} \overline{\mathrm{G}}^{(l)}$, а функции $\overline{\mathrm{F}}^{(l)}$ и $\overline{\mathrm{G}}^{(l)}$ суть однородные формы степени l относительно величин $\bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_k$ с аналитическими по $\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_N$ коэффициентами, уничтожающимися при $\bar{\eta}_1 = \bar{\eta}_2 = \ldots = \bar{\eta}_N = 0$.

Сделаем замену в системе (5.55) по формулам

$$\zeta_s = \bar{\zeta}_s + \sum_{m=1}^{\mu} \alpha_s^{(m)}, \quad s = 1, \ldots, k, \quad \eta_i = \bar{\eta}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{5.57}$$

где $\alpha_s^{(m)}$ — однородные формы относительно величин $\bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_k$ порядка m с коэффициентами, аналитическими по $\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_N$

и подлежащими определению. Другими словами, нужно показать, что коэффициенты форм $\alpha_s^{(m)}$ можно выбрать так, что замена (5.57) искомых функций в системе (5.55) приводит к уравнениям (5.56).

Подставляя формулы (5.57) в систему (5.55), получим

$$\frac{d\zeta_s}{dt}=\frac{d\bar{\zeta}_s}{dt}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{\mu}\frac{\partial\alpha_s^{(m)}}{\partial\bar{\zeta}_i}\frac{d\bar{\zeta}_i}{dt}+\sum_{m=1}^{\mu}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\alpha_s^{(m)}}{\partial\bar{\eta}_i}\left(\sum_{j=1}^{N}p_{ij}\bar{\eta}_j+G'_i\right)=F'_s, \tag{5.58}$$

$$\frac{d\bar{\eta}_i}{dt}=\sum_{j=1}^{N}p_{ij}\bar{\eta}_j+G'_i. \tag{5.59}$$

Здесь через F'_s и G'_i обозначен результат подстановки величин ζ_s и η_i в функции F_s и G_i по формулам (5.57). Далее, приравнивая слева и справа в равенстве (5.58) формы, не содержащие $d\zeta_s/dt$, но одного измерения относительно величин $\bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_k$, получим систему уравнений, из которых последовательно определим коэффициенты этих форм.

Действительно, при $m=1$ положим

$$L_s^{(1)}=\sum_{h=1}^{k}\varkappa_{sh}(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_k)\,\bar{\zeta}_h,$$

и пусть $F_s^{(1)}(\zeta)=\sum\limits_{i=1}^{k}f_{si}(\eta_1, \ldots, \eta_N)\,\zeta_i$, причем f_{si} являются известными аналитическими функциями относительно $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$, уничтожающимися при $\eta_1=\ldots=\eta_N=0$ (см. систему (5.55)).

Для определения функций $\varkappa_{si}(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_N)$ в результате приравнивая форм первой степени относительно величин $\bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_k$ слева и справа в (5.58) получим систему уравнений в частных производных

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\varkappa_{sh}}{\partial\bar{\eta}_i}\left[\sum_{j=1}^{N}p_{ij}\bar{\eta}_j+G_i^{(0)}(\bar{\eta})\right]=\sum_{i=1}^{k}(\varkappa_{ih}+\delta_{hi})\,f_{si}, \tag{5.60}$$
$$h=1, \ldots, k; \quad s=1, \ldots, k,$$

где δ_{hi} — символ Кронекера.

Система (5.60) определяет единственную совокупность k голоморфных функций $\varkappa_{sh}(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_N)$, уничтожающихся при $\bar{\eta}_1=\ldots=\bar{\eta}_N=0$, что непосредственно следует из вспомогательной теоремы А. М. Ляпунова.

Действуя далее подобным же способом, найдем единственным образом коэффициенты всех форм $\alpha_s^{(m)}(\zeta)$, $m\leqslant\mu-1$ в виде голо-

морфных функций относительно $\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_N$, обращающиеся в нуль при $\bar{\eta}_1 = \ldots = \bar{\eta}_N = 0$. Перенесем все члены, содержащие формы μ-й степени относительно $\bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_k$, в правую часть (5.58). Получившуюся там в результате этого форму μ-й степени относительно $\bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_k$ обозначим через $\bar{\bar{F}}_s^{(\mu)}(\bar{\zeta})$. Очевидно, что коэффициенты форм $\alpha_s^{(m)}$ можно выбрать в виде голоморфных функций, уничтожающихся при $\bar{\eta}_1 = \ldots = \bar{\eta}_N = 0$ таким образом, что коэффициенты форм $\bar{\bar{F}}_s^{(\mu)}(\bar{\zeta})$, $s = 1, \ldots, k$, будут наперед заданными аналитическими функциями величин $\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_N$ уничтожающимися при $\bar{\eta}_1 = \ldots = \bar{\eta}_N = 0$.

Разрешим равенства (5.58) относительно величин $d\bar{\zeta}_s/dt$; тогда получим

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dt} = \tilde{\mathbf{F}}_s(\bar{\zeta}, \eta) = \tilde{\mathbf{F}}_s^{(0)}(\bar{\zeta}) + \sum_{l=\mu}^{\infty} \tilde{\mathbf{F}}_s^{(l)}. \tag{5.61}$$

Легко проверить, что коэффициенты функций $\bar{\bar{F}}_s^{(\mu)}(\bar{\zeta})$ можно выбрать так, что $\tilde{\mathbf{F}}_s^{(\mu)} \equiv 0$.

Таким образом, показано, что преобразование (5.57) можно выбрать так, что после применения его к системе (5.55) получим систему (5.56).

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы 5.7. Все преобразования, которые приводят исходную систему к виду (5.56), не меняют вопроса об устойчивости.

Обозначим

$$\bar{\mathbf{F}}^{(0)}(\bar{\zeta}) = \Xi^{(\mu)}(\bar{\zeta}) + \sum_{r=\mu+1}^{\infty} \Xi^{(r)}.$$

Так как нулевое решение системы

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dt} = \Xi^{(\mu)}(\bar{\zeta}) \tag{5.62}$$

асимптотически устойчиво по условию теоремы 5.7, то существуют две однородные функции $V(\bar{\zeta})$ и $W(\bar{\zeta})$ со свойствами, указанными в теореме 5.6.

Выберем далее функцию $V_1(\bar{\eta})$ в виде положительно определенной квадратичной формы, удовлетворяющей уравнению

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial V_1(\bar{\eta})}{\partial \bar{\eta}_j} \left(\sum_{l=1}^{N} p_{jl} \bar{\eta}_l \right) = -\sum_{l=1}^{N} \bar{\eta}_l^2.$$

Это всегда можно сделать ввиду отрицательности вещественных

частей корней уравнения

$$\det |P-\lambda E|=0.$$

В качестве функции Ляпунова возьмем

$$V_2(\bar{\zeta},\ \bar{\eta})=V(\bar{\zeta})+V_1(\bar{\eta}), \tag{5.63}$$

полная производная которой в силу системы (5.56) будет

$$\frac{dV_2}{dt}=\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial V}{\partial\bar{\zeta}_s}\bar{F}_s(\bar{\zeta},\ \bar{\eta})+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial V_1(\bar{\eta})}{\partial\bar{\eta}_j}\left[\sum_{i=1}^{N}P_{ij}\bar{\eta}_i+G_j(\bar{\zeta},\ \bar{\eta})\right],$$

откуда следует, что

$$\frac{dW_2}{dt}=W(\bar{\zeta})-\sum_{i=1}^{N}\bar{\eta}_i^2+(\operatorname{grad}V)^*\left[\sum_{r=\mu+1}^{\infty}\Xi^{(r)}(\bar{\zeta})+\sum_{l=\mu+1}^{\infty}\bar{F}^{(l)}\right]+\\+(\operatorname{grad}V_1)^*\left[\sum_{l=1}^{\infty}\bar{G}^{(l)}+\bar{G}^0(\bar{\zeta})\right]. \tag{5.64}$$

При достаточно малых $|\bar{\zeta}_s|$ и $|\bar{\eta}_j|$, $s=1,\ \ldots,\ k$; $j=1,\ \ldots,\ N$, имеем

$$(\operatorname{grad}V)^*\left[\sum_{r=\mu+1}^{\infty}\Xi^{(r)}(\bar{\zeta})+\sum_{l=\mu+1}^{\infty}\bar{F}^{(l)}\right]\leqslant\alpha\sum_{s=1}^{k}|\bar{\zeta}_s|^{m+1}, \tag{5.65}$$

так как функции $\partial V/d\bar{\zeta}_s$ являются однородными порядка $m-\mu$. Вторая сумма в выражении (5.64) не превосходит величины

$$\beta\sum_{s=1}^{k}|\zeta_s|^{\nu}\sum_{j=1}^{N}|\bar{\eta}_j|+\sum_{i=1}^{N}\eta_i^2\sum_{s=1}^{k}|\bar{\zeta}_s|. \tag{5.66}$$

Положим теперь $m=\mu+1$ и учтем, что $\nu\geqslant\mu+1$. Получим

$$dV_2/dt=\tilde{W}(\bar{\zeta},\ \bar{\eta}),$$

где $\tilde{W}(\bar{\zeta},\ \bar{\eta})$ является отрицательно определенной функцией за счет выбора достаточно малой окрестности точки $\zeta_s=0$, $\eta_i=0$, а тогда нулевое решение системы (5.56) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

5°. Если матрица $A+bc^*$ имеет k пар чисто мнимых корней и им соответствуют простые элементарные делители и $n-2k$ корней с отрицательными действительными частями, тогда

система (5.33) может быть преобразована:

$$\begin{aligned} &d\bar{x}_s/dt = -\lambda_s\bar{y}_s + \bar{X}_s(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}),\\ &d\bar{y}_s/dt = \lambda_s\bar{x}_s + \bar{Y}_s(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}), \quad s = 1,\ \ldots,\ k, \qquad (5.67)\\ &d\bar{z}/dt = P\bar{z} + Z(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}). \end{aligned}$$

Здесь функции $\bar{X}_s$ и $\bar{Y}_s$ обладают свойством

$\bar{X}_s(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})|_{\bar{x}=\bar{y}=0} \equiv 0, \quad \bar{Y}_s(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})|_{\bar{x}=\bar{y}=0} \equiv 0, \quad s = 1,\ \ldots,\ k,$

Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} &\bar{x}_s = \cos\theta_s\left[c_s + \sum_{m=2}^{\infty} r_s^{(m)}(\theta_1,\ \ldots,\ \theta_k,\ c_1,\ \ldots\ c_k)\right],\\ &\bar{y}_s = \sin\theta_s\left[c_s + \sum_{m=2}^{\infty} r_s^{(m)}(\theta_1,\ \ldots,\ \theta_k,\ c_1,\ \ldots,\ c_k)\right], \qquad (5.68)\\ &\bar{z}_j = \sum_{m=1}^{\infty} Z_j^{(m)}(\theta_1,\ \ldots,\ \theta_k,\ c_1,\ \ldots,\ c_k). \end{aligned}$$

Здесь функции $Z_s^{(m)}$ и $Z_j^{(m)}$ являются однородными формами относительно $c_1,\ \ldots,\ c_k$ степени m с периодическими коэффициентами относительно $\theta_1,\ \ldots,\ \theta_k$, подлежащими определению. Функции $\theta_1,\ \ldots,\ \theta_k$ удовлетворяют уравнению

$$d\theta_s/dt = \lambda_s + \Theta_s.$$

Эти уравнения получаются из системы (5.67) после введения полярных координат

$$\bar{x}_s = r_s\cos\theta_s, \quad \bar{y}_s = r_s\sin\theta_s.$$

При некоторых ограничительных предположениях устанавливаются следующие теоремы.

Теорема 5.8 [8]. *Если система* (5.67) *имеет семейство ограниченных решений* (5.68) *то нулевое решение* (5.33) *устойчиво. Интегральные кривые, входящие в семейство* (5.68), *являются либо периодическими, либо почти-периодическими в зависимости от выбора произвольных постоянных.*

Теорема 5.9. [8]. *Для того чтобы система* (5.67) *имела семейство ограниченных решений* (5.68), *необходимо и достаточно, чтобы существовало k голоморфных интегралов специального вида.*

Возникает в связи с этим задача построения стабилизирующего управления $u = c^*x$ такого, чтобы положение равновесия $x = 0$ нелинейной системы (5.33) было устойчиво, либо асимптотически устойчиво. Необходимо дать способ фактического построения такого управления в сомнительных случаях.

§ 6. Дискретные регуляторы

Использование цифровых машин приводит к дискретному регулированию, т. е. регулированию с помощью кусочно-постоянного управления, являющегося функцией фазовых координат объекта, вычисляемых в некоторые дискретные моменты времени.

Пусть система в отклонениях имеет вид

$$dy/dt = Ay + bu, \tag{6.1}$$

где

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(kh) \quad \text{при} \quad t \in [kh, \ (k+1)h]; \tag{6.2}$$

$h > 0$ — некоторая постоянная, $k = 0, 1, \ldots$, $y(0)$ — начальные данные системы (6.1), характеризующие начальное отклонение от программного движения.

Рассматривая уравнение (6.1) на промежутке $[0, h]$, имеем систему

$$dy/dt = Ay + bc^* y(0)$$

с начальным условием $y(t)_{t=0} = y(0)$. При $t \in [h, 2h]$ система (6.1) примет вид

$$dy/dt = Ay + bc^* y(h), \quad y(t)|_{t=h} = y(h).$$

Таким образом, интегрируя последовательно систему (6.1) на промежутках времени $[kh, (k+1)h]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, получим интегральную кривую. Возникает вопрос: при каких коэффициентах усиления $c_1, \ldots, c_n$ и при каком шаге дискретности h программное движение исходной системы является асимптотически устойчивым?

Теорема 6.1. *Если векторы b, Ab, $\ldots$, $A^{n-1}b$ линейно независимы, то существуют коэффициенты усиления $c^* = (c_1, \ldots, c_n)$ и величина h такие, что нулевое решение системы (6.1) будет асимптотически устойчивым.*

Кроме того, для любого непрерывного управления $u = c^* y(t)$, которое стабилизирует нулевое решение, существует число $h_0 > 0$ такое, что для всех $h < h_0$ дискретное управление

$$u = c^* y(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h], \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

будет также стабилизировать это движение.

Доказательство. Выберем вектор c так, чтобы матрица $A + bc^*$ имела собственные числа с отрицательными вещественными частями. Построим квадратичную форму $V(y)$, удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_i c_j) y_j = -\sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

при этом $V(\mathrm{y})$ положительно определенная. Найдем ее полную производную в силу системы (6.1) при управлении (6.2). Тогда

$$\frac{dV}{dt} = (\operatorname{grad} V)^* (A\mathrm{y}+\mathrm{b}u) = -(\mathrm{y}^*\mathrm{y}) + (\operatorname{grad} V)^* \mathrm{bc}^* [\mathrm{y}(kh) - \mathrm{y}(t)]. \quad (6.3)$$

Введем в рассмотрение вектор $\mathrm{z}(t) = \mathrm{y}(t) - \mathrm{y}(kh)$, $t \in [kh, (k+1)h]$ $k = 0, 1, 2, \ldots$ и оценим его норму. Из системы (6.1) имеем

$$\frac{d\mathrm{z}}{dt} = A\mathrm{z} + (A + \mathrm{bc}^*)\,\mathrm{y}(kh), \quad \mathrm{z}(kh) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (6.4)$$

Умножая обе части (6.4) скалярно на $\mathrm{z}^*(t)$, получим

$$\mathrm{z}^* \frac{d\mathrm{z}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\mathrm{z}^*\mathrm{z})}{dt} = \frac{\mathrm{z}(A+A^*)\,\mathrm{z}^*}{2} + \mathrm{z}^*(A + \mathrm{bc}^*)\,\mathrm{y}(kh). \quad (6.5)$$

Перейдем в равенстве (6.5) к нормам и положим $\|\mathrm{z}\| = \zeta$. Тогда получим

$$\frac{d\zeta}{dt} \leqslant \lambda\zeta + \mu \|\mathrm{y}(kh)\|, \quad (6.6)$$

где $0 < \lambda = \left\| \frac{A+A^*}{2} \right\|$, $0 < \mu = \| A + \mathrm{bc}^* \|$.

Умножая неравенство (6.6) на $e^{-\lambda t}$ и затем интегрируя от величины kh до t, получим

$$\zeta(t) \leqslant \frac{\mu}{\lambda} \|\mathrm{y}(kh)\| \left[e^{\lambda(t-kh)} - 1\right] \quad (6.7)$$

при $t \in [kh, (k+1)h]$, откуда

$$\zeta(t) \leqslant \frac{\mu}{\lambda} \|\mathrm{y}(kh)\| \left[e^{\lambda h} - 1\right] \quad (6.8)$$

или

$$\zeta(t) \leqslant c_1 h \|\mathrm{y}(kh)\|, \quad t \in [kh, (k+1)h], \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (6.9)$$

Здесь c_1 — положительная константа, которая не зависит от h при $h < h_1$, $h_1 > 0$.

Положим $V = \rho^2$, $\rho \equiv \mathrm{const}$ и рассмотрим отношение $\frac{1}{\rho^2}\mathrm{y}^*\mathrm{y}$. Ясно, что существуют такие положительные константы a_1 и a_2, удовлетворяющие неравенству

$$a_1 \leqslant \frac{\mathrm{y}^*\mathrm{y}}{\rho^2} \leqslant a_2.$$

Отсюда

$$a_1\rho^2 \leqslant \mathrm{y}^*\mathrm{y} \leqslant a_2\rho^2. \quad (6.10)$$

Функции $\partial V/\partial y_i$, $i = 1, 2, \ldots$, являются линейными формами

относительно вектора y, поэтому

$$\left|\frac{\partial V}{\partial y_i}\right| \leqslant b_i\rho,$$

где $b_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, или

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}}\right\| \leqslant b\rho, \quad b > 0. \tag{6.11}$$

Обозначим норму матрицы $\mathbf{bc}^*$ через c_2. Учитывая неравенства (6.9)—(6.11), из соотношения (6.3) легко получить

$$d\rho(t)/dt \leqslant -\lambda_1\rho(t) + \mu_1 h\rho(kh), \tag{6.12}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{a_1}{2} > 0, \quad \mu_1 = \frac{b\sqrt{a_2 c_1}\cdot c_2}{2} > 0.$$

Проинтегрируем неравенство (6.12), считая, что величина $\rho(kh)$ задана:

$$\rho(t) \leqslant \rho(kh)\left[\frac{\mu_1 h}{\lambda_1} + \left(1 - \frac{\mu_1 h}{\lambda_1}\right)e^{-\lambda_1(t-kh)}\right].$$

Полагая $t = (k+1)h$, получим

$$\rho((k+1)h) \leqslant \rho(kh)\left[\frac{\mu_1 h}{\lambda_1} + \left(1 - \frac{\mu_1 h}{\lambda_1}\right)e^{-\lambda_1 h}\right]. \tag{6.13}$$

Величина $\frac{\mu_1 h}{\lambda_1} + \left(1 - \frac{\mu_1 h}{\lambda_1}\right)e^{-\lambda_1 h}$ при достаточно малом $h\,(h < h_2)$ может быть оценена следующим образом:

$$0 < \frac{\mu_1 h}{\lambda_1}(1 - e^{-\lambda_1 h}) + e^{-\lambda_1 h} \leqslant 1 - \alpha h,$$

где $\alpha > 0$ и не зависит от $h < h_2$.

Итак, имеем рекуррентное соотношение

$$\rho((k+1)h) \leqslant \rho(kh)(1 - \alpha h) \tag{6.14}$$

или

$$\rho((k+1)h) \leqslant (1 - \alpha h)^{k+1}\rho(0). \tag{6.15}$$

Из (6.15) и (6.10) следует, что $\mathbf{y}(kh) \to 0$ при $k \to +\infty$. Следовательно, $\mathbf{y}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, ибо

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leqslant \|\mathbf{y}(kh)\| + \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(kh)\| \leqslant \|\mathbf{y}(kh)\| + c_1 h\|\mathbf{y}(kh)\| = \\ = (1 + c_1 h)\|\mathbf{y}(kh)\|. \tag{6.16}$$

Этим мы показали, что все траектории попадают при выбранном управлении в окрестность нуля.

Покажем, что по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\|\mathbf{y}(0)\| < \delta$ будет $\|\mathbf{y}(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$.

Действительно, при всех $h < h_0 = \min(h_1, h_2)$ в силу неравенств (6.10), (6.15), (6.16)

$$\|y(t)\| \leqslant \sqrt{a_2}(1+c_1h)(1-\alpha h)^k \|y(0)\| \leqslant c_3 \|y(0)\|, \qquad (6.17)$$

где

$$c_3 = \sqrt{a_2}(1+c_1h_0) \lim_{k \to +\infty} (1-\alpha h_0)^k,$$

откуда при $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/c_3$ и $\|y(0)\| < \delta$ будет $\|y(t)\| < \varepsilon$ для всей $t \geqslant 0$.

Этим полностью доказаны сделанные выше утверждения.

Замечание 1. Можно доказать, что почти для всех $h > 0$ при выполнении условия теоремы 6.1 можно выбрать вектор c так, чтобы при управлении

$$u = c^* y(kh) \quad \text{при} \quad t \in [kh, (k+1)h], \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

решение $y \equiv o$ системы (6.1) было асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Действительно, интегрируя систему (6.1) при управлении (6.2) на промежутке $kh \leqslant t \leqslant (k+1)h$ с начальным условием $y(t)|_{t=kh} = y(kh)$ будем иметь

$$y((k+1)h) = [E + H(A + bc^*)]\, y(kh), \qquad (6.18)$$

где

$$H = \int_0^h e^{A(h-\tau)}\, d\tau = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m h^{m+1}}{(m+1)!}$$

Из равенства (6.18) следует, что если корни матрицы $E + H(A + bc^*)$ можно выбрать так, чтобы они лежали внутри единичного круга с центром в начале координат, то будет $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Положим $P = e^{Ah}$ и рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = Pz + Hbu. \qquad (6.19)$$

Если матрица $(Hb, PHb, \ldots, P^{n-1}Hb)$ или матрицы H и $(b, Pb, \ldots, P^{n-1}b)$ неособенные, то выбором управления $u = c^*z$ можно добиться, чтобы матрица $P + Hbc^*$ имела любые наперед заданные собственные числа, в частности лежащие в единичном круге с центром в точке $\lambda = 0$ комплексной плоскости λ. $\det H \neq 0$ при всех $h > 0$. Векторы $b, Pb, \ldots, P^{n-1}b$ линейно независимы при всех $h > 0$, если среди собственных чисел матрицы A нет чисто мнимых, в противном случае они будут линейно независимыми лишь для тех h, которые не кратны величинам $2\pi/\omega_j$, где $i\omega_j$ — собственные числа матрицы A.

Если $h=\frac{2\pi}{\omega_l}k$, $k=1, 2, \ldots$, то среди собственных чисел матрицы $P+H\mathbf{b}C^*$ обязательно будут числа, модули которых равны единице. В этом случае решение $\mathbf{y}=0$ можно сделать лишь устойчивым по Ляпунову, в чем легко убедиться приведением матрицы A к жордановой форме.

Полученный результат оказывается справедливым для систем вида (6.1), которые могут быть стабилизированы управлением $\mathbf{u}=C\mathbf{z}$. Здесь C—$(n\times r)$-матрица.

Замечание 2. Аналогичный результат может быть получен и тогда, когда дискретное управление имеет форму

$$\mathbf{u}(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}c_{ij}y_i((k-j)h), \quad t\in[kh, \ (k+1)h], \quad k>l, \tag{6.20}$$

т. е. управление $\mathbf{u}$ является линейной комбинацией фазовых координат объекта, вычисленных в разные моменты времени.

Этот случай охватывает, в частности, регуляторы, в которых используются сигналы-измерители, последовательно выдающие координаты объекта регулирования. Например, выдается сигнал $y_1(h)$, затем $y_2(2h)$ и т. д.

Выходные сигналы различных измерителей могут выдаваться с шагом дискретности. При этом некоторые из них могут выдавать сигналы с различными запаздываниями. Пусть $h_1, \ldots, h_l$— различные интервалы дискретности выходных сигналов измерителей, $\tau_1, \ldots, \tau_s$ запаздывания, имеющие место в этих измерителях.

Возникает проблема выбора таких коэффициентов усиления этих сигналов, при которых программное движение исходной системы будет асимптотически устойчивым, т. е. положим

$$u=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{s}c_{ijk}\mathbf{y}((k_i-j)h_i-\tau_k) \quad \text{при} \quad t\in[\bar{k}\bar{h}, \ (\bar{k}+1)\bar{h}].$$

Надлежащим выбором коэффициентов c_{ijk} можно сделать систему (6.1) асимптотически устойчивой при любых достаточно малых $h_1, \ldots, h_l$ и $\tau_1, \ldots, \tau_s$.

В связи с изложенным возникают задачи: 1) рассмотреть вопрос о дискретной стабилизации для нестационарных систем, 2) рассмотреть вопрос о дискретной стабилизации с точки зрения уравнений в конечных разностях.

Система дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{x}/dt=P\mathbf{x}$$

может быть заменена системой в конечных разностях

$$\mathbf{x}((k+1)h)=\mathbf{x}(kh)+hP\mathbf{x}(kh)=(E+Ph)\mathbf{x}(kh),$$

решение которой можно сделать сколь угодно близким к решению исходной системы за счет выбора величины h.

Общий вид системы в конечных разностях

$$\mathbf{y}((k+1)h) = A_1\mathbf{y}(kh) + A_2\mathbf{b}u,$$

где управление u выбирается в виде линейных комбинаций вектора $\mathbf{y}(kh)$, либо $\mathbf{y}((k-j)h)$.

§ 7. Релейная стабилизация программного движения

1°. Рассмотрим сначала простой пример системы дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\begin{aligned} dx/dt &= x - y + ax(x^2+y^2), \\ dy/dt &= x + y + ay(x^2+y^2). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Точка $x=0$, $y=0$ является решением системы (7.1). Для исследования ее на устойчивость возьмем в качестве функции Ляпунова

$$V = x^2 + y^2. \tag{7.2}$$

Тогда

$$dV/dt = 2x(x-y) + 2y(x+y) = 2V$$

в силу линейного приближения системы (7.1). Имеем, что выполнены все условия теоремы о неустойчивости, следовательно, все интегральные кривые (7.1) удаляются от начала координат.

Положим параметр $a = -1/r^2$. Тогда

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{7.3}$$

будет интегралом системы (7.1). Полная производная функции $V(x, y)$ в силу системы (7.1)

$$dV/dt = 2V(1+aV) = 2V(1 - V/r^2), \tag{7.4}$$

и при $V > r^2$ она отрицательна. Следовательно, все траектории вне окружности (7.3) стремятся к этой окружности, в то время как внутри окружности все траектории удаляются от начала координат. Эта кривая—окружность—есть устойчивый предельный цикл.

Пусть r—достаточно малое число, $r<\varepsilon$. Тогда ясно, что все интегральные кривые попадают в ε-окрестность нуля. Такое явление очень часто наблюдается при стабилизации программного движения: программное движение неустойчиво по Ляпунову, но все движения стремятся в его достаточно малую окрестность.

2°. Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}). \tag{7.5}$$

Предположим, что система (7.5) имеет периодическое решение

$$y = \varphi(t) \tag{7.6}$$

периода T. Соответствующую этому решению интегральную кривую в фазовом пространстве обозначим через M. Под расстоянием от точки y до множества M понимается

$$\rho(y, M) = \inf_{x \in M} \|y - x\|,$$

где $\|z\| = \sqrt{z^* z}$.

Определение 7.1. *Периодическое движение* $y = \varphi(t)$ *называется периодическим автоколебанием, если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что при* $\rho(y_0, M) < \delta$ $\rho(y(t, y_0), M) < \varepsilon$ *для всех* $t \geqslant 0$ *и* $\rho(y(t, y_0), M \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Здесь $y(t, y_0)$ есть решение системы (7.5), проходящее через точку y_0 в момент $t = 0$.

Определение 7.2. *Периодическое движение* $y = \varphi(t)$ *называется орбитально устойчивым, если по* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что из* $\rho(y_0, M) < \delta$ *вытекает* $\rho(y(t, y_0), M) < \varepsilon$ *для всех* $t \geqslant 0$, *при этом* $\varphi(t)$ *называется орбитально асимптотически устойчивым, если число* $\delta(\varepsilon)$ *можно выбрать, к тому же так, чтобы* $\rho(y(t, y_0), M) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Теперь автоколебание можно определить так.

Определение 7.3. *Периодическое движение называется периодическим автоколебанием, если оно орбитально асимптотически устойчиво.*

Понятие орбитальной устойчивости можно наглядно пояснить геометрически, а именно: все движения, начинающиеся в начальный момент в достаточно малой окрестности M, остаются в сколь угодно малой окрестности M при $t \geqslant 0$. Ввиду того, что могут быть совершенно различные скорости движения изображающей точки вдоль каждой траектории, орбитальная устойчивость может иметь место и при отсутствии устойчивости по Ляпунову, в то время как устойчивость по Ляпунову влечет орбитальную устойчивость положительной полутраектории $y(t, y_0)$.

Известно, что инвариантное множество M состоит из целых траекторий системы (7.5). Если M есть ограниченное множество, то его естественно рассматривать как множество колебательных движений, описываемых системой (7.5). Будем считать M состоящим более чем из одной точки.

Определение 7.4. *Замкнутое, ограниченное, инвариантное множество* M *называется стабильным колебанием системы* (7.5), *если существуют такие* $\varepsilon > 0$ *и* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что при* $\rho(y_0, M) < \delta$ *будет* $\rho(y(t, y_0), M) < \varepsilon$ *при* $t \geqslant 0$.

Из определения 7.4 вытекает, что стабильным колебанием может быть периодическое, почти-периодическое или рекуррент-

[illegible] движение, а также любое движение, ограниченное при [illegible] $+\infty$).

Поясним несколько эти высказывания. Выделим из множества M такое непустое множество $M^{(0)}$, которое является инвариантным, замкнутым и ограниченным в силу ограниченности M и не содержит никакого собственного подмножества с такими же свойствами. Тогда по теореме Биркгофа оказывается, что все движения, входящие в $M^{(0)}$, будут рекуррентными. Если множество M есть стабильное колебание системы (7.5), то $M^{(0)}$—стационарное стабильное колебание (7.5).

Для описания стационарных колебаний можно использовать лишь такие функции, которые каким-то регулярным образом возвращаются в окрестность своих значений, однажды уже принятых этими функциями.

Определение 7.5 (почти-периодической функции). *Вещественная непрерывная функция* $\varphi(t)$, $t\in(-\infty, +\infty)$ *называется почти-периодической, если для любого* $\varepsilon>0$ *можно указать число* $L(\varepsilon)$ *такое, что в любом промежутке* $[\alpha, \alpha+L(\varepsilon)]$, $\alpha\in(-\infty, +\infty)$ *существует по крайней мере одно число* $\tau(\varepsilon)$ ($\tau(\varepsilon)$*—почти-период функции* $\varphi(t)$) такое, что для всех $t\in(-\infty, +\infty)$ *будет* $|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)|<\varepsilon$.

Определение 7.6 (рекуррентной функции). *Если в определении 7.5 существует число* $\tau=\tau(\varepsilon)$ *в зависимости от* t, *то функция* $\varphi(t)$ *в этом случае называется рекуррентной по Биркгофу.*

В результате наложения колебаний вида $a_k\cos\lambda_k t$, $b_k\sin\lambda_k t$, $k=0, 1, \ldots, n$, где $\lambda_0=0$, a_k, b_k, λ_k—вещественные числа, получим суммарное колебание вида

$$\varphi_n(t)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos\lambda_k t+b_k\sin\lambda_k t). \tag{7.7}$$

Если все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ оказываются попарно соизмеримыми, то накладывающиеся колебания имеют общий период ω, и, следовательно, функция (7.7) будет в этом случае ω-периодической.

Если же некоторые из величин $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ оказываются несоизмеримыми между собой, то в результате получается так называемое почти-периодическое колебание. При рассмотрении всех равномерных по отношению к $t\in(-\infty, +\infty)$ пределов всевозможных последовательностей вида (7.7) получим все почти-периодические функции.

В отличие от почти-периодических функций полная теория рекуррентных функций еще почти не разработана, в то время как наиболее общим случаем стационарного режима колебательного характера следует считать рекуррентное движение.

Определение 7.7. *Будем говорить, что интегральная кривая* $y(t, y_0)$ *стремится к стабильному колебанию, если*

существует такое число $T > 0$, *что* $\rho(\mathbf{y}(T, \mathbf{y}_0), M) < \delta$, *а тогда* $\rho(\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0), M) < \varepsilon$ *при любом* $t \geqslant T$, *где* ε *и* δ — *числа из определения* 7.4. *Число* ε *выступает в качестве меры отклонения от стабильного колебания* M.

Обратимся теперь к проблеме стабилизации программного движения с помощью релейного управления. Эта стабилизация будет осуществляться в результате возникновения в сколь угодно малой окрестности программного движения стабильных колебаний, обладающих тем свойством, что любое движение, начинающееся в некоторой фиксированной окрестности программного движения, стремится к упомянутому стабильному колебанию, причем мера отклонения от него ε может быть выбрана сколь угодно малой.

Пусть система в отклонениях от программного движения имеет вид

$$d\mathbf{y}/dt = A\mathbf{y} + \mathbf{b}u, \tag{7.8}$$

где $u = \varphi(\sigma)$, $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i y_i$,

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{при} \quad \sigma > -l, \\ -1 & \text{при} \quad \sigma < l. \end{cases} \tag{7.9}$$

Здесь управление при $\sigma \overline{\in} (-l, l)$ определяется однозначно. Будем считать, что любая интегральная кривая системы (7.8), начинающаяся при $t = 0$ в области $\sigma < l$, входит в область $\sigma < l$ при возрастании (убывании) времени при управлении $u = +1$. Тогда в области $-l < \sigma < l$ ее следует продолжать с тем же управлением.

Далее, если интегральная кривая (7.8) начинается при $t = 0$ в области $\sigma < -l$ и при возрастании (убывании) времени входит в область $\sigma > -l$ при $u = -1$, то и в этой области она должна продолжаться с управлением $u = -1$. Это соглашение принимается с учетом физической картины явления, описываемого системой (7.8), и однозначно определяет поведение интегральных кривых.

Для того чтобы задачу поведения системы (7.8) сделать вполне определенной в области $-l < \sigma < l$, требуется наряду с начальными данными движения указывать, какое именно из двух значений принимает управление u. Указание значения $\varphi(\sigma)$ определяется тем положением, например, рычажка реле, которое имеет место на самом деле. Эти обстоятельства позволяют определить однозначно все движения системы (7.8).

Теорема 7.1. *Если векторы*

$$\mathbf{b},\ A\mathbf{b},\ \ldots,\ A^{n-1}\mathbf{b} \tag{7.10}$$

линейно независимы, то существует такое релейное управление вида (7.9), *при котором в системе* (7.8) *при любом выборе* $l < l_0$

возникают стабильные колебания M в окрестности точки $\mathbf{y}=\mathbf{0}$. Здесь l_0 — достаточно малая положительная константа. Далее, любая интегральная кривая (7.8), начинающаяся в некоторой фиксированной окрестности точки $\mathbf{y}=\mathbf{0}$, при таком управлении будет стремиться к указанному стабильному колебанию, мера отклонения которого может быть сделана также сколь угодно малой.

Доказательство. В силу линейной независимости векторов (7.10) существует такой вектор $\mathbf{c}$, что собственные числа матрицы $A+\mathbf{bc}^*$ будут иметь отрицательные вещественные части. Тогда положение равновесия $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ системы

$$d\mathbf{y}/dt=(A+\mathbf{bc}^*)\mathbf{y} \tag{7.11}$$

асимптотически устойчиво по Ляпунову. Следовательно, можно выбрать положительно определенную квадратичную форму $V(\mathbf{y})$ так, чтобы

$$(\operatorname{grad} V)^*(A+\mathbf{bc}^*)\,\mathbf{y}=-\mathbf{y}^*\mathbf{y}. \tag{7.12}$$

Найдем полную производную dV/dt в силу системы (7.8) при управлении (7.9):

$$dV/dt=(\operatorname{grad} V)^*A\mathbf{y}+(\operatorname{grad} V)^*\mathbf{b}u. \tag{7.13}$$

Положим

$$\sigma=(\operatorname{grad} V)^*\mathbf{b}. \tag{7.14}$$

Ясно, что σ — линейная форма относительно переменных $y_1, \ldots, y_n$. Введем управление u_0

$$u_0=-\varphi(\sigma), \tag{7.15}$$

где функция $\varphi(\sigma)$ определяется по формуле (7.9) при σ из (7.14).

Запишем равенство (7.13) в виде

$$dV/dt=-\mathbf{y}^*\mathbf{y}+\sigma(u_0-\mathbf{c}^*\mathbf{y}) \tag{7.16}$$

в силу равенств (7.12), (7.14) и (7.15).

Покажем, что построенное управление u_0 (7.15) является таким, о существовании которого идет речь в теореме 7.1.

Заметим, что можно выбрать столь малую окрестность точки $\mathbf{y}=\mathbf{0}$, что $u_0-\mathbf{c}^*\mathbf{y}$ будет иметь такой же знак, как и функция $u_0=-\varphi(\sigma)$, т. е. существует $\varepsilon>0$ такое, что при $\|\mathbf{y}\|<\varepsilon$ будет $\operatorname{sign}(u_0-\mathbf{c}^*\mathbf{y})=\operatorname{sign} u_0$. Тогда в этой же окрестности функция $\sigma(u_0-\mathbf{c}^*\mathbf{y})$ принимает отрицательные значения при $\sigma\overline{\in}(-l, l)$ и l достаточно малом. При $\sigma\in(-l, l)$ ничего определенного сказать нельзя.

Возьмем произвольные $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2\leqslant\varepsilon$. Пусть

$$\lambda_i=\inf_{\|\mathbf{y}\|=\varepsilon_i} V(\mathbf{y}),\quad i=1, 2.$$

Выберем числа $\delta_i > 0$, $\delta_i < \varepsilon_i$ такими, чтобы $V(y) < \lambda_i$ при $\|y\| < \delta_i$. Теперь можно выбрать l столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$-\delta_1^2 + l\alpha < 0, \qquad (7.17)$$

где $\alpha \doteq |u_0 - c^* y| < 2$, так как рассматриваем окрестность $\|y\| < \varepsilon$.

При таком выборе $l < l_0$ в силу (7.16) и (7.17) будет

$$dV/dt \leqslant 0 \quad \text{при} \quad \delta_1 \leqslant \|y\| \leqslant \varepsilon. \qquad (7.18)$$

Любая интегральная кривая системы (7.8), начинающаяся в области $\|y_0\| < \delta_2$, при управлении (7.15) будет оставаться в области $\|y\| < \varepsilon_2$.

Пусть это не так. Тогда существуют такие два момента времени t_1, t_2 $(0 < t_1 < t_2)$, что $\|y(t_1, y_0)\| = \delta_2$, $\|y(t_2, y_0)\| = \varepsilon_2$ и $\delta_2 \leqslant \|y(t, y_0)\| \leqslant \varepsilon_2$ при $t \in [t_1, t_2]$.

Для этих моментов t_1 и t_2 будет $V(y(t_1, y_0)) < \lambda_2$ и $V(y(t_2, y_0)) \geqslant \lambda_2$; следовательно, функция $V_1(t) = V(y(t, y_0))$ должна иметь неотрицательную производную в промежутке $[t_1, t_2]$, что противоречит условию (7.18). Таким образом, для любых $\|y_0\| < \delta_2$ будет $\|y(t, y_0)\| < \varepsilon_2$ при $t \geqslant 0$. Возьмем любую точку y_0 такую, что $\|y_0\| < \delta_2$. Утверждается, что существует конечный момент T такой, что интегральная кривая $y(t, y_0)$ выходит в область $\|y\| \leqslant \delta_1$ при $t = T$ и, следовательно, остается при $t > T$ в области $\|y\| < \varepsilon$. Действительно, в случае $\delta_2 < \delta_1$ это очевидно. При $\delta_2 > \delta_1$ пусть $\|y(t, y_0)\| > \delta_1$ при любом $t > 0$. Вдоль исследуемой интегральной кривой в этом случае (7.18) выполняется неравенство

$$dV/dt < -\delta_1^2 + \alpha l < 0,$$

откуда интегрированием получаем

$$V(y(t, y_0)) \leqslant V(y_0) + t(-\delta_1^2 + \alpha l). \qquad (7.19)$$

Левая часть (7.19) с ростом t стремится $k - \infty$, что противоречит положительной определенности функции $V(y)$. Это противоречие и доказывает наше утверждение, причем указанное T будет удовлетворять неравенству

$$T < T_1 = \frac{V(y_0)}{\delta_1^2 - \alpha l}.$$

Покажем теперь, что множество M стабильных колебаний расположено в области $\|y\| < \varepsilon_1$. Обозначим через M_{y_0} множество всех ω-предельных точек интегральной кривой $y(t, y_0)$ и найдем

$$M = \bigcup_{\|y_0\| < \delta} M_{y_0}.$$

Определение 7.8. *Точка $\bar{y}$ фазового пространства называется ω-предельной точкой точки y_0, если существует последовательность моментов времени $\{t_n\}$, $t_n \to +\infty$ при $n \to \infty$ такая, что*

$$\bar{y} = \lim_{n \to \infty} y(t_n, y_0).$$

Если же $t_n \to -\infty$, то точка $\bar{y} = \lim_{n \to +\infty} y(t_n, y_0)$ называется α-предельной точкой точки y_0.

Отметим, что если решение $y(t, y_0)$ ограничено при $t \geqslant 0$, то его ω-предельное множество M не пусто и является замкнутым, ограниченным и инвариантным множеством. Ясно, что $M \subset \{y: \|y\| < \varepsilon_1\}$. Выбор ε_1 и ε_2 был произвольным. Можно взять $\varepsilon_1 < \delta_2 < \varepsilon_2$. Положим $\bar{\delta} = \delta_2 - \varepsilon_1$ и $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Тогда все интегральные кривые, начинающиеся в $\bar{\delta}$-окрестности множества M, при неограниченном возрастании времени остаются в $\bar{\varepsilon}$-окрестности; следовательно, M является стабильным колебанием. Теорема доказана полностью.

Замечание. Вместо вектора $\mathbf{b}$ можно рассмотреть $(n \times r)$ матрицу B; при этом все рассуждения остаются в силе. Для системы (7.8) при управлении (7.9) $y = 0$ не является положением равновесия.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dy}{dt} = Ay + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{b}_j u_j, \tag{7.20}$$

и пусть $|u_j| \leqslant 1$.

Возьмем положительно определенную квадратичную форму $V(y)$ и рассмотрим задачу об оптимальном демпфировании этой функции. Оптимальное управление в этом случае будет

$$u_j = -\operatorname{sign} \sigma_j,$$

где $\sigma_j = (\operatorname{grad} V)^* \mathbf{b}_j$.

В этих случаях, если определить управление по (7.9), вновь полученная система при достаточно малых l_j, $j = 1, 2, \ldots, r$ будет сколь угодно близкой к системе, оптимальной по отношению к демпфированию функции $V(y)$. Все ее интегральные кривые стремятся при $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ к стабильному колебанию, расположенному в достаточно малой окрестности точки $y = 0$.

Возникает задача: определить, какое же колебание имеет место в системах с управлением, имеющим петлю гистерезиса, точнее: 1) найти необходимые и достаточные условия наличия периодического автоколебания в системе (7.20), рассмотреть вопрос об его единственности; 2) выяснить возможность почти-периодического и рекуррентного движений в такой системе.

Глава II

ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

§ 8. Понятие оптимальности

1°. Пусть задано некоторое множество M элементов p, природа которых безразлична.

Определение 8.1. *Если задан закон или некоторое правило, согласно которому любому элементу $p \in M$ соответствует вещественное число $V(p)$, то говорят, что на множестве M задан функционал V.*

Предположим, что на множестве M заданы функционалы $V_0, V_1, V_2, \ldots, V_k$.

Определение 8.2. *Элемент $p_0 \in M$ называется оптимальным элементом множества M по отношению к выбранной совокупности функционалов V_j, $j=1, 2, \ldots, k$, или просто оптимальным, если среди всех значений $p \in M$ элемент p_0 доставляет наименьшее возможное значение функционалу V_0 при условии выполнения ограничений $V_j \leqslant l_j, j=1, 2, \ldots,$ где l_j — некоторые вещественные числа.*

Обозначим через M_0 множество всех оптимальных элементов. Множество M_0 будем называть оптимальным подмножеством множества M. Ясно, что при $V_0(p)=1$ для любого $p \in M$ оптимальное подмножество M_0 будет состоять из всех тех, которые удовлетворяют ограничениям

$$V_j(p) \leqslant l_j, \quad j=1, 2, \ldots, k.$$

Пример 8.1. Рассмотрим систему

$$\dot{x}=f(x, u, t). \tag{8.1}$$

Предположим, что заданы две точки x_0, x_1 в фазовом пространстве системы (8.1) и множество M всех измеримых функций, ограниченных по модулю единицей.

Требуется выбрать управление $u \in M$ так, чтобы интегральная кривая системы (8.1), начинающаяся при $t=t_0$ в точке x_0, за минимально возможное время достигала точки x_1. Здесь в качестве функционалов V_j, $j=0, 1, \ldots, k$, можно взять $V_0=t-t_0$, $V_j=x_j(t, t_0, x_0, u)-x_j^{(1)}$, $j=1, 2, \ldots, n$.

Требуется найти управление $u \in M$ так, чтобы V_0 принимал минимальное значение при условии $V_j=0$, $j=1, 2, \ldots, n$.

Основной задачей теории управления является отыскание множества M_0. Эта задача в общем случае сводится к нахождению экстремума функции многих переменных. Оставляя в стороне

доказательство этого утверждения, заметим, что оно позволяет вывести ряд необходимых и достаточных условий оптимальности, которые используются для построения последовательных приближений, позволяющих отыскивать с наперед заданной точностью оптимальные элементы.

2°. Пусть задана управляемая система

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{u}),\quad \mathbf{x}\in E_n,\quad \mathbf{u}\in U, \tag{8.2}$$

где U — множество r-мерного евклидова пространства E_r.

Пусть каждому кусочно-непрерывному управлению $\mathbf{u}(t)$, заданному при $t\in[t_1,\ t_2]$, $\mathbf{u}(t)\in U$, соответствует кусочно-непрерывно дифференцируемая функция $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\ \mathbf{u})$, заданная при $t\in[t_1,\ t_2]$ и удовлетворяющая системе (8.2) при $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$. Говорят, что управление $\mathbf{u}(t)$ переводит систему (8.2) из состояния $\mathbf{x}_1$ в $\mathbf{x}_0$ за время t_2-t_1, если $\mathbf{x}_i=\mathbf{x}(t_i,\ \mathbf{u})$, $i=1,\ 2$.

Управление $\mathbf{u}(t)$ будем называть *допустимым*, если определяемое им движение удовлетворяет граничным условиям

$$g_j(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ t_1,\ t_2)=0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k. \tag{8.3}$$

Допустимое управление $\mathbf{u}_0(t)$ будем называть *оптимальным по отношению к функционалу*

$$J(\mathbf{u})=g_0(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ t_1,\ t_2)+\int_{t_1}^{t_2} f_0(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t)\,dt, \tag{8.4}$$

если функционал (8.4) принимает наименьшее возможное значение среди всех допустимых управлений.

Задачу отыскания оптимальных управлений и соответствующих им оптимальных движений для функционала (8.4) называют иногда в вариационном исчислении *задачей Больца*.

Предположим, что оптимальное управление $\mathbf{u}_0(t)$ существует. Обозначим через $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ соответствующее ему движение.

Будем считать, что это управление и движение заданы на промежутке $[t_1,\ t_2]$, и система при этом переходит из состояния $\mathbf{x}_1$ в состояние $\mathbf{x}_2$ с соблюдением граничных условий (8.3). Найдем необходимые условия оптимальности, опирающиеся на условия минимума функции одного переменного. С этой целью предположим, что существует семейство управлений $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t,\ \varepsilon)$, и пусть $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\ \varepsilon)$ — соответствующее ему семейство движений. Пусть эти семейства удовлетворяют условиям:

1) вектор-функции $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t,\ \varepsilon)$ заданы при всех достаточно малых ε и при $t\in[t_1(\varepsilon),\ t_2(\varepsilon)]$ кусочно-непрерывны по отношению к t; вектор-функция $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\ \varepsilon)$ задана при всех достаточно малых ε, при $t\in[t_1(\varepsilon),\ t_2(\varepsilon)]$ кусочно-непрерывно дифференцируема по отношению к t и удовлетворяет системе (8.2);

2) $\mathrm{u}(t,\ \varepsilon)=\mathrm{u}_0(t)$, $\mathrm{x}(t,\ \varepsilon)=\mathrm{x}^0(t)$ при $\varepsilon=0$, $\mathrm{u}(t,\ \varepsilon)\in U$ для всех достаточно малых ε и $t\in[t_1(\varepsilon),\ t_2(\varepsilon)]$;

3) управление $\mathrm{u}(t,\varepsilon)$ допустимо при любом достаточно малом ε, т. е. $g_j(\mathrm{x}_1(t_1(\varepsilon),\ \varepsilon),\ \mathrm{x}_2(t_2(\varepsilon),\ \varepsilon),\ t_1(\varepsilon),\ t_2(\varepsilon))=0$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$;

4) существуют производные $\frac{d}{d\varepsilon}\mathrm{u}(t,\ \varepsilon)=\eta(t)$, $\frac{d\mathrm{x}(t,\varepsilon)}{d\varepsilon}=\xi(t)$, $\frac{dt_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\tau_i$, $i=1,\ 2$ при $\varepsilon=0$, где $\eta(t)$—кусочно-непрерывная вектор-функция; $\xi(t)$—кусочно-непрерывная дифференцируемая функция; τ_i—вещественные числа; $\eta(t)$ обычно называют вариацией управления, а $\xi(t)$—вариацией движения.

Значение функционала (8.4), вычисленного на семействе управлений $\mathrm{u}(t,\ \varepsilon)$ будем считать непрерывно дифференцируемой функцией параметра ε. Эта функция $J(\mathrm{u}(t,\ \varepsilon))=\varphi(\varepsilon)$ будет иметь минимум при $\varepsilon=0$. Следовательно, $d\varphi/d\varepsilon=0$ при $\varepsilon=0$. Последнее равенство представляет собой необходимое условие оптимальности управления $\mathrm{u}_0(t)$ и движения $\mathrm{x}^0(t)$.

Произведем ряд преобразований над этим условием с тем, чтобы его записать в явной форме. Обозначим через ξ_i, $i=1,2$, значение вектора ξ на концах промежутка t_1 и t_2. Тогда

$$\frac{d\mathrm{x}(t_i(\varepsilon),\ \varepsilon)}{d\varepsilon}=\xi_i+\mathrm{f}(t_i,\ \mathrm{x}^0(t_i),\ \mathrm{u}_0(t_i))\tau_i,\quad i=1,\ 2,\quad \text{при}\quad \varepsilon=0.$$

Дифференцируя функционал (8.4), найдем

$$g_{0x_1}\xi_1+g_{0x_2}\xi_2+[g_{0t_1}+g_{0x_1}\cdot\mathrm{f}(t_1,\mathrm{x}^0(t_1),\mathrm{u}_0(t_1))-f_0(t_1,\mathrm{x}^0(t_1),\mathrm{u}_0(t_1))]\tau_1+$$
$$+[g_{0t_2}+g_{0x_2}\mathrm{f}(t_2,\ \mathrm{x}^0(t_2),\ \mathrm{u}_0(t_2))+f_0(t_2,\ \mathrm{x}^0(t_2),\ \mathrm{u}_0(t_2))]\tau_2+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}(f_{0x}\xi+f_{0u}\eta)\,dt=0. \quad (8.5)$$

Поставим $\mathrm{u}(t,\ \varepsilon)$ в систему (8.2) и продифференцируем по ε. Тогда, полагая $\varepsilon=0$, получим

$$\dot{\xi}=fx\xi+fu\eta. \quad (8.6)$$

Дифференцируя граничные условия по ε и полагая $\varepsilon=0$, найдем

$$g_{jx_1}\xi_1+g_{jx_2}\xi_2+[g_{jt_1}+g_{jx_1}f(t_1,\ \mathrm{x}^0(t_1),\ \mathrm{u}_0(t_1))]\tau_1+$$
$$g_{jt_2}+g_{jx_2}\mathrm{f}(t_2,\ \mathrm{x}^0(t_2),\ \mathrm{u}_0(t_2))]\tau_2=0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \quad (8.7)$$

В формулах (8.5)—(8.7) через g_{0x_1}, g_{0x_2}, g_{jx_1}, f_x, f_u обозначены соответственно матрицы Якоби, получаемые при дифференцировании по компонентам векторов, указанных в индексах и вычисленных при $\mathrm{u}=\mathrm{u}_0(t)$ и $\mathrm{x}=\mathrm{x}^0(t)$. Например, g_{0x_1} есть одностолбцовая матрица с элементами

$$\frac{\partial}{\partial x_{11}}g_0(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2,\ t_1,\ t_2),\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x_{1n}}g_0(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2,\ t_1,\ t_2).$$

Обозначим через Y фундаментальную систему решений для однородной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi} = f_x \xi \tag{8.8}$$

с начальным условием $Y(t_1) = E$, где E—единичная матрица. Тогда получим

$$\xi(t) = Y(t)\,\xi_1 + \int_{t_1}^{t} Y(t)\,Y^{-1}(\tau)\,f_u \eta\,d\tau \tag{8.9}$$

и соответственно

$$\xi_2 = Y(t_2)\,\xi_1 + \int_{t_1}^{t_2} Y(t_2)\,Y^{-1}(\tau)\,f_u \eta\,d\tau. \tag{8.10}$$

Условия (8.5)—(8.7), (8.9), (8.10) представляют собой необходимые условия оптимальности в развернутой форме для управления $u_0(t)$ и движения $x^0(t)$. Естественно, в такой форме эти условия оптимальности не используются.

Сделаем дальнейшее предположение. Пусть семейства $x(t, \varepsilon)$, $u(t, \varepsilon)$, указанные выше, существуют при любом выборе величин ξ_i, τ_i и любом выборе кусочно-непрерывной вектор-функции $\eta(t)$. Однако ясно, требуется выполнение условий (8.5)—(8.7), (8.9), (8.10). Исключая векторы $\xi(t)$ и ξ_2 из (8.5) и (8.7), найдем

$$\begin{aligned}
&[g_{0x_1} + g_{0x_2} Y(t_2)]\,\xi_2 + [g_{0t_1} + g_{0x_1}\cdot f(t_1,\ x^0(t_1),\ u_0(t_1)) - \\
&\quad - f_0(t_1,\ x^0(t_1),\ u_0(t_1))]\,\tau_1 + [g_{0t_2} + g_{0x_2}\cdot f(t_2,\ x^0(t_2),\ u_0(t_2)) + \\
&\quad + f_0(t_2,\ x^0(t_2),\ u_0(t_2))]\,\tau_2 + g_{0x_2} Y(t_2) \int_{t_1}^{t_2} Y^{-1}(\tau)\,f u \eta\,d\tau + \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} f_{0x} Y\,dt\,\xi_1 + \int_{t_1}^{t_2}\left[f_{0x}\int_{t_1}^{t} Y(t)\,Y^{-1}(\tau)\,f_{0u}\eta\,d\tau + f_{0u}\eta\right]dt = 0.
\end{aligned}$$

Переставляя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned}
&\left[g_{0x_1} + g_{0x_2} Y(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} f_{0x} Y\,dt\right]\xi_1 + [g_{0t_1} + g_{0x_1} f(t_1,\ x^0(t_1),\ u_0(t_1)) - \\
&\quad - f_0(t_1,\ x^0(t_1),\ u_0(t_1))]\,\tau_1 + [g_{0t_2} + g_{0x_2} f(t_2,\ x^0(t_2),\ u_0(t_2)) + \\
&\quad + f_0(t_2,\ x^0(t_2),\ u_0(t_2))]\,\tau_2 + \int_{t_1}^{t_2} \varkappa(t)\,\eta(t)\,dt = 0,
\end{aligned} \tag{8.11}$$

где

$$\varkappa(t) = g_{0x_2} Y(t_2)\,Y^{-1}(t)\,f_u + f_{0u} + \int_{t_1}^{t_2} f_{0x} Y(\tau)\,d\tau\,Y^{-1}(t)\,f_{0u}.$$

При исключении ξ_2 из (8.7) запишем

$$[g_{jx_1}+g_{jx_2}Y(t_2)]\xi_1+[g_{jt_1}+g_{jx_1}\cdot f(t_1,\ x^0(t_1),\ u_0(t_1))]\tau_1+ \\ +[g_{jt_2}+g_{jx_2}f(t_2,\ x^0(t_2),\ u_0(t_2))]\tau_2+ \\ +g_{jx_2}\int_{t_1}^{t_2}Y(t_2)Y^{-1}(\tau)f_u\eta\,d\tau=0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{8.12}$$

Положим в (8.11) и в (8.12) $\eta=0$; тогда получим

$$\left[g_{0x_1}+g_{0x_2}Y(t_2)+\int_{t_1}^{t_2}f_{0x}Y\,dt\right]\xi_1+ \\ +[g_{0t_1}+g_{0x_2}f(t_1,\ x^0(t_1),\ u_0(t_1))-f_0(t_1,\ x^0(t_1),\ u_0(t_1))]\tau_1+ \\ +[g_{0t_2}+g_{0x_1}f(t_2,\ x^0(t_2),\ u_0(t_2))+f_0(t_2,\ x^0(t_2),\ u(t_2))]\tau_2=0, \tag{8.13}$$

$$[g_{jx_2}+g_{jx_2}Y(t_2)]\xi_1+[g_{jt_1}+g_{jx_1}f(t_1,\ x^0(t_1),\ u_0(t_1))]\tau_1+ \\ +[g_{jt_2}+g_{jx_2}f(t_2,\ x^0(t_2),\ u_0(t_2))]\tau_2=0. \tag{8.14}$$

Будем рассматривать компоненты вектора ξ_1 и величины τ_1, τ_2 как вещественные переменные. Тогда ранг матрицы системы уравнений (8.13)—(8.14) оказывается меньше числа уравнений. Действительно, предположим противное. Пусть ранг системы (8.13)—(8.14) совпадает с числом уравнений. Обозначим через S_j, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$, левые части уравнений; рассмотрим систему

$$S_0=\alpha,\ S_1=0,\ \ldots,\ S_k=0,$$

где α — некоторая положительная постоянная. Непременно существует вектор ξ_1 и величины τ_1 и τ_2, удовлетворяющие этой системе. Согласно предположению будет существовать семейство управлений $u=u(t,\ \varepsilon)$ и семейство движений $x=x(t_1,\varepsilon)$, отвечающее вариации $\eta=0$ и найденным значениям $\xi_1(\alpha,\tau_1(\alpha),\ \tau_2(\alpha))$. При этом семейство $u(t,\varepsilon)$ будет допустимым и $u(t,0)=u_0$. Тогда, с одной стороны, должно быть

$$\left.\frac{dJ}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0,$$

и, с другой стороны,

$$\left.\frac{dJ}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\alpha>0.$$

Следовательно, предположение о том, что ранг системы (8.13), (8.14) совпадает с числом уравнений, неверно. Итак, существуют вещественные постоянные $l_0,\ l_1,\ \ldots,\ l_k$, одновременно не равные нулю, такие, что вектор, составленный из них, ортогонален к любому столбцу матрицы системы (8.13), (8.14). Иначе говоря,

будут иметь место соотношения

$$l_0\left[g_{0x_1}+g_{0x_2}Y(t_2)+\int_{t_1}^{t_2} f_{0x}Y\,dt\right]+\sum_{j=1}^{k} l_j[g_{jx_1}+g_{jx_2}Y(t_2)]=0, \qquad (8.15)$$

$$l_0[g_{0t_1}+g_{0x_2}\mathfrak{f}(t_1,\ \mathrm{x}^0(t_1),\ \mathrm{u}_0(t_1))-f_0(t_1,\ \mathrm{x}^0(t_1),\ \mathrm{u}_0(t_1))]+ \\ +\sum_{j=1}^{k} l_j[g_{jt_1}+g_{jx_1}\mathfrak{f}(t_1,\ \mathrm{x}^0(t_1),\ \mathrm{u}_0(t_1))]=0, \qquad (8.16)$$

$$l_0[g_{0t_2}+g_{0x_2}\mathfrak{f}(t_2,\ \mathrm{x}^0(t_2),\ \mathrm{u}_0(t_2))+f_0(t_2,\ \mathrm{x}^0(t_2),\ \mathrm{u}_0(t_2))]+ \\ +\sum_{j=1}^{k} l_j(g_{jt_2}+g_{jx_2}\mathfrak{f}(t_2,\ \mathrm{x}^0(t_2),\ \mathrm{u}_0(t_2))]=0. \qquad (8.17)$$

Условия (8.15)—(8.17) называются условиями трансверсальности.

Умножим теперь равенство (8.11) на l_0, а равенство (8.12) на l_j и почленно сложим полученные результаты. Учитывая условие трансверсальности, получим

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[l_0\varkappa+\sum_{j=1}^{k} l_j g_{jx_2}Y(t_2)Y^{-1}(t)f_u\right]\eta\,dt=0. \qquad (8.18)$$

Положим теперь

$$\eta=\left[l_0\varkappa+\sum_{j=1}^{k} l_j g_{jx_2}Y(t_2)Y^{-1}(t)f_u\right].$$

Тогда (8.18) примет вид $\int_{t_1}^{t_2}\eta^2\,dt=0$, а из кусочной непрерывности функции η вытекает, что

$$l_0\varkappa+\sum_{j=1}^{k} l_j g_{jx_2}Y(t_2)Y^{-1}(\tau)f_u=9. \qquad (8.19)$$

Условие (8.19) является окончательным видом необходимого условия оптимальности управления $\mathrm{u}_0(t)$ и движения $\mathrm{x}_0(t)$. Оно рассматривается совместно с условиями трансверсальности (8.15)—(8.17).

Выразим теперь условия (8.19) с помощью множителей Лагранжа. Условия (8.19) можно записать в форме

$$l_0 f_{0u}+\lambda f_u=0_1, \qquad (8.20)$$

где

$$\lambda=Y^{*-1}(t)Y^*(t_2)\lambda_2+l_0\int_{t_1}^{t_2} Y^{*-1}(t)Y^*(\tau)\,d\tau. \qquad (8.21)$$

Легко видеть, что векторная функция λ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\lambda} = -f_x^* \lambda - l_0 f_{0x}^* \tag{8.22}$$

и условию $\lambda = \lambda_2$ при $t = t_2$, где

$$\lambda_2 = g_{x_2}^* l; \tag{8.23}$$

при этом $g = (g_0, g_1, \ldots, g_k)$; $l = (l_0, l_1, \ldots, l_k)$.

Если положить $\lambda_0 = l_0$ и $H = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j$, то окажется, что величины x_j и компоненты вектора связаны между собой системой Гамильтона

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_j}, \qquad \frac{d\lambda_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.24}$$

При этом для координаты x_0 имеем

$$x_0(t) = g_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_1, t_2) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\, dt.$$

Условия (8.19) через функцию H могут быть записаны в форме

$$\partial H / \partial u_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{8.25}$$

Итак, необходимые условия оптимальности управления $\mathbf{u}_0(t)$ и движения $\mathbf{x}^0(t)$ могут быть сформулированы следующим образом.

Если $\mathbf{u}(t)$ есть оптимальное управление и соблюдены условия существования упомянутого семейства $\mathbf{u}(t, \varepsilon)$, то существуют кусочно-непрерывно дифференцируемые функции $\lambda_j(t)$, связанные с оптимальным движением системой Гамильтона (8.24), при этом имеет место условие (8.25), а также выполнены условия трансверсальности (8.15)—(8.17) и (8.23).

3°. Пусть задана управляемая система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{8.26}$$

где $\mathbf{x} \in E_n$, $\mathbf{u}$ — r-мерный вектор управления, $\mathbf{u} \in U$, $U \in F_r$. Будем предполагать, что $\mathbf{f}(t, 0, 0) = 0$.

Пусть задан функционал

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \int_0^{\infty} \omega(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\, dt. \tag{8.27}$$

Управление $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ будем называть *допустимым*, если система (8.26) при этом управлении имеет асимптотически устойчивое положение равновесия $\mathbf{x}=0$ и функционал (8.27) существует, во всяком случае, для начального вектора $\mathbf{x}_0$, расположенного в достаточно малой области, содержащей это положение равновесия.

Допустимое управление $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0(t, \mathbf{x})$ будем называть *оптимальным*, если оно доставляет функционалу $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ наименьшее возможное значение среди всех допустимых управлений при любом выборе начального вектора $\mathbf{x}_0$ из некоторой достаточно малой окрестности точки $\mathbf{x}=0$.

Пусть $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ есть допустимое управление. Положим

$$V(t, \mathbf{x})=\int_t^\infty \omega(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\,dt. \tag{8.28}$$

Очевидно, что

$$V(0, \mathbf{x}_0)=J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}). \tag{8.29}$$

Функция $V(t, \mathbf{x})$ есть функция Ляпунова. Р. Беллман предложил использовать такого рода функции для построения оптимального управления и оптимального движения с помощью сформулированного им принципа оптимальности. Содержание принципа оптимальности Беллмана заключается в следующем. Если некоторое движение соединяет точки A и C и является оптимальным, то движение, соединяющее точки B и C, будет также оптимальным при любом выборе точки B на оптимальной траектории AC. В общем случае этот принцип оптимальности является неправомерным. Однако в тех случаях, когда он оказывается справедливым, его можно успешно использовать для построения оптимального управления и оптимального движения. Для справедливости следует заметить, что установление правомерности принципа Беллмана не всегда является простым делом.

Итак, предположим, что в сформулированной выше задаче этот принцип справедлив, и пусть $\mathbf{u}_0(t, \mathbf{x})$ есть оптимальное управление и $V_0(t, \mathbf{x})$ — соответствующая ему функция Ляпунова. Положим

$$A=(t, \mathbf{x}^0(t)), \qquad C=(+\infty, 0), \qquad B=(t+s, \mathbf{x}^0(t+s)).$$

При допустимом управлении $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ запишем

$$V_0(t, \mathbf{x})\leqslant V(t, \mathbf{x})=\int_t^\infty \omega(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{u})\,d\tau=$$

$$=\int_t^{t+s} \omega(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{u})\,d\tau+\int_{t+s}^\infty \omega(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{u})\,d\tau.$$

Если точка B находится на оптимальной траектории, то

$$\int_{t+s}^{\infty} \omega(\tau, \mathrm{x}^0, \mathrm{u}_0)\, d\tau = V_0(t+s, \mathrm{x}(t+s)).$$

Отсюда

$$V_0(t, \mathrm{x}) \leqslant \int_{t}^{t+s} \omega(\tau, \mathrm{x}, \mathrm{u})\, d\tau + V_0(t+s, \mathrm{x}(t+s)) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t}^{t+s} \omega(\tau, \mathrm{x}, \mathrm{u})\, d\tau + V(t+s, \mathrm{x}(t+s)).$$

Это неравенство, согласно предположению, имеет место для любого $s \geqslant 0$. При $s=0$ правая часть его принимает наименьшее возможное значение, поэтому производная по s, вычисленная в точке $s=0$, должна быть неотрицательной. Следовательно,

$$\omega(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) + \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^* f(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) \geqslant 0. \qquad (8.30)$$

Из определения функции Ляпунова $V_0(t, \mathrm{x})$ также

$$dV_0/dt = -\omega(t, \mathrm{x}^0, \mathrm{u}_0),$$

откуда

$$\omega(t, \mathrm{x}^0, \mathrm{u}_0) + \frac{\partial V_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)^* f(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}_0). \qquad (8.31)$$

Отсюда вытекает, что оптимальное управление доставляет функции

$$H(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) = \omega(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) + \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^* f(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}), \qquad (8.32)$$

наименьшее возможное значение, равное нулю.

Пусть функция $\mathrm{u}_0(t, \mathrm{x})$ и V_x доставляют минимум функции $H(t, \mathrm{x}, \mathrm{u})$. Исключим с ее помощью величину $\mathrm{u}_0(t, \mathrm{x})$ из равенства (8.31). Тогда получим уравнение в частных производных, которое называется часто *уравнением Беллмана*.

Если функция $V(t, \mathrm{x})$ дважды непрерывно дифференцируема и является внутренней точкой множества U, то условие минимума функции $H(t, \mathrm{x}, \mathrm{u})$ можно записать в виде равенств

$$\frac{\partial}{\partial u_j} H(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (8.33)$$

Положим

$$\lambda_j = \partial V_0/\partial x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Дифференцируя (8.31) по x_j и используя (8.33), находим

$$\dot{\lambda} + f_x^* \lambda + \omega_x^* = 0. \qquad (8.34)$$

Обозначая $\omega = f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ и полагая $\lambda_0 = 1$, найдем, что величины λ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, и компоненты вектора x_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, будут связаны системой Гамильтона

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial \lambda_j}, \quad \dot{\lambda}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{8.35}$$

причем $x_0(t) = \int\limits_0^t \omega(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)\,dt$.

Итак: подход к отысканию условий оптимальности, предложенный Беллманом, приводит к тем же соотношениям, что и вариационное исчисление. Однако в основе всех рассуждений лежит условие минимума функции одного переменного на границе области ее задания.

Покажем теперь тот случай, когда использованный выше принцип оптимальности не является правомерным.

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \alpha^2 \int\limits_0^{2\pi} (y - \sin t)^2\,dt + \left(\int\limits_0^{2\pi} y\,dt\right)^2.$$

Требуется найти минимум этого функционала в классе непрерывных функций, заданных при $t \in (-\infty, +\infty)$. Ясно, что $y = \sin t$ доставляет наименьшее возможное значение функционалу $J(y)$. Положим

$$A = (0, 0), \qquad B = (\pi, 0), \qquad C = (2\pi, 0).$$

Тогда

$$J_{BC}(y) = \alpha^2 \int\limits_0^{2\pi} (y - \sin t)^2\,dt + \left(\int\limits_\pi^{2\pi} y\,dt\right)^2.$$

При $y = \sin t$ будет

$$J_{BC}(\sin t) = 4,$$

в то время как при $y = 0$ имеем

$$J_{BC}(0) = \alpha^2\pi/2.$$

Следовательно, при достаточно малом α будет

$$J_{BC}(0) \leqslant J_{BC}(\sin t).$$

Это и означает, что принцип оптимальности в данном случае оказывается не имеющим места.

§ 9. Экстремум функции многих переменных

1°. Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, принимающая вещественные значения, задана при любых вещественных значениях своих аргументов. Будем считать эту функцию в дальнейшем непрерывно дифференцируемой при всех конечных значениях $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Определение 9.1. *Точку* $\mathbf{x}_0$ *будем называть точкой строгого минимума, если можно указать такое число* $\varepsilon > 0$, *что при всех* $\mathbf{x}$, *удовлетворяющих неравенству*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon \tag{9.1}$$

будет

$$f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0. \tag{9.2}$$

Здесь $\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}$.

Определение 9.2. *Будем говорить, что в точке* $\mathbf{x}_0$ *функция* $f(\mathbf{x})$ *принимает наименьшее возможное значение, если неравенство* (9.2) *имеет место при любом выборе* $\mathbf{x}$. *Точку* $\mathbf{x}_0$ *в этом случае называют оптимальной, а* $f_0 = f(\mathbf{x}_0)$ — *оптимальным значением функции* $f(\mathbf{x})$.

Пусть в n-мерном пространстве E_n задана точка, движущаяся с постоянной по величине скоростью

$$\frac{dx_s}{dt} = u_s, \quad \sum_{s=1}^{n} u_s^2 = 1, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{9.3}$$

В начальный момент $t = t_0$, предположим, она находится в точке $\bar{\mathbf{x}}$, не являющейся оптимальной для функции $f(\mathbf{x})$. Поставим вопрос о том, в каком направлении при движении точки из $\bar{\mathbf{x}}$ функция $f(\mathbf{x})$ возрастает (убывает) с наибольшей скоростью. Известно, что такое направление определяется направлением градиента функции $f(\mathbf{x})$, вычисленного в точке $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$, т. е. вектора

$$\nabla f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\bigg|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \right\}.$$

Действительно, если направление луча, выходящего из точки $\mathbf{x}$, определить вектором $L = \{l_1, \ldots, l_n\}$, то уравнение этого луча можно представить в виде

$$x_s = \bar{x}_s + l_s t, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \quad t \geqslant 0. \tag{9.4}$$

Скорость возрастания функции $f(\mathbf{x})$ вдоль луча в точке $\bar{\mathbf{x}}$ определяется формулой

$$\frac{df}{dt}\bigg|_{t=0} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_s} l_s. \tag{9.5}$$

Ясно, что правая часть (9.5) имеет наибольшее значение при

$$l_s = \frac{\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}\right)^2}}. \tag{9.6}$$

Формула (9.6) дает выражение компонент единичного вектора, направленного по градиенту функции $f(\mathrm{x})$. Очевидно, что направление, в котором функция $f(\mathrm{x})$ при движении из точки $\bar{\mathrm{x}}$ имеет наибольшую скорость убывания, обратно направлению вектора (9.6). Это свойство градиента $f(\mathrm{x})$ положено в основу ряда методов численного отыскания точек, в которых $f(\mathrm{x})$ имеет минимум.

Положим в системе (9.3) $u_s = -l_s$, тогда получим

$$\frac{dx_s}{dt} = -\frac{\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}\right)^2}} = -\frac{\{\operatorname{grad} f(\bar{x})\}_s}{\|\operatorname{grad} f(\bar{x})\|}. \tag{9.7}$$

Теорема 9.1. *Пусть:* 1) *функция* $f(\mathrm{x})$ *задана при* $\mathrm{x} \in E_n$, *вещественна и непрерывно дифференцируема по своим аргументам;* 2) $\operatorname{grad} f(\mathrm{x})$ *обращается в нуль лишь в единственной точке, являющейся оптимальной точкой этой функции. Кроме того,* $\|\operatorname{grad} f(\mathrm{x})\| > \alpha > 0$ *при* $\|\mathrm{x}\| \to +\infty$.

Тогда любая интегральная кривая

$$x_s = \mathrm{x}_s(t, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n), \quad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{9.8}$$

системы (9.7) *такая, что* $x_s = \bar{x}_s$ *при* $t = 0$, *обладает свойством* $x_s \to x_s^{(0)}$ *при возрастании* t, *причем* $\mathrm{x}_0 = \{x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\}$ — *оптимальная точка функции* $f(\mathrm{x})$.

Решение $\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}_0$ *асимптотически устойчиво в целом при возрастании* t.

Доказательство. Предположим, что точка x_0 найдена. Покажем тогда, что для каждого $\varepsilon > 0$ и точки $\bar{\mathrm{x}}$ можно указать такое $T(\varepsilon, \bar{\mathrm{x}})$, что при $t \geqslant T(\varepsilon, \bar{\mathrm{x}})$ будет

$$\|\mathrm{x}(t, \bar{\mathrm{x}}) - \mathrm{x}_0\| < \varepsilon, \tag{9.9}$$

где $\bar{\mathrm{x}}(t, \mathrm{x})$ — интегральная кривая системы (9.7), удовлетворяющая условию $\mathrm{x}(0, \bar{\mathrm{x}}) = \bar{\mathrm{x}}$.

Рассмотрим функцию $V(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0)$. Так как x_0 является оптимальной точкой, т. е. $f(\mathrm{x}_0) \leqslant f(\mathrm{x})$ при $\forall \mathrm{x} \in E_n$ и $V(\mathrm{x}_0) = 0$ функция $V(\mathrm{x})$ положительно определенная. Продифференцируем

ее в силу системы (9.7); тогда получим

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{(\operatorname{grad} f(\mathrm{x}))^* \cdot \operatorname{grad} f(\mathrm{x})}{\|\operatorname{grad} f(\mathrm{x})\|} = -\|\operatorname{grad} f(\mathrm{x})\|. \quad (9.10)$$

В силу того, что $\operatorname{grad} f(\mathrm{x})$ обращается в нуль лишь в единственной оптимальной точке x_0, имеем выполнение условий теоремы об асимптотической устойчивости. Это означает, что по любому $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\|\bar{\mathrm{x}} - \mathrm{x}_0\| < \delta(\varepsilon)$ будет

$$\begin{aligned} &\|\mathrm{x}(t, \bar{\mathrm{x}}) - \mathrm{x}_0\| < \varepsilon \text{ для всех } t \geqslant 0, \\ &\|\mathrm{x}(t, \bar{\mathrm{x}}) - \mathrm{x}_0\| \to 0 \quad \text{при } t \to \infty. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Возьмем любое $\bar{\mathrm{x}}$. Для интегральной кривой $\mathrm{x}(t, \bar{\mathrm{x}})$ возможны два случая: либо существует такое $T(\bar{\mathrm{x}})$, что

$$\|\mathrm{x}(t, \bar{\mathrm{x}}) - \mathrm{x}_0\| < \delta,$$

либо такого $T(\bar{\mathrm{x}})$ не существует.

В первом случае ясно, что

$$\|\mathrm{x}(t, \bar{\mathrm{x}}) - \mathrm{x}_0\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \forall t > T(\bar{\mathrm{x}}).$$

Пусть такого T не существует (второй случай). Тогда

$$\|\mathrm{x}(t, \bar{\mathrm{x}}) - \mathrm{x}_0\| > \delta_1$$

и в силу предположения теоремы существует такое α, что $\|\operatorname{grad} f(\mathrm{x})\| > \alpha$.

Из (9.10) получаем неравенство

$$dV/dt < -\alpha \quad \text{при всех} \quad t \geqslant 0. \quad (9.12)$$

Следовательно, $V(\mathrm{x}) \leqslant V(\bar{\mathrm{x}}) - \alpha t$. Последнее неравенство показывает: $V(\mathrm{x})$ на интегральной кривой (9.7) неограниченно убывает, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что упомянутое выше число $T(\bar{\mathrm{x}})$ существует. Теорема доказана.

Замечание. Пусть дана система алгебраических уравнений

$$p_j(\mathrm{x}) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (9.13)$$

Требуется найти решение этой системы. Положим $f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} p_j^2$ и найдем минимум функции $f(\mathrm{x})$, решая систему дифференциальных уравнений (9.7).

Пример 9.1. Рассмотрим функцию одного аргумента $f(x)$. Пусть оптимальное значение функция принимает в точке x_0, и при этом других минимумов, а также максимумов не существует. Тогда любая интегральная кривая уравнения

$$dx/dt = -df(x)/dx \quad (9.14)$$

стремится к x_0 лишь в том случае, если $df(x)/dt$ обращается в нуль только в точке x_0. В противном случае интегральные кривые уравнения (9.14) будут примыкать к каким-либо стационарным точкам функции $f(x)$, являющимся точками покоя уравнения.

Рассмотрим такую систему

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = -df(x)/dx, \tag{9.15}$$

все точки покоя которой располагаются на оси x.

Легко видеть, что система (9.15) имеет интеграл вида $y^2(t)+2f(x(t))=c$. Возьмем точку $(\bar{x}, \bar{y})$ в качестве начальной, причем $\bar{y}\neq 0$. На интегральной кривой $(x(t), y(t))$ во все время движения имеет место равенство

$$y^2(t)+2f(x(t))=\bar{y}^2+2f(\bar{x}). \tag{9.16}$$

Если найдем точку t_0 такую, чтобы $y^2(t_0)$ было максимальным значением функции $y^2(t)$, то точка $x(t_0)$ является оптимальной для функции $f(x)$. Значит, при таком подходе к отысканию оптимального значения стационарные точки функции $f(s)$ не являются помехой при вычислениях. Этот алгоритм непрерывной минимизации можно распространить на отыскание оптимальных точек функций многих переменных.

2°. Обратимся теперь к рассмотрению проблемы минимизации функции многих переменных при наличии ограничений. Рассмотрим ограничения вида

$$f_j(x_1, \ldots, x_n)=0, \quad j=1, 2, \ldots, l. \tag{9.17}$$

Пусть $\bar{x}=\{x_1, \ldots, x_n\}$ — некоторая точка, удовлетворяющая (19.17).

Поставим вопрос: в каком направлении при движении из точки $\bar{x}$, совместимом с ограничениями (9.17), заданная функция $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ имеет наибольшую скорость возрастания? Для этого рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt}=u_s, \qquad \sum_{s=1}^{n} u_s^2=1, \quad s=1, 2, \ldots, n, \tag{9.18}$$

интегральная кривая $x(t, \bar{x})$ которой удовлетворяет условию $x(0, \bar{x})=\bar{x}$ и для которой при любом $t\geq 0$ выполнены ограничения (9.17). Дифференцируя эти ограничения в силу системы (9.18), получим

$$\frac{df_j}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_s}u_s=0, \quad j=1, 2, \ldots, l. \tag{9.19}$$

Равенства (9.19) означают, что вектор $u\{u_1, \ldots, u_n\}$ ортогонален ко всему подпространству L, натянутому на векторы $\operatorname{grad} f_1, \ldots, \operatorname{grad} f_l$. Следовательно, вектор u принадлежит ортогональному дополнению к этому пространству. Как известно, любой вектор, например $\operatorname{grad} f_0$, можно, и притом единственным

способом, представить в виде суммы

$$\operatorname{grad} f_0 = \operatorname{grad}_l f_0 + \mathrm{a}, \tag{9.20}$$

где $\mathrm{a} \in L$, $\operatorname{grad}_l f_0 \perp L$ (знаком $\perp$ обозначаем ортогональность к подпространству L, т. е. ко всем векторам из этого подпространства).

Наша задача состоит в выборе u так, чтобы скорость возрастания $f(\mathrm{x}(t, \bar{\mathrm{x}}))$ была наибольшей, т. е. df_0/dt имело наибольшее значение. Следовательно, в силу (9.20)

$$df_0/dt = (\operatorname{grad}_l f_0 \cdot \mathrm{u}),$$

откуда с учетом (9.18) получаем требуемое:

$$\mathrm{u} = -\frac{\operatorname{grad}_l f_0}{\|\operatorname{grad}_l f_0\|}. \tag{9.21}$$

Наибольшая скорость убывания функции $f_0(\mathrm{x})$ при движении точки из $\bar{\mathrm{x}}$ будет в направлении

$$\mathrm{u} = -\frac{\operatorname{grad}_l f_0(\mathrm{x})}{\|\operatorname{grad}_l f_0(\bar{\mathrm{x}})\|}. \tag{9.21'}$$

Найдем фактическое представление. Имеем

$$\mathrm{a} = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \operatorname{grad} f_j,$$

следовательно,

$$\operatorname{grad}_l f_0(\mathrm{x}) = \operatorname{grad} f_0 - \sum_{j=1}^{l} \mu_j \operatorname{grad} f_j. \tag{9.22}$$

Числа $\mu_1, \ldots, \mu_l$ определяются из условия ортогональности вектора (9.22) к векторам $\operatorname{grad} f_j$. Отсюда получаем систему l алгебраических уравнений для определения $\mu_1, \ldots, \mu_l$:

$$(\operatorname{grad} f_0, \operatorname{grad} f_i) = \sum_{j=1}^{l} \mu_j (\operatorname{grad} f_j, \operatorname{grad} f_i), \quad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{9.23}$$

Можно считать, что векторы $\operatorname{grad} f_j$, $j = 1, 2, \ldots, l$, линейно независимы в точке $\bar{\mathrm{x}}$, ибо в противном случае из них можно было бы выбрать независимую систему. Из системы (9.23) можно найти величины $\mu_1, \ldots, \mu_l$. Ясно также, что они являются функциями переменных $\bar{x}, \ldots, \bar{x}_n$.

Теорема 9.2. *Пусть: 1) функция $f_0(\mathrm{x})$ имеет оптимальное значение в некоторой точке $\mathrm{x}_0 = \{x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\}$ при условии $f_j(\mathrm{x}) = 0$, $j = 1, \ldots, l$; 2) вектор $\operatorname{grad}_l f_0(\mathrm{x})$ обращается в нуль*

при условии (9.17) *лишь в оптимальной точке. Кроме того,* $\|\text{grad}_t f_0(\mathbf{x})\| > \alpha$ *при* $\|\mathbf{x}\| \to +\infty$.

Тогда любая интегральная кривая $\mathbf{x}(t, \bar{\mathbf{x}})$ *системы* (9.18) *при управлении* (9.21′), *где* $\bar{\mathbf{x}}$ *удовлетворяет ограничениям* (9.17), *при любом* $t > 0$ *удовлетворяет* (9.17) *и обладает свойством*

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}) - \bar{\mathbf{x}}_0\| \to 0 \quad при \quad t \to +\infty$$

Решение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову при возрастании* t.

Доказательство этого факта осуществляется точно так же, как и в теореме 9.1.

Система (9.7) и система (9.18) при управлении (9.21′) не имеют решения $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ в точном смысле. Эта точка скорее является точкой неединственности, которая ведет себя как асимптотически устойчивое по Ляпунову положение равновесия при возрастании времени. Так как движение происходит с постоянной по величине скоростью $\sum_{s=1}^{n} u_s^2 = 1$, то интегральные кривые примыкают к этой точке при возрастании времени в течение конечного промежутка времени. В этом смысле и надо понимать асимптотическую устойчивость.

Если в системе (9.7) положить в правой части

$$\mathbf{u} = -\frac{\{\text{grad}\, f(\mathbf{x})\}_{(s)}}{\|\text{grad}\, f(\mathbf{x})\|^{+1}},$$

то точка $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ становится нулевым решением, асимптотически устойчивым в целом по Ляпунову. При этом геометрия поведения траекторий не меняется. Меняется лишь динамика движения изображающей точки по траекториям, и каждая интегральная кривая будет примыкать при $t \to +\infty$ к точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.

§ 10. Оптимальное демпфирование переходных процессов

1°. Рассмотрим управляемую систему

$$dx_s/dt = f_s(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, t). \tag{10.1}$$

Пусть задана начальная точка $\mathbf{x}^0$ и момент t_0. Тогда каждому управлению $\mathbf{u} \in G$ (G — некоторое множество, например, кусочно-непрерывных вектор-функций) отвечает движение

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{u}, \mathbf{x}^0, t_0), \tag{10.2}$$

проходящее через точку $\mathbf{x}^0$ при $t = t_0$. Пусть S — некоторая поверхность в пространстве переменных $t, x_1, \ldots, x_n$, задаваемая

уравнением

$$S(t, x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{10.3}$$

Задача управления пусть состоит в выборе $\mathbf{u} \in G$ так, чтобы в некоторый момент t_1 интегральная кривая (10.2) системы (10.1) достигла поверхности S (10.3) при этом управления $(u_1, \ldots, u_r)$ и фазовые координаты $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяли ограничениям

$$V_j(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, t) \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k \tag{10.4}$$

(V_j—могут быть, в частности, функционалами). Но хотя мы имеем некоторый процесс (уравнения движения) и условия его протекания (ограничения, начальное и конечное состояния), задача выбора управляющих параметров процесса может не иметь однозначного решения. Рассмотрим еще функцию $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, которая определяет в каком-либо смысле расстояние от переходного процесса (движущейся точки (10.2)) до желаемого его конечного состояния (поверхность S). Пусть роль системы управления сводится к тому, чтобы это расстояние уменьшать. Тогда естественным становится понятие об оптимальном управлении по отношению к демпфированию функции V.

Определение 10.1. *Управление $\mathbf{u}^0 = \{u_1^0, \ldots, u_r^0\}$ называется оптимальным по отношению к демпфированию функции V, если эта функция V убывает вдоль траектории $\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^0) = \mathbf{x}^0(t)$, соответствующей этому управлению, наибольшим образом.*

Вычислим значение функции V на движении (10.2) и найдем полную производную по t от полученной функции. Будем иметь

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s = W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{10.5}$$

Оптимальное управление по отношению к демпфированию функции V необходимо доставляет наименьшее возможное отрицательное значение функции $W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ среди всех допустимых управлений (управлений, которые переводят точку $\mathbf{x}^0$ на поверхность S и при этом удовлетворяют ограничениям (10.4)).

Пример 10.1. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i + \sum_{j=1}^{r} b_{sj} u_j, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{10.6}$$

Будем считать элементы матрицы $A = \{a_{si}\}$ постоянными вещественными числами, а $B = \{b_{sj}\}$—либо вещественными постоянными, либо функциями времени.

Предположим, что при $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_r\} = 0$ положение равновесия $\mathbf{x} = 0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову. Тогда существует положительно

определенная квадратичная форма V, удовлетворяющая уравнению

$$(\operatorname{grad} V,\ A\mathrm{x}) = -\mathrm{x}^2, \tag{10.7}$$

и притом единственная.

Будем считать, что функция V определяет расстояние интегральной кривой системы (10.6) до точки $\mathrm{x}=\{x_1, \ldots, x_n\}=0$. Построим управление u, оптимальное к демпфированию функции V, т. е. управление $(u_1, \ldots, u_r)$ необходимо выбрать так, чтобы функция V убывала наибольшим образом вдоль траектории системы (10.6).

Предположим, что $(u_1, \ldots, u_r)$ удовлетворяют условию

$$|u_j| \leqslant 1, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ r. \tag{10.8}$$

В этом случае функция

$$\dot{W} = -\mathrm{x}^2 + (\operatorname{grad} V,\ B\mathrm{u}) \tag{10.9}$$

принимает наименьшее возможное значение при

$$u_j^0 = -\operatorname{sign}(B_j^*, \operatorname{grad} V), \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ r. \tag{10.10}$$

Подставляя (10.10) в систему (10.6), получим оптимальную автоматическую систему управления по отношению к демпфированию функции $V(t, \mathrm{x})$:

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i - \sum_{j=1}^{r} b_{sj} \operatorname{sign}\left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_l} b_{lj}\right). \tag{10.11}$$

Правые части системы оказываются разрывными, и поверхности их разрыва определяются уравнениями

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} b_{sj} = \sum_{s=1}^{n} c_{sj}x_s = 0, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ r. \tag{10.12}$$

В системе (10.11) возникает, вообще говоря, непродолжимость движений через поверхности разрыва (10.12). В физических системах за счет инерционности происходят малые вибрации около поверхности разрыва.

Пример 10.2. Рассмотрим движение точки в фазовом пространстве с постоянной по величине и управляемой по направлению скоростью

$$\frac{dx_s}{dt} = u_s, \qquad \sum_{s=1}^{n} u_s^2 = 1, \qquad s=1,\ \ldots,\ n. \tag{10.13}$$

Положим

$$V(\mathrm{x}) = \sqrt{\sum_{s=1}^{n} x_s^2}. \tag{10.14}$$

Управление, оптимальное по отношению к демпфированию функции V, определяется путем нахождения наименьшего возможного значения функции

$$\dot{W} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} u_s. \tag{10.15}$$

Отсюда

$$u_s^0 = -\frac{x_s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}. \qquad (10.16)$$

Покажем, что при управлении (10.16) движущаяся точка из любой заданной точки $x = \{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$ попадает в начало координат. Система (10.13) при управлении (10.16) имеет вид

$$\frac{dx_s}{dt} = -\frac{x_s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}. \qquad (10.17)$$

Умножая s-е уравнение системы (10.17) на x_s и суммируя по s, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}r^2 = -r, \qquad (10.18)$$

где

$$r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Интегрируя уравнение (10.18), найдем $r = -\bar{t} + r_0$. Следовательно, движущаяся точка попадает в начало координат в момент

$$\bar{t} = r_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{(0)^2}}. \qquad (10.18')$$

Легко показать, что $\bar{t}$ является наименьшим возможным временем, за которое движущаяся точка может из точки попасть в начало координат.

Таким образом, в данном случае управление u^0, оптимальное по отношению к демпфированию функции V, является одновременно оптимальным по быстродействию.

Определение 10.2. *Управление $u = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r\}$ называется оптимальным по быстродействию, если среди управлений, переводящих начальную точку $\bar{x}$ на поверхность (в частности, начало координат), оно доставляет времени перехода*

$$T = t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} d\tau$$

наименьшее возможное значение.

Теорема 10.1. *Пусть: 1) управление $u^0 = \{u_1^0, \ldots, u_r^0\}$ является оптимальным по отношению к демпфированию функции $V(t, x)$; 2) функция $V(t, x)$ вещественна, непрерывна и положительна при всех t, x_s, $s = 1, \ldots, n$, за исключением $V(t, x) = 0$ при $S(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$ (на поверхности); 3) функция $V(t, x)$ непрерывно дифференцируема вдоль движения системы (10.1) при*

любом управлении $u \in G$, *причем* $dV/dt = -1$ *при управлении* u^0 — *оптимальном в смысле демпфирования функции* $V(t, x)$.

Тогда управление u^0 *и соответствующее ему движение* $x^0(t) = x(t, x^0, u^0, t_0)$ *будут оптимальными по быстродействию.*

Доказательство. Покажем сначала, что интегральная кривая системы (10.1) при управлении $u = u^0$ достигает поверхности S. Иначе говоря, управление u^0 переводит систему из состояния x^0 на поверхность S за время t_1. По условию теоремы вдоль движения $x^0(t)$ имеет место равенство $dV/dt = -1$. Интегрируя его по t, найдем $V(x(t), t) = V(x^0, t_0) + t_0 - 1$. Так как функция $V(x, t)$ не принимает отрицательных значений и только на поверхности S обращается в нуль, то существует такой момент $t_1 = t_0 + V(x^0, t_0)$, что $x^0(t_1) = x(t_1, x^0, u^0, t_0) \in S$.

Пусть время $T = t_1 - t_0 = V(x^0, t_0)$ будет не оптимальным по быстродействию. Тогда существует управление $\tilde{u} \in G$, переводящее точку x^0 на поверхность S за время $T^* = t_1^* - t_0$, причем $T^* < T$.

Так как управление u^0 — оптимальное по отношению к демпфированию функции $V(x, t)$, то для любого другого управления $\tilde{u}$ и соответствующего ему движения $\tilde{x}(t) = x(t, x^0, t_0, \tilde{u})$ будет $dV/dt = -1 + \alpha(t)$, где $\alpha(t) \geqslant 0$ — функция, заданная при $t \in [t_0, t_1^*]$.

Интегрируя это равенство, найдем

$$-V(x^0, t_0) = -(t_1^* - t_0) + \int_{t_0}^{t_1^*} \alpha(t)\, dt,$$

откуда

$$T^* - T = \int_{t_0}^{t_1^*} \alpha(t)\, dt \geqslant 0,$$

что противоречит предположению. Теорема доказана.

Замечание. При управлении (10.16) вдоль соответствующего ему движения (пример 10.2) будет иметь место равенство $dV/dt = -1$. Как вытекает из теоремы, данное управление оптимально по быстродействию.

Будем считать, что исходная система линейно зависит от управления и имеет вид

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1, \ldots, x_n, t) + \sum_{i=1}^{n} b_{si}(x_1, \ldots, x_n, t)\, u_i. \qquad (10.19)$$

Предположим, что функция $V(x, t)$, о которой идет речь в предыдущей теореме, существует. Пусть также управления $u_1, \ldots, u_r$,

входящие в систему (10.19), подчинены ограничениям

$$|u_i| \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{10.19'}$$

Полную производную функцию $V(t, \mathbf{x})$ в силу системы (10.19) можно представить в форме

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s + \sum_{i=1}^{r} u_i \frac{\partial V}{\partial x_s} b_{si}. \tag{10.20}$$

Правая часть (10.20) достигает своего наименьшего значения при

$$u_i^{(0)} = -\operatorname{sign}\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} b_{si}\right). \tag{10.21}$$

Так как наименьшее значение правой части (10.20) равно -1 в случае оптимальности по быстродействию, то, подставляя (10.21) в (10.20), будем иметь уравнение в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s - \sum_{i=1}^{r} \left| \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} b_{si} \right| = -1. \tag{10.22}$$

Формула (10.21) решает проблему синтеза (управление представляет собой функцию от координат и времени), оптимальную по быстродействию. В общем случае, когда $\mathbf{u} \in G$, где G имеет более сложную природу, задача построения оптимального по быстродействию управления сводится к отысканию наименьшего возможного значения линейной формы (10.22) в классе функций $\mathbf{u} \in G$. Уравнение (10.22) можно рассматривать как уравнение для определения функции $V(t, \mathbf{x})$ со свойствами:

1) $V(t, \mathbf{x})$ непрерывна и положительна при всех t и x_s, за исключением $V(t, \mathbf{x}) = 0$ при $S(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$ (граничное условие);

2) $V(t, \mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема по своим аргументам.

Отметим при этом, что частные производные функции $V(t, \mathbf{x})$ являются, вообще говоря, разрывными, и поэтому решение уравнения (10.22) еще более затруднительно.

В связи с этим поставим следующие задачи: 1) рассмотреть вопросы существования и единственности вышеупомянутой функции $V(t, \mathbf{x})$ в задачах управления; 2) провести исследования уравнения (10.22) в частных производных; 3) исследовать систему дифференциальных уравнений на поверхностях разрыва, т. е.

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} b_{si} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

2°. Вместо функции $V(t, \mathbf{x})$ можно взять некоторый функционал, определенный на движениях и управлениях, входящих в систему (10.1). Рассмотрим самый простейший функционал такого типа. Пусть $V(t, \mathbf{x})$—функция, обладающая теми же свойствами, что и ранее, и пусть функция $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ обладает теми же свойствами, что и правые части системы (10.1). Управление $\mathbf{u}(t)$ и соответствующее ему движение (10.2) при фиксированном времени t определяют значение функционала

$$L = V(\mathbf{x}(t, \mathbf{u}), t) + \int_{t_0}^{t} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau)\,d\tau. \qquad (10.23)$$

Зададимся целью отыскать такое управление, чтобы вдоль соответствующего ему движения скорость убывания функционала (10.23) являлась наибольшей в точке (x^0, t_0). Найдем полную производную функционала (10.23) при $t = t_0$:

$$\left.\frac{dL}{dt}\right|_{t=t_0} = f_0(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}, t_0) + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}, t_0) + \frac{\partial V}{\partial t}. \qquad (10.24)$$

Пусть наименьшее возможное значение правая часть (10.24) принимает при $\mathbf{u}_{\min}(\mathbf{x}^0, t_0)$. Положим $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_{\min}(\mathbf{x}, t)$. Будем считать, что система (10.1) определяет движение

$$\mathbf{x}^0(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0, t_0).$$

Положим

$$\mathbf{u}^0(t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}^0(t), t),$$

и пусть $\mathbf{u}^0(t)$ является допустимым управлением. Это управление и соответствующее ему движение $\mathbf{x}^0(t)$ будем называть *оптимальным по отношению к демпфированию функционала* L. Оказывается, что в каждой точке оптимальной кривой функционал L имеет наибольшую скорость убывания. Действительно, пусть $\bar{t} > t_0$—некоторый момент времени и $\bar{\mathbf{x}}$—соответствующая ему точка интегральной кривой $\mathbf{x}^0(t)$. Возьмем произвольное управление $\mathbf{u}(t) \in G$ при $t > \bar{t}$ и оценим скорость изменения функционала в точке $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$ при этом управлении:

$$\left.\frac{dL}{dt}\right|_{t=\bar{t}} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \bar{t}) + f_0(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \bar{t}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}^0, \bar{t}) + f_0(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}^0, \bar{t}).$$

Это неравенство показывает, что скорость убывания функционала L в каждой точке оптимальной кривой является наибольшей.

Рассмотрим теперь связь систем управления, оптимальных в смысле демпфирования и в смысле интегрального функционала. Обозначим через $\mathbf{x}_1$ то фазовое состояние на поверхности S, которое достигается объектом управления (10.1) в момент $t_1 \geqslant t_0$ при некотором фиксированном $\mathbf{u} \in G$, т. е. $S(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) = 0$. Предположим, что управление $\mathbf{u}(t)$ и соответствующее ему движение (10.2) с концами $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^1$, заданные при $t \in [t_0, t_1]$, характеризуются значением некоторого функционала

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{x}^0) = p(t_1, \mathbf{x}^1) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\,dt. \tag{10.25}$$

Определение 10.3. *Управление $\mathbf{u}^*$ и соответствующее ему движение $\mathbf{x}^*(t)$ называются оптимальными по отношению к функционалу J, если неравенство*

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{x}^0) \geqslant J(\mathbf{u}^*, \mathbf{x}_0). \tag{10.26}$$

имеет место при любом выборе допустимого управления $\mathbf{u} \in G$.

Теорема 10.2. *Управление $\mathbf{u}^0 = \{u_1^0, \ldots, u_r^0\}$, оптимальное по отношению к демпфированию функционала L (10.23), где $V(t, \mathbf{x}) = p(t_1, \mathbf{x}^1)$ на многообразии S, доставляет функционалу J (10.25) наименьшее возможное значение среди всех управлений, переводящих точку $\mathbf{x}^0$ в некоторую точку $\mathbf{x}^1 \in S$, если это управление $\mathbf{u}^0(t)$ и соответствующее ему движение $\mathbf{x}^0(t)$ удовлетворяют уравнению*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s + f_0 \equiv 0. \tag{10.27}$$

Доказательство. Так как $\mathbf{u}^0$ является оптимальным управлением в смысле демпфирования функционала L (10.23) и удовлетворяет уравнению (10.27), то можно записать

$$\frac{dV}{dt} + f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0, t) = \inf_{\mathbf{u} \in G} \left(\frac{dV}{dt} + f_0 \right) = 0 \tag{10.28}$$

или

$$W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0) = \inf_{\mathbf{u} \in G} W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = -\frac{\partial V}{\partial t}, \tag{10.29}$$

где

$$W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s + f_0. \tag{10.30}$$

Вычислить значение функционала J (10.25) при управлении $\mathbf{u}^0(t)$ и соответствующем ему движении. Для этого интегрируем равенство (10.27) в пределах от t^0 до t_1^0 — того момента времени,

когда интегральная кривая попадает на поверхность S при управлении $\mathbf{u}^0(t)$:

$$V(\mathbf{x}^0(t_1^0),\ t_1^0)-V(\mathbf{x}^0,\ t_0)+\int_{t_0}^{t_1^0} f_0(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \tau)\,d\tau=0,$$

откуда

$$J(\mathbf{u}^0)=p(\mathbf{x}^0(t_1^0),\ t_1^0)+\int_{t_0}^{t_1^0} f_0(\mathbf{x},\ \mathbf{u}_0,\ \tau)\,d\tau=V(\mathbf{x}^0,\ t_0). \quad (10.31)$$

Предположим, что управление $\bar{\mathbf{u}}(t)$ — допустимое и доставляет функционалу J меньшее значение, чем управление $\mathbf{u}^0(t)$, т. е. $J(\bar{\mathbf{u}})<J(\mathbf{u}^0)$. Тогда в силу (10.28) или (10.29) для этого управления будем иметь

$$dV/dt+f_0(\mathbf{x},\ \bar{\mathbf{u}},\ t)\geqslant\alpha(t), \quad (10.32)$$

где $\alpha(t)$ — неотрицательная функция.

Интегрируя последнее неравенство в пределах от t_0 до t_1 — момента времени, когда $\mathbf{x}(\bar{t}_1,\ \mathbf{x}^0,\ t_0,\ \bar{\mathbf{u}})\in S$, получим

$$p(\mathbf{x}^1,\ \bar{t}_1)-V(\mathbf{x}^0,\ t_0)+\int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x},\ \bar{\mathbf{u}},\ \tau)\,d\tau\geqslant\int_{t_0}^{t_2}\alpha(\tau)\,d\tau,$$

откуда

$$J(\bar{\mathbf{u}})-J(\mathbf{u}^0)\geqslant 0,$$

что противоречит выбору управления $\bar{\mathbf{u}}(t)$. Это противоречие и доказывает утверждение теоремы.

Следствие. *Рассмотрим систему* (10.19) *при ограничениях на управления* (10.19′). *Пусть* $f(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t)=f_0(\mathbf{x},\ t)$. *В этом случае управление, оптимальное по отношению к демпфированию функционала* L (10.23), *определяется формулой* (10.21), *и уравнение* (10.27) *примет вид*

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}f_s-\sum_{j=1}^{r}\left|\sum_{s=1}^{n}b_{sj}\frac{\partial V}{\partial x_s}\right|+f_0(\mathbf{x},\ t)=0. \quad (10.33)$$

Отсюда следует найти функцию $V(t,\ \mathbf{x})$, удовлетворяющую условию $V(t,\ \mathbf{x})=p(t,\ \mathbf{x})$ на поверхности S.

3°. Обратимся теперь к методу множителей Лагранжа, а затем перейдем к выводу принципа максимума Л. С. Понтрягина. Этот принцип является необходимым условием оптимальности.

Пусть задана оптимальная система

$$\dot{\mathbf{x}}=f(\mathbf{x},\ \mathbf{u}), \quad (10.34)$$

где $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{u}=(u_1, \ldots, u_r)$. Будем считать, что правые части системы (10.34) заданы при $\mathbf{u}\in U\subset E_r$, $\mathbf{x}\in E_n$, вещественны и непрерывны по отношению к совокупности всех переменных, а также непрерывно дифференцируемы по компонентам вектора $\mathbf{x}$.

Определение 10.4. *Вещественная кусочно-непрерывная векторная функция $\mathbf{u}(t)$ называется допустимым управлением, если:* 1) $\mathbf{u}(t)\in U$, $t\in[t_0, t_1]$; 2) $\mathbf{u}(t)$ *имеет левосторонние и правосторонние пределы в точках разрыва*; 3) *функция* $\mathbf{u}(t)$ *непрерывна на концах промежутка* $[t_0, t_1]$ *и принимает в точках разрыва значение, равное пределу слева.*

Пусть задано начальное состояние $\mathbf{x}^0$ и конечное состояние $\mathbf{x}^1$ управляемой системы.

Определение 10.5. *Допустимое управление* $\mathbf{u}^0(t)$, *переводящее систему из начального состояния в конечное за промежуток времени* $[t_0, t_1]$, *называется оптимальным по отношению к функционалу*

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})\,dt, \tag{10.35}$$

если среди всех таких допустимых управлений оно доставляет (10.35) *наименьшее возможное значение. При этом начальный момент t_0 и конечный момент t_1 могут быть как фиксированными, так и нет. Во всяком случае начальный момент можно считать фиксированным, так как замена независимой переменной t на $t+c$, где c — вещественная постоянная, не меняет вида управляемой системы и множества допустимых управлений.*

Будем предполагать, что функция f_0 обладает теми же свойствами, что и компоненты вектора $\mathbf{f}$ в системе (10.34).

Предположим, что существует функция $V(t, \mathbf{x})$, заданная при $t\in[t_0, t_1]$, $\mathbf{x}\in E_n$, вещественная, непрерывная и непрерывно дифференцируемая относительно t и компонент вектора $\mathbf{x}$ и такая, что $V(t_1, \mathbf{x}^1)=0$. Положим

$$z=V(t, \mathbf{x})+\int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\,dt. \tag{10.36}$$

Обозначим через W полную производную функции z вдоль интегральной кривой системы (10.34):

$$\frac{dz}{dt}=W=\frac{\partial V}{\partial t}+(\operatorname{grad} V,\ f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}))+f_0. \tag{10.37}$$

Обозначим через $\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$ те значения вектора $\mathbf{u}$, при которых функция $W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ принимает наименьшие возможные значения:

$$W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}))=\inf_{\mathbf{u}\in U} W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{10.38}$$

Предположим далее, что

$$W(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{u}^0(t,\ \mathbf{x}))\equiv 0. \tag{10.39}$$

Будем считать, что система (10.34) при управлении

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}^0(t,\ \mathbf{x}) \tag{10.40}$$

переходит из заданного начального состояния $\mathbf{x}^0$ в заданное конечное состояние $\mathbf{x}^1$. Обозначим через $\mathbf{x}^0(t)$ соответствующее этому управлению решение системы (10.34), удовлетворяющее

$$\mathbf{x}^0(t)\,|_{t=t_0}=\mathbf{x}^0,$$

и через $\mathbf{u}^0(t)$—значение управления $\mathbf{u}^0(\mathbf{x},\ t)$ на движении $\mathbf{x}^0(t)$.

Предположим далее, что $\mathbf{u}^0(\mathbf{x},\ t)$ является непрерывно дифференцируемой вектор-функцией относительно компонент вектора $\mathbf{x}$; так как точка множества U является внутренней, то из условий (10.38), (10.39) имеем

$$\frac{dW(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{u}^0(t,\ \mathbf{x}))}{dx_j}=\frac{\partial W}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial W}{\partial u_k}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x_j}=0. \tag{10.41}$$

Здесь при дифференцировании слева по x_j остальные компоненты вектора $\mathbf{x}$ считаются параметрами, не зависящими от x_j. Из (10.41) имеем $\partial W/\partial x_j$, иначе

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x_j}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_s\,\partial x_j}\cdot f_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\cdot\frac{\partial f_s}{\partial x_j}+\frac{\partial f_0}{\partial x_j}=0. \tag{10.42}$$

Соотношение (10.42) может быть переписано в форме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\cdot\frac{\partial f_s}{\partial x_j}+\frac{\partial f_0}{\partial x_j}=0. \tag{10.43}$$

В формулах (10.42) и (10.43) считается, что функция $V(t,\ \mathbf{x})$ дважды непрерывно дифференцируема по своим аргументам.

Положим

$$\partial V/\partial x_j=\lambda_j(t)\quad \text{при}\quad \mathbf{x}=\mathbf{x}^0(t).$$

Тогда (10.43) можно записать в виде

$$\dot{\lambda}_j+\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial x_j}+\frac{\partial f_0}{\partial x_j}=0. \tag{10.44}$$

Пусть $\dot{x}_0=f_0$ и $\dot{\lambda}_0=0$, а также

$$H=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j f_j(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{u}). \tag{10.45}$$

В этом случае будем иметь

$$\dot{x}_j = \partial H/\partial \lambda_j, \quad \dot{\lambda}_j = -\partial H/\partial x_j. \tag{10.46}$$

Система (10.46) представляет собой каноническую систему дифференциальных уравнений. Из предыдущих рассуждений вытекает, что ей удовлетворяют функции

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \mathbf{x}^0(t), \qquad \mathbf{u} = \mathbf{u}^0(t), \\ &\lambda_j = \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad \text{при} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^0(t), \\ &\lambda_0 = 1, \quad x_0(t) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{10.47}$$

Рассмотрим теперь функцию $H(t, \mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}, \lambda(t))$. Эта функция при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(t)$ достигает своего наименьшего возможного значения $-\frac{\partial V(t, \mathbf{x}^0(t))}{\partial t}$. Действительно,

$$W(t, \mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}) = \frac{\partial V(t, \mathbf{x}^0(t))}{\partial t} + H(t, \mathbf{x}^0(t), \lambda(t), \mathbf{u}).$$

Так как имеет место (10.39), то

$$\inf_{\mathbf{u} \in U} W = W(t, \mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}^0(\mathbf{x}^0(t), t)),$$

следовательно,

$$\inf_{\mathbf{u} \in U} H(t, \mathbf{x}^0(t), \lambda(t), \mathbf{u}) = -\frac{\partial V(t, \mathbf{x}^0(t))}{\partial t}.$$

Таким образом, установлена следующая

Теорема 10.3. *Если: 1) существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $V(t, \mathbf{x})$, заданная при $t \in [t_0, t_1]$, $\mathbf{x} \in E_n$ и $V(t_1, \mathbf{x}^1) = 0$; 2) существует непрерывно дифференцируемая функция $\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$ такая, что $\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$ — внутренняя точка U и*

$$\inf_{\mathbf{u} \in U} W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = W(t, \mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}^0(t))) \equiv 0;$$

3) система (10.34) при управлении $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$ переходит из начального состояния $\mathbf{x}^0$ в конечное состояние $\mathbf{x}^1$, то существуют оптимальное управление $\mathbf{u}^0(t)$ и оптимальное движение $\mathbf{x}^0(t)$, а также функция $\lambda_j(t)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, такие, что они удовлетворяют канонической системе дифференциальных уравнений (10.46), причем функция $H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}, \lambda(t))$ принимает при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(t)$ наименьшее возможное значение $-\frac{\partial V(t, \mathbf{x}^0(t))}{\partial t}$, т. е.

$$H(t, \mathbf{x}^0(t), \lambda(t), \mathbf{u}^0) = \inf_{\mathbf{u} \in U} H(t, \mathbf{x}^0(t), \lambda, \mathbf{u}). \tag{10.48}$$

Замечание 1. Рассмотрим функционал

$$J = P(\mathrm{x}^1) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathrm{x}, \mathrm{u})\, dt \tag{10.49}$$

и предположим, что конечное состояние x^1 располагается на гладком многообразии

$$g_j(\mathrm{x}^1) = 0, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{10.50}$$

Если в предыдущей теореме условие $V(t_1, \mathrm{x}^1) = 0$ заменить условием

$$V(t_1, \mathrm{x}^1) = P(\mathrm{x}^1) \quad \text{и} \quad g_j(\mathrm{x}^1) = 0, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{10.51}$$

то утверждение теоремы останется в силе. Однако теперь для определения функций $\lambda_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, и функций $x_j^0(t)$, $j = 1, \ldots, n$ имеется, вообще говоря, всего лишь $n + k$ краевых условий, а именно: задано начальное состояние, в котором оказывается система (10.34) при $t = t_0$ и задано k условий для конечного состояния (10.50). Покажем, что недостающие краевые условия можно определить из (10.51). Условие (10.51) заключается в том, что функция V при $t = t_1$ должна обращаться в заданную функцию $P(\mathrm{x}^1)$ на многообразии (10.50). Пусть $\overline{\mathrm{x}^1}$ — некоторая точка, удовлетворяющая (10.50) и условию

$$V(t_1, \overline{\mathrm{x}^1}) = P(\overline{\mathrm{x}^1}).$$

Так как уравнения (10.50) определяют гладкое многообразие размерности $(n - k)$, то, по определению, векторы $(\operatorname{grad} g_j)$, $j = 1, \ldots, k$, должны быть линейно независимыми. Обозначим через $\mathrm{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ какой-либо вектор, ортогональный одновременно всем векторам $\operatorname{grad} g_j$, $j = 1, \ldots, k$. Рассмотрим далее векторную функцию $\mathrm{x} = \mathrm{x}(\varepsilon)$ такую, что

$$g_j(\mathrm{x}(\varepsilon)) = 0, \quad j = 1, \ldots, k, \quad \mathrm{x}(0) = \overline{\mathrm{x}}^1 \quad \text{и} \quad \left.\frac{d\mathrm{x}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \mathrm{a}.$$

Тогда будем иметь $V(t_1, \mathrm{x}(\varepsilon)) = P(\mathrm{x}(\varepsilon))$. Дифференцируя последнее равенство по ε и полагая $\varepsilon = 0$, найдем

$$(\operatorname{grad} V(t_1, \mathrm{x}^1), \mathrm{a}) = (\operatorname{grad} P(\mathrm{x}^1), \mathrm{a}),$$
$$(\operatorname{grad} g_j(\mathrm{x}^1), \mathrm{a}) = 0, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Так как вектор a может принимать произвольные значения в пространстве, ортогональном векторам $\operatorname{grad} g_j$, то последние равенства одновременно могут выполняться лишь в том и только в том случае, когда вектор $\operatorname{grad} V(t_1, \mathrm{x}^1) - \operatorname{grad} P(\mathrm{x}^1)$ будет содержаться в пространстве, натянутом на векторы $\operatorname{grad} g_j$, $j = 1, \ldots, k$. Следовательно, существуют постоянные $l_1, \ldots, l_k$ такие,

что

$$\operatorname{grad} V = \operatorname{grad} P + \sum_{j=1}^{k} l_j \operatorname{grad} g_j. \tag{10.52}$$

Так как

$$\lambda_j(t) = \partial V/\partial x_j \quad \text{при} \quad \mathrm{x} = \mathrm{x}^0(t),$$

то из (10.52) будем иметь

$$\lambda_s(t_1) = \frac{\partial P(\mathrm{x}^1)}{\partial x_s} + \sum_{j=1}^{k} l_j \frac{\partial g_j(\mathrm{x}^1)}{\partial x_s}, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{10.53}$$

Условия (10.53) называются *условиями трансверсальности*. Эти условия вносят добавочные неизвестные переменные $l_1, \ldots, l_k$. Таким образом, искомых величин становится теперь $2n+k$, а именно:

$$x_s^0(t), \quad \lambda_s(t) \quad \text{и} \quad l_j, \quad s = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, k.$$

Для определения этих величин имеются также $2n+k$ краевых условий: задано начальное состояние, условие (10.50) и условие (10.53).

Пример 10.3. Пусть заданы

$$\dot{\mathrm{x}} = P(t)\mathrm{x} + Q(t)\mathrm{u} + \mathrm{F}(t), \tag{10.54}$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [\mathrm{A}^*(t)\mathrm{x} + \mathrm{B}^*(t)\mathrm{u}]\, dt + \mathrm{C}^*\mathrm{x}^1, \tag{10.55}$$

$$\mathrm{A}_j^*\mathrm{x} + b_j = 0, \quad j = 1, \ldots, k \tag{10.56}$$

Требуется найти оптимальное по отношению к функционалу (10.55) управление $\mathrm{u}^0(t)$, переводящее систему (10.54) из заданного состояния $\mathrm{x} = \mathrm{x}^0$ при $t = t_0$ на многообразие (10.56) при условии, что управления стеснены ограничениями

$$|u_j| \leqslant 1, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{10.57}$$

Далее будем предполагать, что элементы матриц P, Q — компоненты векторов F, A, B — являются вещественными кусочно-непрерывными функциями, заданными при $t \in [t_0, t_1]$; компоненты векторов C и A_j, а также b_j будем считать вещественными числами. Естественно предполагать, что векторы A_j линейно независимы между собой. Положим

$$V(t, \mathrm{x}) = \lambda^*(t)\mathrm{x} + \varphi(t), \quad z = V + \int_{t_0}^{t_1} [\mathrm{A}^*(t)\mathrm{x} + \mathrm{B}^*(t)\mathrm{u}]\, dt, \tag{10.58}$$

$$\dot{z} = W = [\dot{\lambda}^* + \lambda^* P + \mathrm{A}^*]\mathrm{x} + \dot{\varphi} + \lambda^*\mathrm{F} + [\lambda^* Q + \mathrm{B}^*]\mathrm{u}. \tag{10.59}$$

Функция (10.59) достигает наименьшего возможного значения при условии (10.57) в точке

$$u_j(t) = -\operatorname{sign}[\lambda^* Q + \mathrm{B}^*]_j, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{10.60}$$

Здесь j — индекс при скобке — означает j-компоненту вектора, указанного в скобке.

Выберем теперь функцию φ и вектор λ так, чтобы функция (10.59) обращалась в нуль при условии (10.60). Тогда получим

$$\dot{\lambda}^* + \lambda^* P + A^* = 0, \tag{10.61}$$

$$\dot{\varphi} + \lambda^* F - \sum_{j=1}^{r} [\lambda^* Q + B^*]_j = 0. \tag{10.62}$$

Из замечания 1 вытекает, что компоненты вектора λ должны удовлетворять условию трансверсальности. В данном случае оно имеет вид

$$\lambda(t_1) = C + \sum_{j=1}^{k} l_j A_j. \tag{10.63}$$

Условия (10.63) позволяют определить с помощью (10.61) вектор λ. При этом он будет линейно зависеть от величин $l_1, \ldots, l_k$.

Равенства (10.60) дадут тогда управления, зависящие от постоянных $l_1, \ldots, l_k$, и эти управления будут доставлять функционалу (10.55) наименьшее возможное значение. Если подставить управление (10.60) в систему (10.54) и проинтегрировать ее с начальным условием $x = x^0$ при $t = t_0$, то получим искомое оптимальное движение $x^0(t)$. Это движение будет зависеть по-прежнему от постоянных $l_1, \ldots, l_k$. Подставляя найденное движение в (10.56), найдем k уравнений для определения постоянных $l_1, \ldots, l_k$. Получаемые таким образом уравнения для величин $l_1, \ldots, l_k$ могут быть разрешены с любой наперед заданной степенью точности.

Предыдущая теорема и замечание к ней носят достаточный характер.

Введем в рассмотрение вектор $y = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, где $x_0 = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u)\,dt$. Тогда этот вектор будет удовлетворять системе уравнений

$$dy/dt = \overline{F}(y, u), \tag{10.64}$$

где

$$\overline{F}(y, u) = [f_0(x, u), f_1(x, u), \ldots, f_n(x, u)].$$

Предположим, что существует допустимое управление $u = u(t)$, переводящее систему (10.34) из начального состояния x^0 в конечное состояние x^1 за промежуток времени $[t_0, t_1]$. Тогда это управление будет переводить систему (10.64) из начального состояния y^0 в конечное состояние y^1 за это же время.

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=0}^{n} f_s(y, u(t)) \frac{\partial V}{\partial y_s} = 0. \tag{10.65}$$

Построим решение этого уравнения

$$V(t, y) = (\lambda^1, [y - y^1]) \quad \text{при} \quad t = t_1,$$

где λ^1 — некоторый вещественный постоянный вектор. Обозначим через

$$y = y(t, \eta) \tag{10.66}$$

общее решение системы (10.64) с условием $y(t_1, \eta) = y^1 + \eta$, где η — произвольный радиус-вектор, соединяющий точки y^1 и y и имеющий достаточно малую длину.

Решение, соответствующее управлению $u(t)$, получающееся из (10.66) при $\eta = 0$, будем обозначать далее через $y(t)$, так что $y(t_0) = y^0$, а $y(t_1) = y^1$.

Разрешим равенство (10.66) относительно компонент вектора η. Тогда получим

$$\eta = \xi(t, y). \tag{10.67}$$

Компоненты векторной функции (10.67) представляют собой первые интегралы системы (10.64), причем они дают полную систему первых интегралов для (10.64).

Из предыдущего вытекает, что

$$\xi(t_1, \eta + y^1) = \eta.$$

Рассмотрим функцию

$$V = (\lambda^1, [y(t_1, \xi(t, y)) - y^1]). \tag{10.68}$$

Так как функция (10.68) является функцией первых интегралов системы (10.64), то она обязательно удовлетворяет системе в частных производных (10.65).

Положим в (10.68) $t = t_1$, $y = \eta + y^1$. Тогда имеем $V(t_1, \eta + y^1) = (\lambda^1, \eta)$, откуда

$$V(t_1, y) = (\lambda^1, [y - y^1]).$$

Последнее равенство выполняется во всяком случае для всех точек y, расположенных в сфере с центром y^1 достаточно малого радиуса.

Таким образом, формула (10.68) дает искомое решение уравнения (10.65), во всяком случае в некоторой достаточно малой трубке с осью $y = y(t)$. Именно, функция (10.68) задана при $t \in [t_0, t_1]$ и $\|y - y(t)\| < \delta$, где δ — достаточно малая положительная постоянная.

Если управление $u = u(t)$ доопределить с сохранением непрерывности на несколько более широкий промежуток $[t_0', t_1']$, то формула (10.68) будет определять искомую функцию также на этом более широком промежутке.

Положим

$$\lambda_j = \partial V / \partial y_j \quad \text{при} \quad y = y(t). \tag{10.69}$$

Тогда из (10.69) следует, что $\lambda(t)=\lambda^1$ при $t=t_1$, где $\lambda=(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$. Продифференцируем формально соотношение (10.69) по t:

$$\frac{d\lambda_j}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial y_j}+\sum_{s=0}^{n} f_s(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t))\cdot\frac{\partial}{\partial y_s}\frac{\partial V}{\partial y_j}.$$

Подставим функцию (10.68) в (10.65), продифференцируем полученное тождество по y_j, переставим затем порядок дифференцирования и положим $\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$. Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial y_j}+\sum_{s=0}^{n} f_s(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t))\cdot\frac{\partial}{\partial y_s}\frac{\partial V}{\partial y_j}+\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial f_s}{\partial y_j}\lambda_s=0,$$

так как $\partial V/\partial y_s=\lambda_s$ при $\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$.

Сравнивая последнее и предпоследнее равенства, находим

$$\frac{d\lambda_j}{dt}=-\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial f_s(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial y_j}\lambda_s, \quad j=0, \ldots, n. \tag{10.70}$$

Положим

$$H=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j f_j(\mathbf{y}, \mathbf{u}(t)).$$

Легко заметить, что системы (10.64) и (10.70) могут быть записаны в форме Гамильтона

$$dy_s/dt=\partial H/\partial\lambda_s, \quad d\lambda_s/dt=-\partial H/\partial y_s, \quad s=0, \ldots, n. \tag{10.71}$$

Покажем теперь, что компоненты векторов $\mathbf{y}(t)$, $\lambda(t)$ и управления $\mathbf{u}(t)$ действительно связаны между собой системой Гамильтона (10.71). Предыдущий вывод этого факта остается справедливым лишь для того случая, когда функция V имеет вторые непрерывные частные производные по всем аргументам.

Обозначим через $\mathbf{e}_j$ единичный орт декартовой системы координат в пространстве переменных $\mathbf{y}$. Подставим функцию (10.68) в уравнение (10.65) и положим $\mathbf{y}=\bar{\mathbf{y}}(\tau)$, где $\bar{\mathbf{y}}(\tau)$ есть решение системы (10.64) с начальным условием $\bar{\mathbf{y}}(\tau)=\mathbf{y}(t)+\mathbf{e}_j y_j$ при $t=\tau$. Проинтегрируем полученное тождество в пределах от t до t_1 вдоль интегральной кривой $\mathbf{y}=\bar{\mathbf{y}}(\tau)$. Тогда получим

$$\int_{t}^{t_1}\left[\frac{\partial V(\tau, \bar{\mathbf{y}}(\tau))}{\partial t}+\sum_{s=0}^{n} f_s(\bar{\mathbf{y}}(\tau), \mathbf{u}(\tau))\frac{\partial V(\tau, \bar{\mathbf{y}}(\tau))}{\partial y_s}\right]d\tau=0. \tag{10.72}$$

К левой части (10.72) добавим и вычтем выражение

$$\int_t^{t_1}\sum_{s=0}^{n}\lambda_s(\tau)\cdot f_s(\bar{y}(\tau),\, u(\tau))\,d\tau.$$

Тогда получим

$$\int_t^{t_1}\left\{\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{s=0}^{n} f_s\left[\frac{\partial V}{\partial y_s}-\lambda_s\right]\right\}d\tau+\int_t^{t_1}\sum_{s=0}^{n}\lambda_s f_s\,d\tau=0.$$

Положим

$$V_1=V-\sum\lambda_j(\bar{y}_j(\tau)-y_j(\tau)). \qquad (10.73)$$

Тогда (10.73) примет вид

$$\int_t^{t_1}\frac{d}{dt}V_1\,d\tau+\int_t^{t_1}\left[\sum_{s=0}^{n}\frac{d\lambda_s}{dt}(\bar{y}_s(\tau)-y_s(t))-\lambda_s(\tau)\,\dot{y}(\tau)\right]d\tau+$$
$$+\int_t^{t_1}\sum_{s=0}^{n}\lambda_s f_s\,d\tau=0, \qquad (10.74)$$

откуда далее имеем

$$-[V(t,\, y(t)+e_j y_j)-\lambda e_j y_j]+$$
$$+\int_t^{t_1}[(\lambda,(\bar{y}(\tau)-y(\tau)))-(\lambda,\dot{y}(\tau))+(\lambda,\bar{F}(\bar{y},u))]\,d\tau=0.$$

Продифференцируем по y_j и положим $y_j=0$. Получим

$$\int_t^{t_1}\left[\left(\dot{\lambda},\frac{\partial\bar{y}}{\partial y_j}\right)+\left(\lambda,\frac{\partial\bar{F}}{\partial y_j}\right)\right]d\tau=0.$$

Продифференцируем последнее равенство по t:

$$\dot{\lambda}_j+\sum_{s=0}^{n}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial y_j}=0.$$

Здесь используется тот факт, что

$$\partial\bar{y}/\partial y_j=e_j \quad \text{при} \quad \tau=t.$$

Таким образом, соотношение (10.70) выведено без дополнительных предположений на правые части системы (10.64).

Покажем теперь, что если управление $u(t)$ является оптимальным, то существует такой постоянный вектор λ^1, что будет выполнено основное неравенство принципа максимума:

$$H(y(t),\, u(t),\, \lambda(t))\leqslant H(y(t),\, \bar{u},\, \lambda(t))$$

при любом $\bar{u} \in U$, где $\lambda(t)$ — вектор, удовлетворяющий начальному условию $\lambda = \lambda^1$ при $t = t_1$. Доказательству этого утверждения предпошлем подробное рассмотрение необходимого условия оптимальности Вейерштрасса. Для этого предположим, что выполнены следующие условия:

а) функции $f_s(x, u)$, $s = 0, 1, \ldots, n$, заданы при $x \in E_n$, $u \in U \subset E_r$, вещественны, непрерывны и непрерывно дифференцируемы по компонентам векторов

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \qquad u = (u_1, \ldots, u_r);$$

б) матрица $A = \int\limits_{t_0}^{t_1} BB^* \, dt$ неособая, где матрица $B = Y^{-1}Q$; здесь Y — фундаментальная матрица для линейной системы $dx/dt = Px$ с начальным условием $Y(t_0) = E$; при этом

$$P = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\}, \quad Q = \left\{\frac{\partial f}{\partial u}\right\} \quad \text{при} \quad x = x^0(t), \qquad u = u^0(t);$$

в) оптимальное управление $u^0(t)$ располагается внутри множества U при $t \in [t_0, t_1]$. Иначе, если $\bar{u}(t)$ — некоторая кусочно-непрерывная функция, заданная при $t \in [t_0, t_1]$, то управление $u(t, \varepsilon) = u^0(t) + \varepsilon\bar{u}(t)$ будет при любом достаточно малом ε принимать значения из множества U.

Теорема 10.4. *Если $u^0(t)$ — оптимальное управление и $x^0(t)$ — соответствующее ему оптимальное движение, то при выполнении условий* а), б), в):

1) *существует функция $V(t, y)$, удовлетворяющая уравнению* (10.65) *при $u = u^0(t)$ и граничному условию*

$$V(t_1, y) = (\lambda^1, (y - y^1)); \tag{10.75}$$

2) *функция $W(t, y, u) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum\limits_{s=0}^{n} f_s(t, y, u) \frac{\partial V}{\partial y_s}$ имеет при $y = y^0(t)$ и $u = u^0(t)$ наименьшее возможное значение, равное нулю. Справедливо неравенство*

$$W(t, y^0(t), u^0(t)) \leqslant W(t, y^0(t), u) \tag{10.76}$$

при $u \in U$, или иначе,

$$\frac{\partial W}{\partial u_j} = 0 \tag{10.77}$$

при $u = u^0(t)$, $y = y^0(t)$ и

$$H(t, y^0(t), u^0(t)) \leqslant H(t, y, u) \tag{10.78}$$

при $u \in U$, где $H = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j f_j(y, u(t))$.

При этом функции $\lambda(t)$, $y^0(t)$, $u(t)$ *связаны между собой системой Гамильтона* (10.71).

Доказательство. Выше было показано, что функция V, упомянутая в первом утверждении теоремы, существует. Остается показать, что постоянный вектор λ^1 можно выбрать так, чтобы было выполнено также и второе утверждение этой теоремы.

Покажем, что такой вектор λ^1 существует. Построим семейство управлений $u(t, \varepsilon)$ так, чтобы было

$$u(t_0) = u^0(t) \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial u(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \bar{u}(t),$$

где $\bar{u}(t)$ — некоторая кусочно-непрерывная функция, заданная на промежутке $[t_0, t_1]$, ортогональная на нем к столбцам матрицы B^*:

$$\int_{t_0}^{t_1} B\bar{u}(t)\,dt = 0. \tag{10.79}$$

Основным требованием к семейству управлений $u(t, \varepsilon)$, будет, однако, являться требование, заключающееся в том, чтобы движение $x(t, \varepsilon)$, соответствующее этому управлению, переходило из начальной точки x^0 в конечную x^1 за время $[t_0, t_1]$. Существование такого семейства управлений будет установлено ниже.

Будем далее через $y(t, \varepsilon)$ обозначать решение системы (10.64), соответствующее этому управлению. Тогда будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1} W(t, y(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon))\,dt = V(t_1, y(t_1, \varepsilon)) - V(t_0, y^0) =$$
$$= (\lambda^1, [y(t_1, \varepsilon) - y^1]) = \lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} [f_0(x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)) - f_0(x^0(t), u^0(t))]\,dt. \tag{10.80}$$

Левая часть (10.80) обращается в нуль при $\varepsilon = 0$. Так как можно выбрать $\lambda^0 \geqslant 0$, то при $\varepsilon = 0$ имеем минимум. Следовательно, производная, вычисленная по ε при $\varepsilon = 0$, обратится в нуль. Отсюда имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \left(\frac{\partial W}{\partial u}, \bar{u}\right)\right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial W}{\partial u}, \bar{u}\right) dt = 0, \tag{10.81}$$

так как $\dfrac{\partial W(t, y^0, u^0)}{\partial y} = 0$, что следует из (10.65).

Выберем вектор λ^1 так, чтобы было

$$\int_{t_0}^{t_1} B\left[\frac{\partial W(t, y^0, u^0)}{\partial u}\right]^* dt = 0. \tag{10.82}$$

Иначе говоря, требуется, чтобы вектор $(\partial W/\partial u)^*$ был ортогонален столбцам матрицы B^*.

Предположим, что вектор λ^1 выбран из условия (10.82). Тогда, полагая

$$\bar{u}_j = \frac{\partial W(t_1, y^0, u^0)}{\partial u_j},$$

получим из (10.81)

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{r} \left[\frac{\partial W}{\partial u_j}\right]^2 dt = 0.$$

Отсюда имеем $\frac{\partial W(t, y^0, u^0)}{\partial u_j} = 0$. Следовательно, $u = u^0(t)$ — стационарная точка функции $W(t, y^0, u)$. Покажем, что в этой точке функция W принимает наименьшее возможное значение. Выберем постоянный вектор $u' \in U$ и точку $t' \in [t_0, t_1]$, в которой управление $u^0(t)$ непрерывно. Построим управление $u'(t, \varepsilon)$ так, чтобы $u'(t, \varepsilon) = u'$ при $t \in [t'; t^1+\varepsilon]$, $u'(t, \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} u^0(t)$, и так, чтобы движение $x'(t, \varepsilon)$ переводило систему из начального положения x^0 в конечное x^1 за промежуток $[t_0, t_1]$. Ниже будет показано, что такое семейство управлений существует.

Заметим, что по своему определению это семейство управлений и соответствующие им семейства решений определены лишь при $\varepsilon \geqslant 0$.

Решение системы (10.64), отвечающее этому управлению, будем обозначать через $y'(t, \varepsilon)$. Имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} W(t, y'(t, \varepsilon), u'(t, \varepsilon))\, dt =$$
$$= \lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} [f_0(x'(t, \varepsilon), u'(t, \varepsilon)) - f_0(x^0(t), u^0(t))]\, dt. \quad (10.83)$$

Выберем $\lambda_0 \geqslant 0$. Правая часть (10.83) обращается в нуль при $\varepsilon = 0$ и не убывает при возрастающем ε. Следовательно, производная правой части (10.83) по ε, вычисленная при $\varepsilon = 0$, будет неотрицательна. Отсюда имеем

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} W(t, y'(t, \varepsilon), u'(t, \varepsilon))\, dt \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0. \quad (10.84)$$

Подсчитаем производную в левой части (10.84). Имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} W\,dt = \int_{t_0}^{t'} W(t,\ \mathbf{y}'(t,\ \varepsilon),\ \mathbf{u}'(t,\ \varepsilon))\,dt + \\ + \int_{t'}^{t'+\varepsilon} W(t,\ \mathbf{y}'(t,\ \varepsilon),\ \mathbf{u}')\,dt + \int_{t'+\varepsilon}^{t_1} W(t,\ \mathbf{y}'(t,\ \varepsilon),\ \mathbf{u}'(t,\ \varepsilon))\,dt.$$

Дифференцируя последнее, находим

$$W(t',\ \mathbf{y}^0(t'),\ \mathbf{u}') - W(t',\ \mathbf{y}^0(t'),\ \mathbf{u}^0(t')) \geqslant 0. \qquad (10.85)$$

Неравенство (10.85) имеет место, так как $\partial W/\partial y = 0$ и $\partial W/\partial u = 0$ при $\mathbf{y} = \mathbf{y}^0(t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(t)$. Вводя в (10.85) функцию H, найдем также

$$H(\mathbf{y}^0,\ \mathbf{u}^0) \leqslant H(\mathbf{y}^0,\ \mathbf{u}) \quad \text{при} \quad \mathbf{u} \in U.$$

Чтобы завершить доказательство, заметим, что по непрерывности, устремляя t' к точке разрыва $\mathbf{u}^0(t)$, можно получить неравенство (10.85) и для точек разрыва $\mathbf{u}^0(t)$.

Замечание 1. В ходе доказательства использована возможность построения семейства управлений $\mathbf{u}(t,\ \varepsilon)$, переводящего систему из заданного начального состояния $\mathbf{x}^0$ в заданное конечное $\mathbf{x}^1$ за время $[t_0,\ t_1]$.

При этом $\mathbf{u}(t,\ \varepsilon) = \mathbf{u}^0(t)$ при $\varepsilon = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} = \bar{\mathbf{u}}(t)$ при $\varepsilon = 0$, где $\int_{t_0}^{t_1} B\bar{\mathbf{u}}\,dt = 0$. Покажем, что такое семейство существует. Положим

$$\mathbf{u}(t,\ \varepsilon) = \mathbf{u}^0(t) + B^*\mathbf{c} + \varepsilon\bar{\mathbf{u}}(t),$$

где $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\varepsilon)$ — искомый вектор, зависящий от ε, который надлежит выбрать так, чтобы удовлетворить всем перечисленным выше требованиям.

Полагая в системе (10.34) $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t,\ \varepsilon)$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t,\ \varepsilon)$, умножим обе части на $Y^{-1}(t)$ и проинтегрируем по промежутку $[t_0,\ t_1]$, считая, что движение переходит из начального состояния $\mathbf{x}^0$ в конечное $\mathbf{x}^1$. Тогда получим

$$Y^{-1}(t_1)\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 = \int_{t_0}^{t_1} Y^{-1}[f(t,\ \mathbf{x}(t,\ \varepsilon),\ \mathbf{u}(t,\ \varepsilon)) - P\mathbf{x}(t,\ \varepsilon)]\,dt. \qquad (10.86)$$

Будем рассматривать систему (10.86) как систему, определяющую неявную функцию $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\varepsilon)$. Система (10.86) имеет решение $\varepsilon = 0$, $\mathbf{c} = 0$. Найдем матрицу Якоби правых частей (10.86) по

переменным $c_1, \ldots, c_n$ и вычислим ее при $\varepsilon=0$, $c=0$

$$\int_{t_0}^{t_1} Y^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial f}{\partial u}B^*-P\frac{\partial y}{\partial c}\right]dt=\int_{t_0}^{t_1} BB^*\,dt,$$

так как $\partial f/\partial y=P$ при $\varepsilon=0$, $c=0$.

Таким образом, якобиан правых частей функции (10.86) по переменным $c_1, \ldots, c_n$ отличен от нуля, следовательно, существует векторная функция $c=c(\varepsilon)$, удовлетворяющая (10.86).

Простыми рассуждениями далее устанавливаем, что $dc/d\varepsilon=0$ при $\varepsilon=0$ и что найденное управление обладает требуемыми свойствами.

Замечание 2. При доказательстве теоремы вектор λ^1 был выбран так, чтобы вектор $\dfrac{\partial W(t, y^0, u^0)}{\partial u_j}$, $j=1, \ldots, r$, был ортогонален столбцам матрицы B^*.

Покажем, что такой выбор вектора λ^1 возможен с точностью до мультипликативной постоянной. Положим $\bar\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Тогда

$$\frac{\partial W}{\partial u}=\lambda_0\frac{\partial f_0}{\partial u}+\bar\lambda^* Q. \tag{10.87}$$

Из системы (10.71) видно, что вектор $\bar\lambda$ будет удовлетворять уравнениям

$$\dot{\bar\lambda}=-P^*\bar\lambda-\lambda_0\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^*. \tag{10.88}$$

Умножая обе части (10.88) на $Y^*(t)$ и интегрируя в пределах от t до t_1, находим

$$Y^*(t_1)\bar\lambda(t_1)-Y^*(t)\bar\lambda(t)-\int_t^{t_1} Y^*P^*\bar\lambda\,dt=-\int_t^{t_1} Y^*\left(P^*\bar\lambda+\lambda_0\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)^*\right)dt,$$

откуда находим

$$\bar\lambda(t)=Y^{*-1}(t)Y^*(t_1)\bar\lambda(t_1)+\lambda_0\int_{t_0}^{t_1} Y^{*-1}(t)Y^*(\tau)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* d\tau. \tag{10.89}$$

Подставляя (10.89) в (10.87), находим

$$\frac{\partial W}{\partial u}=\lambda_0\frac{\partial f_0}{\partial u}+\bar\lambda^{1*}Y(t_1)Y^{-1}(t)Q+\lambda_0\left[\int_t^{t_1} Y^{*-1}(t)Y^*(\tau)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* d\tau\right]^* Q.$$

Транспонируя последнее выражение, умножая слева на матрицу B и интегрируя в пределах от t_0 до t_1, найдем

$$\int_{t_0}^{t_1} BB^* \, dt \, Y^*(t_1)\overline{\lambda^1} + \lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} \left[B\left(\frac{\partial f_0}{\partial u}\right)^* + \int_{t_0}^{t_1} Y^{*-1}(t) Y^*(\tau) \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)^* d\tau \right] dt = 0. \tag{10.90}$$

Равенство (10.90) определяет единственным образом вектор $\overline{\lambda^1}$, если константа λ_0 задана.

Будем считать $\lambda_0 > 0$. При $\lambda_0 = 0$ получаем $\overline{\lambda^1} = 0$, $V(t, y) \equiv 0$, и утверждение теоремы становится несодержательным.

Замечание 3. При доказательстве теоремы использовалось семейство управлений Вейерштрасса $u'(t, \varepsilon)$.

Покажем, что такое семейство существует. Будем это семейство искать в форме

$$u'(t, \varepsilon) = B^*c + \varphi\,[u' - B^*c - u^0] + u^0(t),$$

где φ — характеристическая функция промежутка $[t', t'+\varepsilon)$:

$$\varphi = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \in [t', t'+\varepsilon), \\ 0 & \text{при} \quad t \overline{\in} [t', t'+\varepsilon). \end{cases}$$

Вектор c будем выбирать так, чтобы решение $x'(t, \varepsilon)$ системы (10.34), соответствующее управлению $u'(t, \varepsilon)$, переводило систему из начального положения x^0 в конечное x^1 за время $[t_0, t_1]$.

Умножим систему (10.34) на Y^{-1} и проинтегрируем в пределах $[t_0, t_1]$. Тогда получим.

$$\begin{aligned} Y^{-1}(t_1)x^1 - x^0 &= \int_{t_0}^{t_1} Y^{-1}\,[f(x'(t, \varepsilon), u'(t, \varepsilon)) - Px'(t, \varepsilon)]\,dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} Y^{-1}\,[f(x'(t, \varepsilon), u^0 + B^*c) - Px'(t, \varepsilon)]\,dt + \\ &+ \int_{t'}^{t'+\varepsilon} Y^{-1}\,[f(x'(t, \varepsilon), u') - f(x'(t, \varepsilon), u^0(t) + B^*c)]\,dt. \end{aligned} \tag{10.91}$$

Уравнение (10.91) можно рассматривать как уравнение для определения неявной функции $c = c(\varepsilon)$.

Ясно, что система (10.91) имеет решение $c = 0$ при $\varepsilon = 0$. Вычислим матрицу Якоби правых частей (10.91) по переменным

$c_1, \ldots, c_n$ при $\mathbf{c}=0$, $\varepsilon=0$. Имеем

$$\frac{d}{dc}\left\{\int_{t_0}^{t_1} Y^{-1}[f(\mathbf{x}', \mathbf{u}^0+B^*\mathbf{c})-P\mathbf{x}']\,dt + \int_{t'}^{t'+\varepsilon} Y^{-1}[f(\mathbf{x}'(t,\varepsilon), \mathbf{u}')-f(\mathbf{x}'(t,\varepsilon), \mathbf{u}^0(t)+B^*\mathbf{c})]\,dt\right\} =$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} Y^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{c}}+\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}B^*-P\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{c}}\right]dt+$$

$$+\int_{t'}^{t'+\varepsilon} Y^{-1}\left[\frac{\partial f(\mathbf{x}'(t,\varepsilon), \mathbf{u}')}{\partial x}\cdot\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{c}}-\frac{\partial f(\mathbf{x}'(t,\varepsilon), \mathbf{u}^0(t)+B^*\mathbf{c})}{\partial x}\cdot\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{c}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial f(\mathbf{x}'(t,\varepsilon), \mathbf{u}^0(t)+B^*\mathbf{c})}{\partial \mathbf{u}}B^*\right]dt=\int_{t_0}^{t_1} BB^*\,dt.$$

Последняя матрица по сделанному выше предположению является неособой, поэтому существует вектор-функция $\mathbf{c}=\mathbf{c}(\varepsilon)$, удовлетворяющая всем требованиям. При этом $\mathbf{c}(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Перейдем теперь к изучению возможности ослабления ограничительных условий а), б), в). Рассмотрим управление $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t, \varepsilon)$ и отвечающее ему решение $\mathbf{y}=\mathbf{y}(t, \varepsilon)$ системы (10.64), где $\mathbf{u}(t, \varepsilon)=\mathbf{u}^0(t)$ при $t\,\bar{\in}\,[\theta, \theta+\varepsilon)$ и $\mathbf{u}(t, \varepsilon)=\bar{\mathbf{u}}$ при $t\in[\theta, \theta+\varepsilon)$; здесь θ — точка интервала $[t_0, t_1]$, являющаяся точкой непрерывности $\mathbf{u}^0$, $\bar{\mathbf{u}}$ — постоянный вектор, принадлежащий U.

Вычислим функции $V(t, \mathbf{y}(t, \varepsilon))$ и $W(t, \mathbf{y}(t, \varepsilon), \mathbf{u}(t, \varepsilon))$. Тогда будем иметь

$$W(t, \mathbf{y}(t, \varepsilon), \mathbf{u}(t, \varepsilon))\equiv 0$$

при $t\,\bar{\in}\,(\theta, \theta+\varepsilon)$ и любом достаточно малом ε.

Последнее обстоятельство является следствием того, что векторная функция $\mathbf{y}(t, \varepsilon)$ является непрерывной функцией по отношению к ε в точке $\varepsilon=0$. При этом $\mathbf{y}(t, \varepsilon)\to\mathbf{y}^0(t)$ при $\varepsilon\to 0$.

Следовательно, существует ε_0 такое, что при $\varepsilon<\varepsilon_0$ функция $\mathbf{y}(t, \varepsilon)$ будет принимать значения, принадлежащие области задания функции $V(t, \mathbf{y})$. Исходя из последнего равенства, имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} W(t, \mathbf{y}(t, \varepsilon), \mathbf{u}(t, \varepsilon))\,dt=\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} W(t, \mathbf{y}(t, \varepsilon), \bar{\mathbf{u}})\,dt=$$

$$=V(t_1, \mathbf{y}(t, \varepsilon))-V(t_0, \mathbf{y}^0).$$

Учитывая, что $V(t_0, \mathbf{y}^0)=0$, а $V(t_1, \mathbf{y})=(\lambda^1, [\mathbf{y}-\mathbf{y}^1])$ находим

$$\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} W(t, \mathbf{y}(t, \varepsilon), \bar{\mathbf{u}})\,dt=(\lambda^1, [\mathbf{y}(t_1, \varepsilon)-\mathbf{y}^1]). \qquad (10.92)$$

Обозначим через $\mathbf{k}$ вектор, касательный к траектории конца вектора $\mathbf{y}(t_1, \varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$:

$$\mathbf{k} = \frac{d}{d\varepsilon}\mathbf{y}(t_1, \varepsilon).$$

Из формулы (10.92) будем иметь

$$W(\theta, \mathbf{y}^0(\theta), \bar{\mathbf{u}}) = (\lambda^1, \mathbf{k}). \tag{10.93}$$

Заметим, что (10.93) получается из (10.92) путем дифференцирования по ε и вычисления результата при $\varepsilon = 0$.

Так как $W(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \frac{\partial V}{\partial t} + H(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}')$ и так как $W(t, \mathbf{y}^0(t), \mathbf{u}^0(t)) \doteq 0$, то из (10.93) также получим

$$H(\theta, \mathbf{y}^0(\theta), \bar{\mathbf{u}}) - H(\theta, y^0(\theta), \mathbf{u}^0(\theta)) = (\lambda^1, \mathbf{k}). \tag{10.94}$$

Пользуясь формулой (10.94), найдем вектор $\mathbf{k}$.

Обозначим через Z матрицу фундаментальной системы решений для линейной системы

$$\dot{\mathbf{y}} = \bar{P}\mathbf{y}, \tag{10.95}$$

где $\bar{P} = \left\{\frac{\partial f}{\partial y}\right\}$ при $\mathbf{y} = \mathbf{y}^0(t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(t)$, причем $Z(t_0) = E$, где E — единичная матрица размерности $n+1$. Тогда решение второй группы уравнений системы (10.71) может быть представлено в форме

$$\lambda(t) = (Z^*(t))^{-1} Z^*(t_1)\lambda^1 = Z^*(t_1, t)\lambda^1,$$

где $Z(t_1, t) = Z(t_1)Z^{-1}(t)$. Из (10.94) имеем

$$H(\theta, \mathbf{y}^0(\theta), \bar{\mathbf{u}}) - H(\theta, \mathbf{y}^0(\theta), \mathbf{u}^0(\theta)) =$$
$$= \lambda^*(\theta)[f(\theta), \mathbf{y}^0(\theta), \bar{\mathbf{u}}) - f(\theta, \mathbf{y}^0(\theta), \mathbf{u}^0(\theta)] =$$
$$= \lambda^{1*}Z(t_1, \theta)[f(\theta, \mathbf{y}^0(\theta), \mathbf{u}) - f(\theta, \mathbf{y}^0(\theta), \mathbf{u}^0(\theta))] = \lambda^{1*}\mathbf{k}.$$

Так как λ^1 является произвольным вещественным вектором, то имеем

$$\mathbf{k} = Z(t_1, \theta)[f(\theta, \mathbf{y}^0(\theta), \bar{\mathbf{u}}) - f(\theta, \mathbf{y}^0(\theta), \mathbf{u}^0(\theta)]. \tag{10.96}$$

Пусть теперь $\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n$ — точки интервала $[t_0, t_1]$, в которых $\mathbf{u}^0(t)$ непрерывно, и пусть $\tau_1, \ldots, \tau_m$ — произвольные положительные числа $\bar{u}^1, \ldots \bar{u}^m$ — постоянные векторы из множества U. Рассмотрим управление $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ и соответствующее ему движение $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, определяемое системой (10.64), где

$$\mathbf{u}(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = \begin{cases} \mathbf{u}^0(t) & \text{при } t \overline{\in} [\theta_j, \theta_j + \varepsilon_j), \\ \bar{\mathbf{u}}_j & \text{при } t \in [\theta_j, \theta_j + \varepsilon_j). \end{cases}$$

Если положительные величины $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ достаточно малы, то приведенные выше формулы определяют кусочно-непрерывную функцию, являющуюся допустимым управлением. Как и выше, будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1} W(t, \mathbf{y}(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m), \mathbf{u}(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m))\, dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{\theta_j}^{\theta_j+\varepsilon_j} W(t, \mathbf{y}(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m), \bar{\mathbf{u}}_j)\, dt = (\lambda^1, [\mathbf{y}(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) - \mathbf{y}^1]).$$

Положим $\varepsilon_j \leqslant \tau_j \varepsilon$. Тогда, дифференцируя последнее равенство по ε и полагая $\varepsilon = 0$, найдем

$$\mathbf{k} = \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{y}(t_1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = \sum_{j=1}^{m} \tau_j \mathbf{k}_j, \qquad (10.97)$$

где

$$\mathbf{k}_j = Z(t_1, \theta_j)[f(\theta_j, \mathbf{y}^0(\theta_j), \bar{\mathbf{u}}_j) - f(\theta_j, \mathbf{y}^0(\theta_j), \mathbf{u}^0(\theta_j))].$$

В предыдущей теореме было показано, что при выполнении условий а), б), в) существует вектор λ^1 такой, что будет $(\lambda^1, \mathbf{k}) \geqslant 0$ при любом выборе вектора $\mathbf{k}$ по формуле (10.96).

Вывод самой формулы предполагает лишь непрерывную дифференцируемость функций f_s, $s = 0, 1, \ldots, n$ по компонентам вектора $\mathbf{x}$. Покажем, что при выполнении только этого условия также существует вектор λ^1, для которого будет

$$H(\theta, \mathbf{y}^0(\theta), \bar{\mathbf{u}}) - H(\theta, \mathbf{y}^0(\theta), \mathbf{u}^0(\theta)) \geqslant 0$$

при $\theta \in [t_0, t_1]$, $\bar{\mathbf{u}} \in U$.

Установление этого утверждения и приводит к доказательству принципа максимума для данного случая.

Предположим, что вектор $-\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ можно представить в форме $-\mathbf{e}_0 = \sum_{j=1}^{m} \tau_j \mathbf{k}_j$, и предположим, что среди векторов $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_m$ имеется m линейно независимых. Иначе говоря, предположим, что вектор $-\mathbf{e}_0$ лежит внутри выпуклого конуса, натянутого на совокупность векторов (10.96),

$$\bar{\mathbf{u}} \in U, \quad \theta \in [t_0, t_1].$$

Покажем тогда, что обязательно будет существовать управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ доставляющее функционалу $J(\mathbf{u})$ меньшее значение, чем $J(\mathbf{u}^0)$.

Будем считать, что такое управление существует. Тогда ему соответствует движение $\mathbf{y}=\mathbf{y}(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, $\mathbf{y}=\mathbf{y}^0$ при $t=t_0$, $y_s=y_s^1$, $s=1, \ldots, n$ при $t=t_1$. Умножая тогда (10.64) на матрицу $Z(t_1, t)$ и интегрируя в пределах от t_0 до t_1; получим

$$\mathbf{y}(t_1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)-Z(t_1, t_0)\mathbf{y}^0=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1} Z(t_1, t)[f(\mathbf{y}(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m), \mathbf{u}(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m))-\overline{P}\mathbf{y}]\,dt. \quad (10.98)$$

Полагая в (10.98) $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=\varepsilon_m=0$, найдем соотношение для $\mathbf{u}^0(t)$, $\mathbf{y}^0(t)$, из которого, учитывая (10.98), получим

$$\mathbf{y}(t_1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)-\mathbf{y}^1=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1} Z(t_1, t)[(f(\mathbf{y}(t, \varepsilon), \mathbf{u}(t, \varepsilon))-$$
$$-f(\mathbf{y}^0(t), \mathbf{u}^0(t)))-\overline{P}(\mathbf{y}(t, \varepsilon)-\mathbf{y}^0(t))]\,dt. \quad (10.99)$$

Положим в (10.99)

$$\mathbf{y}(t_1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)-\mathbf{y}^1=\varepsilon\sum_{j=1}^{m}\tau_j\mathbf{k}_j. \quad (10.100)$$

Уравнение (10.99) при условии (10.100) обязательно имеет решение

$$\varepsilon=0, \quad \varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=\varepsilon_m=0.$$

Вычислим матрицу Якоби правых частей системы (10.99) по переменным $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ при $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=\varepsilon_m=0$. Легко заметить, что столбцами матрицы Якоби будут векторы $\mathbf{k}_j$, $j=1, \ldots, m$. Следовательно, ранг этой матрицы будет $(m+1)$. Поэтому уравнения (10.99), (10.100) будут иметь решение $\varepsilon_j=\varepsilon_j(\varepsilon)$ при достаточно малом $\varepsilon\geqslant 0$. Причем

$$\varepsilon_j(\varepsilon)=\tau_j\varepsilon+0(\varepsilon), \quad j=1, \ldots, m.$$

Здесь $0(\varepsilon)$ — величина порядка малости выше чем ε. При таких величинах ε_j, если ε достаточно мало, управление $\mathbf{u}(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ будет допустимым, будет переводить систему из начального состояния $\mathbf{x}^0$ в конечное $\mathbf{x}^1$, и будет доставлять функционалу $J(\mathbf{u})$ значение $J(\mathbf{u}^0)-\varepsilon$, что невозможно, так как $J(\mathbf{u}^0)$ — оптимальное значение функционала $J(\mathbf{u})$. Это показывает, что вектор $(-\mathbf{e}_0)$ не может лежать внутри упомянутого конуса; следовательно, он лежит либо на его поверхности, либо вне его. А тогда должна существовать разделяющая гиперплоскость $(\lambda^1, (\mathbf{y}-\mathbf{y}^1))=0$ такая, что будет $(\lambda^1, \mathbf{k})\geqslant 0$ и $(-\lambda^1, \mathbf{e}_0)\leqslant 0$, где $\mathbf{k}$ определяется равенством (10.96). Это и устанавливает существование искомого вектора λ^1.

4°. Перейдем теперь к изучению процессов управления возникающих при рассмотрении конфликтных ситуаций. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \tag{10.101}$$

где $\mathbf{x}$—фазовый вектор системы, $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$—управления, $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$—векторная функция.

Будем считать, что размерность векторов $\mathbf{x}$—n, $\mathbf{u}_1$—r_1, $\mathbf{u}_2$—r_2. Предположим, что заданы начальное и конечное состояния системы $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0$ при $t=t_0$, $\mathbf{x}=\mathbf{x}^1$ при $t=t_1$, где $t_0<t_1$—фиксированные числа.

Будем считать, что управления $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ обладают такими свойствами, что на движениях системы (10.101) и этих управлениях возможно определить функционал

$$J = J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2). \tag{10.102}$$

Требуется найти такие управления $\mathbf{u}_1^0$, $\mathbf{u}_2^0$, для которых будет

$$\min_{\mathbf{u}_1 \in U_1} \max_{\mathbf{u}_2 \in U_2} (J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)) = \max_{\mathbf{u}_2 \in U_2} \min_{\mathbf{u}_1 \in U_1} (J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)) = J(\mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0). \tag{10.103}$$

Здесь U_1, U_2—некоторые множества допустимых управлений. Заметим, что при определении управлений $\mathbf{u}_1^0$ и $\mathbf{u}_2^0$ иногда используются дополнительные ограничения на допустимые управления $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$. Эти дополнительные ограничения могут описываться как аналитически, так и с помощью различных требований общего характера. Например, управления $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ должны быть такими, чтобы существовали решения системы (10.101), переводящие систему из начального состояния в конечное, или чтобы была устойчивость какого-либо движения и т. д.

В литературе по теории дифференциальных игр управления $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ называют иногда *стратегиями игроков*. Тогда фазовый вектор $\mathbf{x}$ будет описывать их совместное состояние. Совокупность двух стратегий $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ называется *ситуацией*. Ситуация $(\mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0)$, при которой имеет место (10.103), называется *ситуацией равновесия*. Стратегии $\mathbf{u}_1^0$, $\mathbf{u}_2^0$ называются *равновесными* или *оптимальными*. Функционал (10.102) называют *ценой* игры, а его значение в ситуации равновесия—*значением игры*.

Перейдем к изложению способов разыскания достаточных и необходимых условий существования ситуаций равновесия, а также способов их приближенного построения. Пусть задана функция двух аргументов $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, принимающая вещественные значения при $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in Y$, зафиксируем элемент $\mathbf{x}$ и найдем множество таких элементов $\{\bar{\mathbf{y}}\} = Y_x$, для которых

$$\Psi(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) = \max_{\bar{\mathbf{y}} \in Y} \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}).$$

Найдем далее такие элементы $\{\bar{x} \in X\}$, чтобы было $\varphi(\bar{x}) = \min_{x \in X} \varphi(x)$. Тогда будем иметь

$$\varphi(\bar{x}) = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} \Psi(x, y).$$

Из этого определения вытекает, что для любой точки $(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{y} \in Y_x$, будет $\Psi(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant \Psi(x, \bar{y})$. Аналогично, если

$$\max_{y \in Y} \min_{x \in X} \Psi(x, y) = \Psi(\bar{x}, \bar{y}),$$

то будет

$$\Psi(\bar{x}, y) \leqslant \Psi(\bar{x}, \bar{y}).$$

Из этих соотношений вытекает, что при

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} \Psi(x, y) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} \Psi(x, y) = \Psi(x_0, y_0) \qquad (10.104)$$

будет

$$\Psi(x_0, y) \leqslant \Psi(x_0, y_0) \leqslant \Psi(x, y_0). \qquad (10.105)$$

Заметим, что неравенство (10.105) является достаточным условием для выполнения (10.104). Действительно,

$$\min_{x \in X} \Psi(x, y) \leqslant \Psi(x, y) \leqslant \max_{y \in Y} (x, y),$$

откуда имеем

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} \Psi(x, y) \geqslant \min_{x \in X} \Psi(x, y),$$

$$\max_{y \in Y} \min_{x \in X} \Psi(x, y) \leqslant \min_{x \in X} \max_{y \in Y} \Psi(x, y).$$

При выполнении (10.105) будет

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} \Psi(x, y) \leqslant \Psi(x_0, y_0),$$

а также

$$\max_{y \in Y} \min_{x \in X} \Psi(x, y) \geqslant \Psi(x_0, y_0),$$

откуда имеем, что при выполнении (10.105) обязательно будет иметь место условие (10.104).

В приведенных выше рассуждениях предполагается, что соответствующие экстремальные значения функции достигаются.

Теорема 10.5. *Если: 1) существует непрерывно дифференцируемая функция*

$$V = V(t, x),$$

заданная при $t \in [t_0, t_1]$, $x \in E_n$,

$$V = V(t_1, x^1) = 0;$$

2) *управления* $u_1^0(t, x)$, $u_2^0(t, x)$ *удовлетворяют условиям*

$$W(t, x, u_1, u_2^0) \geqslant W(t, x, u_1^0, u_2^0) \geqslant W(t, x, u_1^0, u_2) \quad (10.106)$$

и переводят систему (10.101) *из начального состояния в конечное, где*

$$W = \frac{\partial V}{\partial t} + (\operatorname{grad} V, f(t, x, u_1, u_2)) + f_0(t, x, u_1, u_2) \quad (10.107)$$

и

$$W(t, x, u_1^0, u_2^0) \equiv 0, \quad u_1 \in U_1, \ u_2 \in U_2.$$

Тогда u_1^0 *и* u_2^0 *являются оптимальными стратегиями по отношению к функционалу*

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u_1, u_2)\, dt.$$

Действительно, пусть $u_1 = u_1(t, x) \in U_1$ обладает тем свойством, что при управлении $\{u_1^0, u_2^0\}$ система (10.101) переходит из начального состояния в конечное.

Обозначим решение системы (10.101), соответствующее этим управлениям $x(t, u_1, u_2^0)$. Левая часть неравенства (10.106) становится тогда известной функцией времени. Интегрируя ее в пределах от t_0 до t_1, найдем

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u_1, u_2^0)\, dt \geqslant V(t_0, x^0). \quad (10.108)$$

Если управление (u_1^0, u_2) переводит систему (10.101) из начального состояния в конечное, то аналогично из (10.106) будем иметь

$$V(t_0, x^0) \geqslant \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u_1^0, u_2)\, dt. \quad (10.109)$$

Из равенства (10.107) убеждаемся, что при управлении (u_1^0, u_2) имеет место соотношение

$$V(t_0, x^0) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u_1^0, u_2^0)\, dt.$$

Из последнего равенства и неравенств (10.108) и (10.109) имеем

$$J(u_1^0, u_2) \leqslant J(u_1^0, u_2^0) \leqslant J(u_1, u_2^0).$$

Это показывает, что стратегии (u_1^0, u_2^0) являются оптимальными по отношению к функционалу $J(u_1, u_2)$.

Предположим теперь, что функция $V(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема, и пусть также $u_1^0(t, x)$ и $u_2^0(t, x)$ непрерывно дифференцируемы, тогда, дифференцируя по компонентам вектора

равенство (10.107), находим

$$\frac{dW}{dx_j}=\frac{\partial W}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{r_1}\frac{\partial W}{\partial u_{1i}}\cdot\frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{r_2}\frac{\partial W}{\partial u_{2i}}\cdot\frac{\partial u_{2i}}{\partial x_j}=0.$$

Так как выполняется соотношение (10.106), то будем иметь

$$\partial W/\partial u_{1i}=0, \quad i=1, \ldots, r_1,$$
$$\partial W/\partial u_{2k}=0, \quad k=1, \ldots, r_2$$

при $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_1^0$, $\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_2^0$. Отсюда имеем

$$\partial W/\partial x_j=0. \qquad (10.110)$$

Положим $\lambda_j=\partial \mathbf{u}_2/\partial x_j$ при $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0(t)$, где $\mathbf{x}^0(t)$ — движение системы (10.101), соответствующее управлению $(\mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0)$. Тогда из (10.110) получим

$$\frac{d\lambda_j}{dt}+\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\frac{\partial f_s(t_1\mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0)}{\partial x_j}+\frac{\partial f_0(t, \mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0)}{\partial x_j}=0, \quad j=1, \ldots, n. \qquad (10.111)$$

Положим

$$H=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j f_j, \quad \lambda_0=1, \quad \mathbf{x}_0=\int_{t_0}^{t_1} f_0\,dt.$$

Тогда система (10.101) и уравнения (10.111) могут быть записаны в форме канонических уравнений

$$\dot{x}_j=\partial H/\partial\lambda_j,$$
$$\dot{\lambda}_j=-\partial H/\partial x_j, \quad j=0, \ldots, n. \qquad (10.112)$$

Подставим в неравенство (10.106) векторную функцию $\mathbf{x}^0(t)$. Тогда это неравенство может быть переписано в форме

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H(t, \mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2^0)\geqslant\frac{\partial V}{\partial t}+(H(t, \mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{\partial V}{\partial t}+H(t, \mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2);$$

откуда имеем

$$H(t, \mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2^0)\geqslant H(t, \mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0)\geqslant H(t, \mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2),$$

что означает

$$\min_{\mathbf{u}_1\in U_1}\max_{\mathbf{u}_2\in U_2} H(t, \mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)=\max_{\mathbf{u}_2\in U_2}\min_{\mathbf{u}_1\in U_1} H(t, \mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)=$$
$$=H(t, \mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0). \qquad (10.113)$$

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 10.6. *Если выполнены условия теоремы* 10.5 *и функция* $V(t, \mathbf{x})$ *является дважды непрерывно дифференцируема по своим аргументам, а векторные функции* $\mathbf{u}_1^0(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u}_2^0(t, \mathbf{x})$ *непрерывно дифференцируемы, то* $\mathbf{u}_1^0$, $\mathbf{u}_2^0$ *являются оптимальными стратегиями по отношению к функционалу* (10.102) *и, кроме того, существуют функции* λ_j $(j=0, \ldots, n)$, *которые связаны с оптимальными стратегиями и движением* $\mathbf{x}^0(t)$, *соответствующим им, канонической системой* (10.112). *При этом функция* H *удовлетворяет условию* (10.113).

Замечание 3. Если задано начальное состояние $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0$ при $t=t_0$ и конечное состояние располагается на многообразии

$$g_j(\mathbf{x}^1)=0, \quad j=1, \ldots, k, \tag{10.114}$$

$\mathbf{x}=\mathbf{x}^1$ при $t=t_1$, и если

$$J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)=P(\mathbf{x}^1)+\int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\,dt, \tag{10.115}$$

то теоремы 10.5 и 10.6 остаются в силе при условии, что соотношение $V(t_1, \mathbf{x}^1)=0$ заменяется соотношением

$$V(t_1, \mathbf{x}^1)=P(\mathbf{x}^1). \tag{10.116}$$

Разумеется, что (10.116) имеет место на многообразии (10.114). Для определения решений канонических уравнений, вообще говоря, при $k<n$ не будет хватать краевых условий. Дополнительные условия определяются с помощью условий трансверсальности и из (10.114). Будем считать для определенности векторы $\operatorname{grad} g_j$ линейно независимыми. Тогда, как было показано ранее, из (10.116) при условии (10.114) вытекает

$$\operatorname{grad} V(t_1, \mathbf{x}^1)=\operatorname{grad} P(\mathbf{x}^1)+\sum_{j=1}^{k} l_j \operatorname{grad} g_j, \tag{10.117}$$

где $l_1, \ldots, l_k$ — некоторые вещественные постоянные. Иначе из (10.117) имеем

$$\lambda_s(t_1)=\frac{\partial P(\mathbf{x}^1)}{\partial x_s}+\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g_j(\mathbf{x}^1)}{\partial x_s}, \quad s=1, \ldots, n. \tag{10.118}$$

Условие (10.118) совместно с начальным условием $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0$ при $t=t_0$ и условием (10.114) дают полную совокупность краевых условий, необходимых для нахождения решений канонических уравнений.

Пример 10.4. Пусть задана система

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)u_1 + R(t)u_2 + F(t), \qquad (10.119)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (A^*x + B_1^*u_1 + B_2^*u_2)\,dt + C^*u_1, \qquad (10.120)$$

$$A_j^*x^1 + b_j = 0, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Возьмем $V(t, x) = \lambda^*x + \varphi(t)$. Будем считать, что элементы матриц P, Q, R а также компоненты векторов A, B_1, B_2 и F являются вещественными кусочно-непрерывными функциями, заданными при $t \in [t_1, t_2]$.

Векторы A_j, $j = 1, \ldots, k$, C будем считать вещественными, а b_j, $j = 1, \ldots, k$ — вещественные числа. Предположим далее, что векторы A_j линейно независимы. Положим

$$Z = V(t, x) + \int_{t_1}^{t_1} F_0\,dt, \qquad F_0 = A^*x + B_1^*u_1 + B_2^*u_2.$$

Тогда имеем

$$\dot{Z} = W = \dot{V} + F_0 = (\dot{\lambda}^* + \lambda^*P + A^*)x + (\lambda^*Q + B_1^*)u_1 + (\lambda^*R + B_2^*)u_2 + \lambda^*F + \dot{\varphi}.$$

Пусть управления u_1 и u_2 стеснены ограничениями

$$|u_{1i_1}| \leqslant 1, \quad i_1 = 1, \ldots, r_1, \qquad |u_{2i_2}| \leqslant 1, \quad i_2 = 1, \ldots, r_2.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} u_{1i_1}^0 &= -\operatorname{sign}(\lambda^*Q + B_1^*)_{i_1}, \\ u_{2i_2}^0 &= \operatorname{sign}(\lambda^*R + B_2^*)_{i_2}, \end{aligned}\right\} \qquad (10.121)$$

$$i_1 = 1, \ldots, r_1; \; i_2 = 1, \ldots, r_2.$$

При управлениях (10.121) будет иметь место соотношение

$$W(t, x, u_1, u_2^0) \geqslant W(t, x, u_1^0, u_2^0) \geqslant W(t, x, u_1^0, u_2). \qquad (10.122)$$

Выберем теперь вектор λ и функцию φ так, чтобы $W(t, x, u_1^0, u_2^0) = 0$. Тогда будем иметь

$$(\dot{\lambda}^* + \lambda^*P + A^*) = 0, \qquad (10.123)$$

$$\dot{\varphi} - \sum_{i_1=1}^{r_1} |(\lambda^*Q + B_1^*)_{i_1}| + \sum_{i_2=1}^{r_2} |(\lambda^*R + B_2^*)_{i_2}| = 0. \qquad (10.124)$$

При выполнениях (10.123) и (10.124) управления (10.121) доставляют функционалу (10.120) значения $J(u_1^0, u_2^0)$ так, что имеет место

$$J(u_1, u_2^0) \geqslant J(u_1^0, u_2^0) \geqslant J(u_1^0, u_2).$$

Тем самым u_1^0, u_2^0 — оптимальные стратегии. Эти стратегии зависят от k произвольных постоянных $l_1, \ldots, l_k$, значения которых можно определить из условий

$$A_j^*x^1 + b_j = 0, \quad j = 1 \ldots k.$$

Глава III

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

§ 11. Синтез оптимального управления в линейных системах с бесконечным временем существования

Пусть задана система n дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{i=1}^{n} p_{si}(t)\,x_i+\sum_{i=1}^{r} q_{si}(t)\,u_i(t). \qquad (11.1)$$

Будем считать, что функции

$$p_{si}(t),\ i=1,\ \ldots,\ n \quad \text{и} \quad q_{si}(t),\ i=1,\ \ldots,\ r;\quad s=1,\ \ldots,\ n,$$

заданы при $t\geqslant 0$, вещественны, ограничены и непрерывны.

Будем далее пользоваться векторной записью системы (11.1)

$$d\mathrm{x}/dt=P(t)\,\mathrm{x}+Q(t)\,\mathrm{u}, \qquad (11.2)$$

где x — n-мерный вектор $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$; u — r-мерный вектор $(u_1,\ \ldots,u_r)$; P и Q — матрицы порядка соответственно $n\times n$ и $n\times r$.

Предположим, что система (11.2) описывает процесс регулирования в некоторой физической системе, так что функции $u_1,\ \ldots,\ u_r$ являются управлениями, а функции $x_1,\ \ldots,\ x_n$ — фазовыми координатами системы. Предположим, что задан функционал

$$J=\int_0^\infty W^2\,dt, \qquad (11.3)$$

где W^2 — квадратичная форма величин $x_1, x_2,\ \ldots,\ x_n,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_r$ вида

$$W^2=\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} b_{ij}x_iu_j+\sum_{i,\,j=1}^{r} c_{ij}u_iu_j. \qquad (11.4)$$

Правую часть (11.4) можно записать в векторно-матричной форме, а именно:

$$W^2=\mathrm{x}^*A\mathrm{x}+\mathrm{x}^*B\mathrm{u}+\mathrm{u}^*B^*\mathrm{x}+\mathrm{u}^*C\mathrm{u},$$

где A, B, C — матрицы соответствующих размерностей, причем звездочка означает операцию транспонирования. Будем считать,

что все коэффициенты квадратичной формы (11.4) заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, ограничены и непрерывны. Заметим, что в векторно-матричной записи квадратичной формы (11.4) считается всегда, что матрицы A и C симметричны.

Сделаем предположение, существенное для дальнейшего, а именно: будем считать, что квадратичная форма $\mathbf{u}^*C\mathbf{u}$ является положительно определенной функцией переменных. Иначе говоря, будем считать, что существует число $a > 0$ такое, что $\mathbf{u}^*C\mathbf{u} \geqslant a \sum_{i=1}^{r} u_i^2$ при всех $t \geqslant 0$.

Определение 11.1. *Управления $u_1, \ldots, u_r$ называются допустимыми, если выполнены условия*

$$1) \qquad u_j = \sum_{i=1}^{r} m_{ji}(t) x_i, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{11.5}$$

где m_{ji} — функции, заданные при $t \geqslant 0$, вещественные, ограниченные и непрерывные;

2) *каждое решение системы (11.1), удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ при $t = t_0$, удовлетворяет неравенству*

$$\|\mathbf{x}\| \leqslant c_1 \|\mathbf{x}_0\| e^{-c_2(t-t_0)} \tag{11.6}$$

при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, где c_1 и c_2 — положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от функций $m_{ji}(t)$, $j = 1, \ldots, r$; $i = 1, \ldots, n$, а

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Если в систему (11.1) подставить допустимые управления, то она превратится в систему обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений, нулевое решение которой будет асимптотически устойчиво по Ляпунову, причем равномерно по $t_0 \geqslant 0$. Заметим, что допустимые управления можно определить векторным равенством $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = M(t)\mathbf{x}$, что следует из (11.5).

Выберем некоторый начальный вектор $\mathbf{x}_0$ и некоторое допустимое управление $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$. Тогда функционал (11.3) можно записать в форме

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \int_0^\infty W^2\, dt.$$

В силу (11.6) величина $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ конечная на любом допустимом управлении.

Определение 11.2. *Допустимое управление $\mathbf{u}_0 = M_0\mathbf{x}$ называется оптимальным по отношению к функционалу* (11.3) *при*

фиксированном $\mathbf{x}_0$, *если среди всех допустимых управлений* $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = M(t)\mathbf{x}$ *оно доставляет величине* $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ *наименьшее возможное значение.*

Перейдем теперь к отысканию условий существования оптимального управления и построению методов его вычисления.

Лемма 11.1. *Если* $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = M(t)\mathbf{x}$ *есть допустимое управление, то управление* $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) + \varepsilon\bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x})$ *также будет допустимым при достаточно малом* $|\varepsilon|$, *где* $\bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) = N(t)\mathbf{x}$. *Здесь* $N(t)$*—матрица порядка* $r \times n$, *все элементы которой заданы при* $t \geq 0$, *вещественны, ограничены и непрерывны, а* ε*—вещественное число.*

Доказательство. С целью использования в дальнейшем некоторых результатов теории устойчивости движения изложим доказательство этой леммы несколько подробнее. Положим

$$W = \sum_{i, k=1}^{n} \beta_{ik}(t) x_i x_k, \tag{11.7}$$

где $\beta_{ik}(t)$ заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, ограничены, непрерывны и таковы, что существуют два положительных числа β_1 и β_2, удовлетворяющие неравенствам

$$-\beta_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leqslant W \leqslant -\beta_2 \|\mathbf{x}\|^2. \tag{11.8}$$

Пусть задана произвольная система линейных дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \bar{P}(t)\mathbf{x}$, относительно которой известно, что она имеет асимптотически устойчивое нулевое решение, причем каждое ее решение удовлетворяет неравенствам вида (11.6). Тогда функция

$$V = \int_t^{\infty} [-W]\, d\tau \tag{11.9}$$

может быть представлена в форме

$$V = \sum_{i, k=1}^{n} \alpha_{ik} x_i x_k, \tag{11.10}$$

где α_{ik}, $k = 1, \ldots, n$, заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, непрерывны, ограничены и таковы, что существуют два положительных числа α_1 и α_2, удовлетворяющие неравенствам

$$\alpha_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leqslant V \leqslant \alpha_2 \|\mathbf{x}\|^2. \tag{11.11}$$

Ясно, что функции V и W будут связаны между собой соотношением

$$dV/dt = W, \tag{11.12}$$

или

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\left[\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_{si}x_i\right]=W \tag{11.13}$$

Полная производная в уравнении (11.12) вычисляется вдоль интегральных кривых рассматриваемой линейной системы и, следовательно имеет вид левой части равенства (11.13).

Заметим, что справедливо также и обратное утверждение, а именно: если существуют две функции вида V и W (11.10) и (11.7), удовлетворяющие неравенствам (11.11) и (11.8) и связанные между собой уравнением (11.13), то всякое решение рассматриваемой системы удовлетворяет неравенству вида (11.6).

Итак, пусть матрица $\overline{P}$ имеет вид

$$\overline{P}(t)=P(t)+Q(t)M(t).$$

Так как управление $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})=M(t)\mathbf{x}$ допустимо, то для выбранной функции (11.7) можно построить при помощи (11.9) функцию V, удовлетворяющую неравенствам (11.11). Рассмотрим далее полную производную функции V, вычисленную в силу системы (11.1) при $\mathbf{u}=M(t)\mathbf{x}+\varepsilon N(t)\mathbf{x}$.

Тогда

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\left[P(t)\mathbf{x}+Q(t)M(t)\mathbf{x}+\varepsilon Q(t)N(t)\mathbf{x}\right]_s,$$

где индекс s означает, что берется s-я компонента вектора, стоящего в скобках. Из соотношения (11.12) имеем

$$dV/dt=W+W_1, \tag{11.14}$$

где

$$W_1=\varepsilon\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\left[Q(t)N(t)\mathbf{x}\right]_s. \tag{11.15}$$

Из формул (11.15) и (11.14) следует, что ε всегда можно выбрать столь малым по модулю, что будет выполнено неравенство

$$-\overline{\beta}_1\|\mathbf{x}\|^2\leqslant W+W_1\leqslant-\overline{\beta}_2\|\mathbf{x}\|^2,$$

где $\overline{\beta}_1$, $\overline{\beta}_2$ — положительные постоянные.

При таких ε функции V и W удовлетворяют приведенному выше утверждению. Значит, при таких ε выполнено неравенство (11.6) для любого решения системы (11.2) при

$$\mathbf{u}=[M(t)+\varepsilon N(t)]\mathbf{x},$$

и, следовательно, это управление является допустимым. Лемма 11.1 доказана.

Теорема 11.1. *Для существования оптимального управления* $u_0 = M_0(t)x$ *для системы* (11.2) *при любом выборе начального вектора* x_0 *необходимо и достаточно, чтобы уравнение*

$$\frac{d\Theta}{dt} + \Theta QC^{-1}Q^*\Theta + \Theta[P - QC^{-1}B^*] + [P^* - BC^{-1}Q^*]\Theta - \\ - A + BC^{-1}B^* = 0 \quad (11.16)$$

имело вещественное, непрерывное, ограниченное решение, заданное при $t \geqslant 0$ *в виде такой симметричной матрицы* $\Theta(t)$ *порядка* $n \times n$, *чтобы управление*

$$u = C^{-1}[Q^*\Theta - B^*]x \quad (11.17)$$

было допустимым. При этом матрица $M_0(t)$ *в оптимальном управлении определяется формулой*

$$M_0(t) = C^{-1}[Q^*\Theta - B^*].$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $u_0 = M_0(t)x$ есть управление для системы (11.2), оптимальное по отношению к функционалу (11.3) при любом выборе начального вектора x_0. Положим

$$V_0 = \int_t^\infty W^2(\tau, x, u_0)\,d\tau. \quad (11.18)$$

Векторная функция x, стоящая под интегралом в (11.18), является решением системы (11.2) при управлении $u = u_0$. Функция V_0, как следует из предыдущего, будет квадратичной формой. Поэтому ее можно представить в виде

$$V_0 = -x^*\Theta(t)x,$$

где $\Theta(t)$ — некоторая симметричная вещественная матрица, определенная единственным образом. Действительно, обозначим через $Y_0(t)$ такую фундаментальную систему решений для системы (11.2) при управлении $u = u_0$, что $Y_0(0) = E$. Тогда любое решение системы (11.2) с начальным условием $x = x_0$ при $t = 0$ запишется так: $x(t) = Y_0(t)x_0$. Подставляя это выражение решения в (11.18), находим

$$-x_0^*Y_0^*\Theta(t)Y_0(t)x_0 = \\ = \int_t^\infty x_0^*[Y_0^*AY_0 + Y_0^*BM_0Y_0 + Y_0^*M_0^*B^*Y + Y_0^*M_0^*CM_0Y_0]x_0\,d\tau. \quad (11.19)$$

Так как (11.19) имеет место при любом начальном векторе x_0, то при любом $t \geqslant 0$ справедливо равенство

$$-Y_0^*\Theta(t)Y_0 = \int_t^\infty Y_0^*[A + BM_0 + M_0^*B^* + M_0^*CM_0]Y_0\,d\tau,$$

откуда

$$\Theta(t) = -(Y_0^*)^{-1}\left[\int_t^\infty Y_0^*[A + BM_0 + M_0^*B^* + M_0^*CM_0]Y_0\,d\tau\right]Y_0^{-1}. \tag{11.20}$$

Из (11.20) вытекает, что матрица $\Theta(t)$ определяется по матрице $M_0(t)$ единственным образом. Покажем теперь, что матрица $\Theta(t)$ удовлетворяет уравнению (11.16). С этой целью воспользуемся условием оптимальности управления

$$u_0 = M_0(t)\,x.$$

Чтобы вывести это условие оптимальности, рассмотрим допустимое управление вида

$$u = u_0 + \varepsilon N(t)\,x,$$

где $N(t)$ — произвольная, но фиксированная, вещественная, ограниченная, непрерывная матрица, заданная при $t \geqslant 0$. Зафиксируем некоторое начальное условие $x_0 \neq 0$. Тогда из оптимальности управления u_0 при любом начальном условии вытекает, что функция $J[x_0, u_0 + \varepsilon N(t)\,x]$ имеет наименьшее значение при $\varepsilon = 0$. Следовательно, выполнено равенство

$$dJ/d\varepsilon = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0. \tag{11.21}$$

Обозначим через $x = x(t, \varepsilon)$ решение системы (11.2) при $u = u_0 + \varepsilon N(t)\,x$ и начальном условии $x = x_0$ при $t = 0$ и положим $\xi = \partial x/\partial\varepsilon$ при $\varepsilon = 0$.

Дифференцируя систему (11.2) при упомянутом управлении вдоль такого решения по параметру ε и полагая $\varepsilon = 0$, находим что векторная функция ξ удовлетворяет системе уравнений

$$d\xi/dt = P_0\xi + QNx \tag{11.22}$$

и начальному условию $\xi = 0$ при $t = 0$. Последнее имеет место в силу того, что начальное условие x_0 фиксировано и не зависит от ε.

В системе (11.22) через P_0 обозначена матрица $P_0 = P + QM_0$. Векторная функция x, входящая в систему (11.22), есть введенное выше решение системы (11.2) при $u = u_0$ с начальным условием x_0.

Из системы (11.22) находим

$$\xi = Y_0(t)\int_0^t Y_0^{-1}(\tau)\,Q(\tau)\,\mathrm{l}(\tau)\,d\tau, \qquad (11.23)$$

где $\mathrm{l} = N\mathrm{x}$ — r-мерный вектор, принимающий наперед заданные значения в любой фиксированный момент t. Это обстоятельство имеет место потому, что вектор $\mathrm{x}(t)$ не является нулевым при любом $t \in [0, +\infty)$. Следовательно, каждая компонента вектора l, являющаяся скалярным произведением соответствующей строки матрицы N на этот вектор, может принимать наперед заданные значения в любой фиксированный момент t за счет выбора упомянутой строки матрицы.

Перейдем теперь к преобразованию равенства (11.21). Дифференцируя под знаком интеграла по ε и полагая $\varepsilon = 0$, находим

$$\int_0^\infty \{\xi^*A\mathrm{x} + \xi^*B\mathrm{u}_0 + [\xi^*M_0^* + \mathrm{l}^*]\,B^*\mathrm{x} + [\xi^*M_0^* + \mathrm{l}^*]\,C\mathrm{u}_0\}\,dt = 0. \qquad (11.24)$$

Равенство (11.24) может быть переписано в форме

$$\int_0^\infty \{\xi^*[A + BM_0 + M_0^*B^* + M_0^*CM_0]\,\mathrm{x} + \mathrm{l}^*[B^* + CM_0]\,\mathrm{x}\}\,dt = 0.$$

Используя (11.23) и меняя порядок интегрирования, находим

$$\int_0^\infty \mathrm{l}^*\left\{Q^*(Y_0^*)^{-1}\int_t^\infty Y_0^*[A + BM_0 + M_0^*B^* + M_0^*CM_0]\,\mathrm{x}\,d\tau + B^*\mathrm{x} + CM_0\mathrm{x}\right\}dt = 0. \qquad (11.25)$$

Из свойств вектора l вытекает, что (11.25) имеет место тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$Q^*(Y_0^*)^{-1}\int_t^\infty Y_0^*[A + BM_0 + M_0^*B^* + M^*CM_0]\,\mathrm{x}\,d\tau + [B^* + CM_0]\,\mathrm{x} = 0. \qquad (11.26)$$

Заменим в равенстве (11.26) под знаком интеграла векторную функцию x по формуле $\mathrm{x} = Y_0(t)\,\mathrm{x}_0$.

Вынесем постоянный вектор x_0 из-под знака интеграла и затем вновь заменим его выражением $Y_0^{-1}(t)\,\mathrm{x}$. Тогда (11.26) примет вид

$$Q^*\Theta\mathrm{x} = [CM_0 + B^*]\,\mathrm{x}. \qquad (11.27)$$

В равенстве (11.27) матрица $\Theta(t)$ определяется выражением (11.20). Условие (11.27) есть необходимое условие оптимальности, так как оно определяет необходимый вид оптимального управления u_0:

$$u_0 = C^{-1}[Q^*\Theta - B^*]x.$$

Так как управление u_0 является оптимальным для любого начального вектора x_0, то, следовательно, (11.27) имеет место при любом x. А тогда необходимо должно иметь место равенство

$$Q^*\Theta = CM_0 + B^*,$$

откуда

$$M_0 = C^{-1}(Q^*\Theta - B^*). \tag{11.28}$$

Матрица $\Theta(t)$, определяемая (11.20), задана при $t \geqslant 0$, непрерывна и ограничена (см. доказательство леммы). Остается показать, что она является решением уравнения (11.16), а это проверяется непосредственно путем подстановки (11.20) в уравнение (11.16) с учетом равенства (11.28).

Достаточность. Пусть существует вещественное решение $\Theta(t)$ уравнения (11.16), заданное при $t \geqslant 0$, ограниченное и непрерывное, такое, что управление

$$u_0(x, t) = M_0(t)x,$$

где

$$M_0 = C^{-1}(Q^*\Theta - B^*),$$

является допустимым. Тогда система (11.2) имеет оптимальное по отношению к функционалу (11.3) управление при любом выборе начального условия x_0, и это оптимальное управление определяется формулой

$$u_0 = M_0(t)x.$$

Действительно, введем в рассмотрение функцию

$$V_0 = \int_t^\infty W^2(\tau, x, u_0)\,d\tau. \tag{11.29}$$

Из предыдущего вытекает, что

$$V_0 = -x^*\Theta(t)x.$$

Оптимальность управления $u_0 = M_0x$ означает следующее: зафиксируем некоторое начальное условие x_0; тогда при любом допустимом управлении $u_1 \not\equiv u_0$ будет

$$J(x_0, u_0) \leqslant J(x_0, u_1).$$

Последнее неравенство можно написать также в форме

$$V_0(\mathrm{x}_0,\ 0) \leqslant \int_0^\infty W^2(t,\ \mathrm{x},\ \mathrm{u})\,dt. \tag{11.30}$$

Интегрирование в неравенстве (11.30) осуществляется вдоль интегральной кривой системы (11.2), исходящей в момент $t=0$ из точки x_0 при управлении u_1. Пусть управление u_0 не является оптимальным при данном x_0. Тогда существует другое допустимое управление u_1, такое, что

$$V_0(\mathrm{x}_0,\ 0) > \int_0^\infty W^2(t,\ \mathrm{x},\ \mathrm{u}_1)\,dt. \tag{11.31}$$

При достаточно малых $t \geqslant 0$ в силу непрерывности также будет иметь место неравенство

$$V_0(\mathrm{x}(t),\ t) > \int_t^\infty W^2(\tau,\ \mathrm{x},\ \mathrm{u}_1)\,d\tau. \tag{11.32}$$

Рассмотрим функцию

$$z(t) = V_0(\mathrm{x}(t),\ t) - \int_t^\infty W^2(\tau,\ \mathrm{x},\ \mathrm{u}_1)\,d\tau. \tag{11.33}$$

Из допустимости управления u_1 и ограниченности матрицы $\Theta(t)$ вытекает, что $z(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Вычислим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dV_0(\mathrm{x}(t),\ t)}{dt} + W^2(t,\ \mathrm{x},\ \mathrm{u}_1) =$$

$$= -\left[(P\mathrm{x} + Q\mathrm{u}_0)^*\Theta\mathrm{x} + \mathrm{x}^*\Theta\{P\mathrm{x} + Q\mathrm{u}_0\} + \mathrm{x}^*\frac{d\Theta}{dt}\mathrm{x}\right] + W^2(t,\ \mathrm{x},\ \mathrm{u}_1). \tag{11.34}$$

Из функций (11.29) и (11.33) следует, что $\dot z \equiv 0$ при $\mathrm{u}_1 \equiv \mathrm{u}_0$. Из равенства $\mathrm{u}_0 = M_0\mathrm{x}$ вытекает, что функция $\dot z$ имеет при $\mathrm{u}_1 \equiv \mathrm{u}_0$ наименьшее возможное значение, следовательно, при $\mathrm{u}_1 \not\equiv \mathrm{u}_0$ будет $\dot z^2 \geqslant 0$. Тогда из (11.31) и (11.33) следует, что $z(t) \geqslant z(0) > 0$, а это противоречит утверждению, что $z(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Отсюда вытекает, что управление u_0 является оптимальным для фиксированного x_0.

Ввиду произвольности вектора x_0 можно считать управление $\mathrm{u}_0 = M_0(t)\,\mathrm{x}$ оптимальным для любого выбора начальных условий.

Отметим, что из доказательства также следует, что если u_1 — допустимое и $\mathrm{u}_1 \not\equiv \mathrm{u}_0$, то

$$J(\mathrm{x}_0,\ \mathrm{u}_0) < J(\mathrm{x}_0,\ \mathrm{u}_1)$$

при $x_0 \neq 0$. Действительно, если $z(0)=0$, то существует момент $\bar{t}$, для которого $z(\bar{t})>0$, а тогда $z(t)>0$ и, следовательно, $z(t) \geqslant z(\bar{t})>0$, что невозможно по предыдущему.

Определение 11.3. *Непрерывная векторная функция* $u(t)$, *заданная при* $t \geqslant 0$, *называется допустимой для* x_0, *если интегральная кривая системы* (11.2) $x=x(t)$ *при* $u=u(t)$, $x(0)=x_0$ *обладает свойством* $x \to 0$ *при* $t \to \infty$ *и интеграл*

$$\int_0^\infty W^2(\tau,\ x(\tau),\ u(\tau))\, d\tau \tag{11.35}$$

сходится.

Определение 11.4. *Допустимое в смысле определения* 11.3 *управление* $u_0(t)$ *называется оптимальным, если оно доставляет наименьшее значение функционалу* (11.35) *среди всех таких допустимых управлений.*

Замечание 1. Если существует ограниченное, непрерывное, заданное при $t \geqslant 0$ решение $\Theta(t)$ уравнения (11.16), такое, что управление

$$u_0(t)=C^{-1}(Q^*\Theta-B^*)Y_0x_0$$

является допустимым в смысле определения 11.1, то существует оптимальное управление в смысле определения 11.4 задаваемое формулой

$$u_0(t)=C^{-1}(Q^*\Theta-B^*)Y_0x_0. \tag{11.36}$$

Это утверждение является непосредственным следствием рассуждения, приведенного в доказательстве достаточности теоремы 11.1. А именно, здесь следует ввести в рассмотрение функцию $z(t)$ и убедиться, что $z(t) \geqslant 0$ на любом допустимом в смысле определения 11.3 управлении и, далее, что $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$ для всех таких управлений. Неравенства $z(t) \geqslant z(0)>0$ или $z(t) \geqslant z(\bar{t})>0$ будут противоречить этому свойству, если предположить, что управление (11.36) не оптимально в смысле определения 11.4.

Теорема 11.2. *Уравнение* (11.16) *тогда и только тогда имеет вещественное, непрерывное, ограниченное решение* $\Theta(t)$, *заданное при* $t \geqslant 0$ *и такое, что управление*

$$u_0=C^{-1}[Q^*\Theta(t)-B^*]x$$

является допустимым в смысле определения 11.1, *когда существует совокупность* n *линейно независимых векторов* $x_{01}, \ldots, x_{0n}$, *обладающих следующими свойствами:*

1) *система* (11.2) *имеет оптимальное в смысле определения* 11.4 *управление* $u_{0j}(t)$ *для начального условия* x_{0j} $(j=1, \ldots, n)$;

2) *управление*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t) = M(t)\,\mathbf{x},$$

где $M(t) = U(t)\,[D(t)]^{-1}$, *допустимо в смысле определения* 11.1.

Здесь $U(t)$ — матрица, j-й столбец которой есть вектор $\mathbf{u}_{0j}(t)$; $D(t)$ — матрица, j-м столбцом которой является решение уравнения (11.2) $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{0j}$ при управлении $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{0j}(t)$ с начальным условием $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{0j}$ при $t = 0$.

Доказательство. Необходимость условия настоящей теоремы вытекает из замечания 1 к теореме 11.1. Остановимся на доказательстве достаточности, для чего построим функцию

$$V_0 = \int_t^{\infty} W^2(\tau,\ \mathbf{x}(\tau),\ \bar{\mathbf{u}})\,d\tau, \tag{11.37}$$

где $\mathbf{x}(t)$ — решение системы (11.2) при управлении $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\ t)$ с начальным условием $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ при $t = 0$.

Возьмем некоторое допустимое в смысле определения 1 управление $\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)$ и покажем, что при $\mathbf{x}_0 \neq 0$ обязательно будет

$$J(\mathbf{x}_0,\ \mathbf{u}) > J(\mathbf{x}_0,\ \bar{\mathbf{u}});\quad \mathbf{u} \neq \bar{\mathbf{u}}.$$

Иначе говоря, покажем, что $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\ t)$ оптимально в смысле определения 11.2 для любого $\mathbf{x}_0$. Тогда из доказательства необходимости теоремы 11.1 следует, что требуемое решение уравнения (11.16) существует, причем это решение будет совпадать с матрицей квадратичной формы (11.37), взятой с обратным знаком.

Итак, требуется установить, что $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\ t)$ является оптимальным управлением в смысле определения 11.2 для любого начального вектора $\mathbf{x}_0$. Возьмем некоторое допустимое управление $\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)$ и зафиксируем начальное значение вектора $\mathbf{x}_0 \neq 0$. Построим функцию $z(t)$:

$$z(t) = V_0(\mathbf{x}(t),\ t) - \int_t^{\infty} W^2(\tau,\ \mathbf{x}(\tau),\ \mathbf{u})\,d\tau,$$

$$dz/dt \equiv 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\ t).$$

Следовательно, как вытекает из доказательства достаточности теоремы 11.1 теорема будет установлена, если показать, что $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\ t)$ доставляет функции dz/dt наименьшее возможное значение по сравнению с другими допустимыми управлениями $\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)$. Функция dz/dt принимает свое наименьшее значение по сравнению с другими допустимыми управлениями $\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)$. Функция $z(t)$ принимает свое наименьшее значение при

$$\mathbf{u}_{\min} = C^{-1}\,[Q^*\Theta - B^*]\,\mathbf{x}, \tag{11.38}$$

где $[-\Theta]$—матрица квадратичной формы (11.37), ибо (11.38) есть необходимое условие минимума $\dot{z}(t)$ как функции переменных $u_1, \ldots, u_r$. Выражение (11.38) действительно дает наименьшее возможное значение функции $z(t)$, так как квадратичная форма $\mathrm{u}^*C\mathrm{u}$ положительно определена, и, следовательно, выполнено достаточное условие минимума. Таким образом, остается показать, что $\bar{\mathrm{u}}(\mathrm{x}, t) = \mathrm{u}_{\min}$.

С этой целью воспользуемся необходимыми условиями, которые получаются из факта оптимальности управления $\mathrm{u}_{0j}(t)$. При выполнении условий теоремы 11.2 для каждого начального значения x_{0j} можно указать семейство управлений

$$\mathrm{u}_j = \mathrm{u}_{0j}(t) + \varepsilon V_j(t, \varepsilon),$$

допустимых в смысле определения 3 при любом достаточно малом $|\varepsilon|$. Эти управления обладают тем свойством, что решения системы (11.2) $\mathrm{x}_j(t, \varepsilon)$ при таких $|\varepsilon|$ удовлетворяют неравенству

$$\|\mathrm{x}_j(t, \varepsilon)\| \leqslant ae^{-bt}, \tag{11.39}$$

где a, b—положительные константы, не зависящие от ε. Здесь подразумевается, что $\mathrm{x}_j(t, \varepsilon) = \mathrm{x}_{0j}$ при $t = 0$, а векторные функции $V_j(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ принимают любые наперед заданные значения и являются непрерывными по t и ε функциями, заданными при $t \geqslant 0$ и $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ и непрерывно дифференцируемые по ε.

Будем далее через $V_j(t)$ обозначать векторные функции $V_j(t, 0)$. Установим справедливость приведенного утверждения. Для этого рассмотрим систему дифференциальных уравнений (11.2) при $\mathrm{u} = M(t)\mathrm{x}$, где $M(t)$ определяется формулой

$$M(t) = U(t)[D(t)]^{-1}.$$

Путем непосредственного вычисления можно установить, что решение $\mathrm{x}_j(t)$ этой системы с начальным условием $\mathrm{x}_j(t) = \mathrm{x}_{0j}$ при $t = 0$ совпадает с решением системы

$$\dot{\mathrm{x}} = P(t)\mathrm{x} + Q(t)\mathrm{u}_{0j}(t) \tag{11.40}$$

при том же начальном условии, т. е. с решением $\mathrm{x}_{0j}(t)$ системы (11.40).

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{\mathrm{x}} = [P + QM]\mathrm{x} + \varepsilon QN(t)\mathrm{x}, \tag{11.41}$$

где $N(t)$—произвольная, непрерывная, ограниченная матрица, заданная при $t \geqslant 0$. Обозначим решение уравнения (11.41) с начальным условием x_{0j} при $t = 0$ через $\mathrm{x}_j(t, \varepsilon)$. Ясно, что $\mathrm{x}_j(t, \varepsilon) = \mathrm{x}_j(t)$ при $\varepsilon = 0$. Пусть $Y(t)$—такая фундаментальная система

решений для системы (11.41) при $\varepsilon=0$, что $Y(0)=E$. Тогда

$$x_j(t, \varepsilon)=x_j(t)+\varepsilon Y(t)\int_0^t Y^{-1}(\tau)\,Q(\tau)\,N(\tau)\,x_j(\tau, \varepsilon)\,d\tau. \quad (11.42)$$

Так как $M(t)\,x_j(t)=u_{0j}(t)$, то из системы (11.41) и (11.42) получим

$$dx/dt=Px+Q\,[u_{0j}(t)+\varepsilon V_j(t, \varepsilon)], \quad (11.43)$$

где

$$V_j(t, \varepsilon)=MY(t)\int_0^t Y^{-1}(\tau)\,Q(\tau)\,N(\tau)\,x_j(\tau, \varepsilon)\,d\tau+$$
$$+\varepsilon Nx_j(t)+\varepsilon NY(t)\int_0^t Y^{-1}(\tau)\,Q(\tau)\,N(\tau)\,x_j(\tau, \varepsilon)\,d\tau.$$

Следовательно,

$$V_j(t)=M(t)\,Y(t)\int_0^t Y^{-1}(\tau)\,Q(\tau)\,N(\tau)\,x_j(\tau)\,d\tau.$$

Оставим пока в стороне доказательство того, что вектор $V_j(t)$ принимает произвольные значения при надлежащем выборе матрицы N, и будем это предполагать. Тогда из доказательства необходимости теоремы 11.1 немедленно вытекает, что оптимальное управление $u_{0j}(t)$ и соответствующая ему оптимальная траектория $x_j(t)$ необходимо удовлетворяют равенству

$$Cu_{0j}(t)=[Q^*\Theta-B^*]\,x_j(t), \quad (11.44)$$

где $\Theta(t)$ определяется из соотношения (11.20), в котором Y_0, M_0 заменены соответственно на $Y(t)$, $M(t)$.

Пусть задан произвольный начальный вектор x_0, и пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — его координаты в базисе, определяемом векторами x_{0j}, $j=1, \ldots, n$, так что

$$x_0=\sum_{j=1}^n x_{0j}\xi_j.$$

Тогда векторная функция

$$x(t)=\sum_{j=1}^n \xi_j x_j(t)$$

будет непременно являться решением системы (11.41) при $\varepsilon=0$ с начальным условием x_0. Отсюда, в частности, следует, что

$$\sum_{j=1}^n u_{0j}(t)\,\xi_j=\sum_{j=1}^n M(t)\,x_j(t)\,\xi_j=M(t)\,x(t)=\bar{u}(t, x).$$

Умножая теперь обе части (11.44) на ξ_j и суммируя по j от 1 до n, находим

$$\bar{\mathrm{u}}(t, \mathrm{x}) = C^{-1}[Q^*\Theta(t) - B^*]\,\mathrm{x} = \mathrm{u}_{\min}.$$

Это равенство полностью доказывает теорему 11.2, ибо из него следует, что уравнение $\bar{\mathrm{u}}(t, \mathrm{x})$ оптимально в смысле определения 11.2.

При доказательстве теоремы 11.2 было использовано утверждение в том, что векторы $V_j(t)$ могут принимать наперед заданные произвольные значения. Покажем это. Вектор

$$V_j(t) = MY(t)\int_0^t Y^{-1}(\tau)\,Q(\tau)\,N(\tau)\,\mathrm{x}_j(\tau)\,d\tau + N\mathrm{x}_j(t)$$

может быть сделан произвольным лишь за счет выбора матрицы $N(t)$. Обозначим через $V(t)$ матрицу, столбцами которой являются векторы $V_j(t)$. Эта матрица удовлетворяет уравнению

$$V(t) = M(t)\,Y(t)\int_0^t Y^{-1}(\tau)\,Q(\tau)\,N(\tau)\,D(\tau)\,d\tau + N(t)\,D(t),$$

откуда имеем

$$N(t) = V(t)\,D^{-1}(t) - \left[M(t)\,Y(t)\int_0^t Y^{-1}(\tau)\,Q(\tau)\,N(\tau)\,D(\tau)\,d\tau\right]D^{-1}(t).$$

Для вывода необходимого условия оптимальности достаточно использовать лишь такие векторы $V_j(t)$, которые удовлетворяют равенству $V_j(t) \equiv 0$ при $t \geqslant T$, где T — любое фиксированное положительное число. Последнее уравнение определяет матрицу $N(t)$ при любом выборе таких векторов $V_j(t)$, причем эта матрица оказывается непрерывной и ограниченной, заданной при $t \geqslant 0$, что устанавливается с помощью метода последовательных приближений.

Следствие. *Из теоремы* 11.2 *вытекает, что построение оптимального управления*

$$\mathrm{u}_0(\mathrm{x}, t) = M_0(t)\,\mathrm{x},$$

если оно существует, можно всегда выполнить следующим образом. Надо выбрать систему начальных условий x_{0j} *(например, единичные векторы), построить для них оптимальные управления в смысле определения* 11.4 *и оптимальные траектории. Тогда матрица* $M_0(t)$ *совпадает с* $M(t)$ (см. теорему 11.2).

Если оптимальные управления и оптимальные траектории в смысле определения 11.4 построены приближенно, но оказалось, что управление $\mathrm{u}(\mathrm{x}, t) = M(t)\,\mathrm{x}$ является допустимым, то оно

будет сколь угодно близко к оптимальному управлению, если управления $u_{0j}(t)$ и соответствующие траектории $x_j(t)$ достаточно близки к оптимальным.

В теореме 11.1 указывается конструкция оптимального управления с помощью матрицы $\Theta(t)$, являющейся решением уравнения (11.16). Дадим способ последовательных приближений, обеспечивающий нахождение матрицы $\Theta(t)$ с любой наперед заданной степенью точности. Пусть $W^2(t, x, u)$—положительно определенная квадратичная форма величин $x_1, \ldots, x_n$; $u_1, \ldots, u_r$ и пусть существует по крайней мере одно допустимое управление в смысле определения 11.1. Упомянутый способ последовательных приближений состоит в следующем.

Возьмем допустимое управление

$$u_1(x, t) = M_1(t)x$$

и рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Theta_1}{dt} = \Theta_1(P + QM_1) + (P^* + M_1^*Q^*)\Theta_1 - \\ - [A + BM_1 + M_1^*B^* + M_1^*CM_1] = 0. \quad (11.45)$$

Система (11.45) имеет единственное вещественное и непрерывное решение $\Theta_1(t)$, заданное при $t \geqslant 0$ и ограниченное. Оставляя пока в стороне доказательство этого утверждения, положим

$$u_2(x, t) = M_2(t)x,$$

где

$$M_2(t) = C^{-1}(t)[Q^*(t)\Theta_1(t) - B^*(t)]. \quad (11.46)$$

Тогда оказывается, что $u_r(x, t)$ будет обязательно допустимым управлением в смысле определения 11.1. Заменяя в системе (11.45) M_1 на M_2, получим систему дифференциальных уравнений, имеющих единственное вещественное и непрерывное решение $\Theta_2(t)$, заданное при $t \geqslant 0$ и ограниченное. Аналогичным образом далее построим две последовательности:

$$\Theta_1(t),\ \Theta_2(t),\ \Theta_3(t), \ldots,$$
$$u_1(x, t),\ u_2(x, t),\ u_3(x, t), \ldots,$$

где $u_{k+1}(x, t) = M_{k+1}(t)x$—допустимое управление при любом $k \geqslant 0$, а

$$M_{k+1}(t) = C^{-1}(t)[Q^*(t)\Theta_k(t) - B^*(t)], \quad k = 1, 2, \ldots$$

Матрица $\Theta_k(t)$ есть единственное непрерывное и вещественное решение системы (11.45), заданное при $t \geqslant 0$ и ограниченное. Разумеется, в (11.45) следует заменить $M_1(t)$ на $M_k(t)$.

Теорема 11.3. *Если* а) $W^2(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$—*положительно определенная форма относительно* $x_1, \ldots, x_n$; $u_1, \ldots, u_r$; б) $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) = M_1(t)\mathbf{x}$—*допустимое управление в смысле определения* 11.1, *то*:

1) *для системы* (11.2) *существует управление* $\mathbf{u}_0(t, \mathbf{x}) = M_0(t)\mathbf{x}$, *оптимальное по отношению к функционалу* (11.3) *для любого начального вектора* $\mathbf{x}_0$;

2) *последовательность* $\Theta_1(t)$, $\Theta_2(t)$, ... *сходится равномерно на каждом конечном промежутке* $[0, T]$ *к вещественной непрерывной и ограниченной матрице* $\Theta(t)$, *заданной при* $t \geqslant 0$ *и являющейся решением уравнения* (11.16);

3) *последовательность* $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t)$, ... *сходится к оптимальному управлению* $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) = M_0(t)\mathbf{x}$ (*равномерно в каждой ограниченной области изменения величин* $x_1, \ldots, x_n, t$).

Доказательство. Разобьем доказательство теоремы на несколько частей.

1. Покажем сначала, что уравнение (11.45) имеет единственное вещественное, непрерывное, ограниченное решение $\Theta_1(t)$, заданное при $t \geqslant 0$ и любом выборе матрицы $M_1(t)$ такой, что управление $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) = M_1(t)\mathbf{x}$ является допустимым в смысле определения 11.1. Рассмотрим квадратичную форму

$$V_1(\mathbf{x}, t) = \int_t^\infty W^2(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1)\, d\tau. \tag{11.47}$$

Из доказательства леммы вытекает, что матрица этой квадратичной формы будет непрерывной и ограниченной при всех $t \geqslant 0$. Положим

$$V_1(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{x}^*\Theta_1(t)\mathbf{x}.$$

Дифференцируя (11.47) в силу системы (11.2) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$, найдем

$$\mathbf{x}^*\left[\frac{d\Theta}{dt} + \Theta_1(P + QM_1) + (P^* + M_1^*Q^*)\Theta_1 - \right.$$
$$\left. - (A + BM_1 + M_1^*B^* + M_1^*CM_1)\right]\mathbf{x} = 0. \tag{11.48}$$

Ввиду того что в (11.48) $\mathbf{x}$ можно считать произвольным вектором, заключаем, что матрица квадратичной формы (11.47), взятая с обратным знаком, обязательно является решением уравнения (11.45). Таким образом, уравнение (11.45) имеет ограниченное решение $\Theta_1(t)$, заданное при $t \geqslant 0$. Оно единственно, так как если бы существовало два решения, то их разность удовлетворяла бы уравнению

$$\frac{d\overline{\Theta}_1}{dt} + \overline{\Theta}_1(P + QM_1) + (P^* + M_1^*Q^*)\overline{\Theta}_1 = 0. \tag{11.49}$$

Пусть $\bar{\Theta}_1(t) \not\equiv 0$ — ограниченное решение уравнения (11.49). Рассмотрим квадратичную форму $x^*\bar{\Theta}_1(t)x$ на решениях системы (11.2) при $U = U_1(x, t)$. Найдется такой момент $\bar{t}$ и такой начальный вектор x_0, что будет $x_0^*\bar{\Theta}_1(\bar{t})x_0 \neq 0$.

Полная производная квадратичной формы $\bar{V} = -x^*\bar{\Theta}_1(t)x$ в силу системы (11.2) при $u = u_1(x, t)$ удовлетворяет соотношению $d\bar{V}/dt \equiv 0$, откуда $\bar{V}(x(t), t) \equiv V(x_0, \bar{t}) \neq 0$.

Последнее равенство противоречит тому, что $\bar{V}(x(t), t) \to 0$ при $t \to +\infty$, ибо $\bar{\Theta}_1(t)$ ограничено, а решения системы (11.2) в силу допустимости управления u_1 удовлетворяют неравенствам (11.6). Таким образом, существование и единственность решения системы (11.45) установлены.

Установим здесь же формулу, полезную для дальнейшего. Пусть $u_k(x, t) = M_k(t)x$ — допустимое управление. Обозначим через $Y_k(t)$ фундаментальную систему решений для уравнений (11.2) при $u = u_k$ с начальным условием $Y_k(0) = E$. Матрица (см. (11.20))

$$\Theta_k(t) = -(Y_k^*(t))^{-1} \times \\ \times \left\{ \int_t^\infty Y_k^*(\tau)\left[A + BM_k + M_k^*B^* + M_k^*CM_k\right] Y_k(\tau)\, d\tau \right\} (Y_k(t))^{-1}. \tag{11.50}$$

будет ограниченным решением уравнения (11.45), если M_1 заменить на M_k.

2. Пусть $\Theta_1(t)$ — ограниченное решение системы (11.45), тогда управление

$$u_2(x, t) = M_2(t)x,$$

где

$$M_2(t) = C^{-1}\left[Q^*(t)\Theta_1(t) - B^*(t)\right],$$

будет допустимым в смысле определения 11.1.

Рассмотрим квадратичную форму

$$V_1(x_1, t) = -x^*\Theta_1(t)x,$$

определенную согласно (11.47). Эта квадратичная форма является положительно определенной, а полная производная, вычисленная от нее в силу системы (11.2) при $u = u_1(x, t)$ совпадает с $-W^2(t, x, u_1)$.

Рассмотрим функцию

$$Z_1(t, x, u) = \frac{dV_1}{dt} + W^2(t, x, u), \tag{11.51}$$

где dV_1/dt — полная производная, вычисленная в силу системы (11.2) при

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)=M(t)\,\mathbf{x}.$$

Из сказанного выше вытекает, что

$$Z_1(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{u}_1)\equiv 0. \tag{11.52}$$

Функция (11.51), как легко проверить, достигает своего наименьшего значения, как функция переменных $u_1, \ldots, u_r$ при $\mathbf{u}=\mathbf{u}_2(\mathbf{x},\ t)$. Следовательно,

$$Z_1(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{u}_2(\mathbf{x},\ t))\leqslant 0. \tag{11.53}$$

Таким образом, производная dV_1/dt в силу системы (11.2) при $\mathbf{u}=\mathbf{u}_2(\mathbf{x},\ t)$ выражается, согласно (11.51), следующим образом:

$$dV_1/dt=-W^2+Z_1(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{u}_2(\mathbf{x},\ t)). \tag{11.54}$$

В силу (11.53) правая часть (11.54) есть отрицательно определенная функция переменных $x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_r$. А тогда из доказательства леммы вытекает, что все решения системы (11.2) при рассматриваемом управлении удовлетворяют условию (11.6). Следовательно, $\mathbf{u}_2=M_2(t)\,\mathbf{x}$ является допустимым управлением.

Заметим следующее. Если матрица Θ_k определяется равенством (11.50), то управление

$$\mathbf{u}_{k+1}(\mathbf{x},\ t)=M_{k+1}(t)\,\mathbf{x}$$

будет обязательно допустимым при

$$M_{k+1}(t)=C^{-1}(t)\,[Q^*(t)\,\Theta_k(t)-B^*(t)]. \tag{11.55}$$

3. Последовательность $\Theta_1(t),\ \Theta_2(t),\ \ldots$ равномерно ограничена. Действительно, введем в рассмотрение квадратичные формы $V_k(\mathbf{x},\ t)=-\mathbf{x}^*\Theta_k(t)\,\mathbf{x},\ k=1,\ 2,\ \ldots$ Ясно, что $V_k(\mathbf{x},\ t)\geqslant 0$ при $\mathbf{x}\in E_n,\ k=1,\ 2,\ \ldots$ Пусть $\bar{t}\geqslant 0$ — любой конечный момент времени, а $\bar{\mathbf{x}}$ — некоторый фиксированный вектор. Построим интегральные кривые системы (11.2) $\mathbf{x}_k(t)$ и $\mathbf{x}_{k+1}(t)$ соответственно для управлений $\mathbf{u}_k(\mathbf{x},\ t)$ и $\mathbf{u}_{k+1}(\mathbf{x},\ t)$ с начальным условием $\mathbf{x}_k=\mathbf{x}_{k+1}=\bar{\mathbf{x}}$ при $t=\bar{t}$.

Тогда

$$V_k(\bar{\mathbf{x}},\ \bar{t})=\int_{\bar{t}}^{\infty} W^2(\tau,\ \mathbf{x}_k,\ \mathbf{u}_k)\,d\tau,$$

$$V_{k+1}(\bar{\mathbf{x}},\ \bar{t})=\int_{0}^{\infty} W^2(\tau,\ \mathbf{x}_{k+1},\ \mathbf{u}_{k+1})\,d\tau.$$

В силу части 2 доказательства теоремы имеет место уравнение

$$\frac{d}{dt} V_k(\mathrm{x}_k(t), t) + W^2(t, \mathrm{x}_{k+1}(t), \mathrm{u}_{k+1}) = Z_k(t, \mathrm{x}_{k+1}(t), \mathrm{u}_{k+1}),$$

причем $Z_k(t, \mathrm{x}_{k+1}(t), \mathrm{u}_{k+1}) \leqslant 0$ для $t \geqslant 0$.

Интегрируя последнее равенство в пределах от t до $+\infty$, получаем

$$-V_k(\mathrm{x}, t) = -\int_{\bar{t}}^{\infty} W^2(\tau, \mathrm{x}_{k+1}(\tau), \mathrm{u}_{k+1})\, d\tau + \int_{\bar{t}}^{\infty} Z_k(\tau, \mathrm{x}_{k+1}(\tau), \mathrm{u}_{k+1})\, d\tau,$$

откуда $V_k(\bar{\mathrm{x}}, \bar{t}) \geqslant \int_{\bar{t}}^{\infty} W^2(\tau, \mathrm{x}_{k+1}(\tau), \mathrm{u}_{k+1})\, d\tau$.

Следовательно, $V_k(\bar{\mathrm{x}}, \bar{t}) \geqslant V_{k+1}(\bar{\mathrm{x}}, \bar{t})$. Из этого неравенства вытекает, что построенные последовательные приближения монотонно улучшают управление.

Если обозначить через $\lambda(t)$ наибольшее собственное число матрицы $[-\Theta_1(t)]$, то окажется, что $V_k(\mathrm{x}, t) \leqslant \lambda \|\mathrm{x}\|^2 \leqslant V_1$. Это показывает, что собственные числа матрицы $\Theta_k(t)$ ограничены в совокупности. Из их симметричности вытекает тогда, что все элементы матриц $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ ограничены в совокупности. Этим же свойством будут обладать матрицы $M_1(t), \ldots, M_k(t), \ldots$

4. Управления $\mathrm{u}_1(\mathrm{x}, t)$, $\mathrm{u}_2(\mathrm{x}, t), \ldots$ обладают тем свойством, что равномерно по k интегральные кривые системы (11.2) при $\mathrm{u} = \mathrm{u}_k(\mathrm{x}, t)$ удовлетворяют неравенствам

$$a_1 \|\mathrm{x}_0\| e^{-a_2(t-t_0)} \leqslant \|\mathrm{x}(t)\| \leqslant b_1 \|\mathrm{x}_0\| e^{-b_2(t-t_0)} \qquad (11.56)$$

при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, где a_i, b_i — положительные постоянные, не зависящие от k.

Действительно, ввиду равномерной ограниченности матриц $M_1, M_2, \ldots$ функции $W^2(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}_k)$ удовлетворяют неравенствам

$$c\|\mathrm{x}\|^2 \leqslant W^2(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}_k) \leqslant a\|\mathrm{x}\|^2, \qquad (11.57)$$

Из того же свойства матриц M_k вытекает, что коэффициенты линейной системы (11.2) при $\mathrm{u} = \mathrm{u}_k(\mathrm{x}, t)$ ограничены равномерно по отношению к k при $t \geqslant 0$, откуда следует, что решения этой системы будут удовлетворять неравенству

$$\|\mathrm{x}(t)\| \geqslant \alpha \|\mathrm{x}_0\| e^{-\beta(t-t_0)} \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0. \qquad (11.58)$$

где α, β — положительные постоянные, не зависящие от k, а $\mathrm{x}_0 = \mathrm{x}(t_0)$.

Из равенства

$$V_k(\mathrm{x}_0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} W^2(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}_k)\, dt$$

и неравенств (11.57), (11.58) находим, что

$$V_k(\mathrm{x}_0, t_0) \geqslant \mu \|\mathrm{x}_0\|^2,$$

где $\mu_0 > 0$ — постоянная. Отсюда вытекает, что наименьшее собственное число матрицы $[-\Theta_k(t)]$ не становится меньше числа μ. Итак, квадратичная форма V_k удовлетворяет неравенствам

$$a\|\mathrm{x}\|^2 \leqslant V_k(\mathrm{x}, t) \leqslant b\|\mathrm{x}\|^2. \tag{11.59}$$

Из (11.57) и (11.59) следует неравенство (11.56).

5. При выполнении теоремы существует оптимальное управление

$$\mathrm{u}_0(\mathrm{x}, t) = M_0(t)\,\mathrm{x}$$

и ограниченное решение уравнения (11.16), причем

$$M_0(t) = C^{-1}(t)\,[Q^*(t)\,\Theta(t) - B^*(t)].$$

Действительно, из равномерной ограниченности матриц M_1, M_2, ... и матриц $\Theta_1(t)$, $\Theta_2(t)$, ... вытекает, что $d\Theta_k/dt$ ограничена на каждом конечном промежутке $[0, T]$ равномерно по k. Значит, последовательность матриц $\Theta_1(t)$, $\Theta_2(t)$, ... удовлетворяет условию теоремы Арцелла. Поэтому существует такая подпоследовательность последовательности Θ_1, Θ_2, ..., которая будет равномерно сходиться к матрице $\Theta(t)$ на промежутке $[0, T]$. Этой же подпоследовательностью матрица $\Theta(t)$ определяется при всех $t \geqslant 0$. При помощи той же подпоследовательности и формулы (11.55) определяется подпоследовательность последовательности $M_1 M_2$, ..., сходящаяся к матрице $M_0(t)$. Переходя к пределу в этой подпоследовательности, из формулы (11.55) находим

$$M_0(t) = C^{-1}[Q^*\Theta(t) - B^*]. \tag{11.60}$$

Заменим далее в уравнении (11.45) M_1 на M_k, Θ_1 на Θ_k и перейдем к пределу в упомянутых подпоследовательностях, предварительно проинтегрировав полученное выражение в пределах от 0 до t. После перехода к пределу продифференцируем полученное выражение. Тогда найдем

$$\frac{d\Theta}{dt} = [A + BM_0 + M_0^*B^* + M_0^*CM_0] - [\Theta(P + QM_0) + (P^* + M_0^*Q^*)\Theta]. \tag{11.61}$$

Подставляя в это выражение значение матрицы M_0 из (11.60), получим, что $\Theta(t)$ удовлетворяет уравнению (11.16), ибо левая

часть (11.61) будет совпадать с левой частью уравнения (11.16). А тогда по теореме 11.1 управление (11.60) является оптимальным в смысле определения 11.2 при любом выборе начальных условий.

6. Последовательность Θ_1, Θ_2, ... сходится. Действительно, в силу компактности этой последовательности любая ее бесконечная подпоследовательность будет содержать другую подпоследовательность, сходящуюся к некоторой матрице $\overline{\Theta}(t)$. Из (11.55) будет вытекать тогда, что соответствующая подпоследовательность последовательности M_1, M_2, ... будет сходиться к матрице $\overline{M}_0$. При этом матрицы $\overline{M}_0$ и $\overline{\Theta}$ будут связаны между собой равенством (11.60) и, кроме того, они будут удовлетворять уравнению (11.16). Следовательно, управление $\overline{\mathbf{u}}=\overline{M}_0\mathbf{x}$ будет оптимальным в смысле определения 11.2. В силу единственности такого управления будет $\overline{\Theta}=\Theta$, $\overline{M}_0=M_0$. Таким образом, любая бесконечная подпоследовательность последовательности Θ_1, Θ_2, ... содержит подпоследовательность, сходящуюся к Θ. А тогда последовательность Θ_1, Θ_2, ... должна сама быть сходящейся и должна сходиться к $\Theta(t)$ равномерно на каждом конечном промежутке $[0, T]$.

Действительно, пусть это не так. Тогда можно указать $\overline{\varepsilon}>0$, при котором существует последовательность точек $t_1, \ldots, t_j$ и последовательность матриц Θ_{k_1}, Θ_{k_2}, ... такая, что будет $\|\Theta_{k_j}(t_j)-\Theta(t_j)\|\geqslant\overline{\varepsilon}$. Но в этом случае из последовательности Θ_{k_1}, Θ_{k_2}, ... нельзя выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно к матрице $\Theta(t)$ на промежутке $[0, T]$, что противоречит предыдущему. Из (11.55) вытекает также, что последовательность матриц M_1, M_2 будет сходиться равномерно к матрице $M_0(t)$ на каждом конечном промежутке $[0, T]$. И, значит, последовательность управлений $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t)$, ... сходится к оптимальному управлению $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)=M_0(t)\mathbf{x}$. Теорема 11.3 доказана.

Следствие 1. *Каково бы ни было допустимое управление* $\mathbf{u}_1(t, \mathbf{x})=M_1(t)\,\mathbf{x}$, *играющее роль начального приближения, матрица* $\Theta(t)$ *не изменится ввиду единственности оптимального управления. Следовательно, от начального приближения зависит лишь быстрота сходимости последовательных приближений.*

Следствие 2. *Если матрицы* P, Q, A, B, C, M *— постоянные и* $\mathbf{u}_1=M_1\mathbf{x}$ *— допустимое управление, то матрица* $\Theta(t)$, *а следовательно, и матрица* $M_0(t)$ *являются постоянными, и потому матрица* Θ *есть вещественное решение системы алгебраических уравнений*

$$\Theta QC^{-1}Q^*\Theta+\Theta[P-QC^{-1}B^*]+[P^*-BC^{-1}Q^*]\Theta-A+BC^{-1}B^*=0. \tag{11.62}$$

Действительно, каждое приближение Θ_k является постоянной матрицей. Следовательно, предел последовательности Θ_1, Θ_2, ... постоянен.

Из теоремы 11.3 вытекает метод последовательных приближений для вычисления искомого решения системы (11.62).

Система уравнений

$$\Theta_k(P+QM_k)+(P^*+M_k^*Q^*)\Theta_k-[A+BM_k+M_k^*B^*+M_k^*CM_k]=0, \tag{11.63}$$

где

$$M_k=C^{-1}[Q^*\Theta_{k-1}-B^*], \tag{11.64}$$

последовательно определяет матрицы Θ_1, Θ_2, ... сходящиеся к исходному пределу. Уравнения (11.63) получаются из уравнения (11.45) заменой M_1 на M_k и Θ_1 на Θ_k при условии, что ищется постоянное решение. Сходимость такого метода последовательных приближений для отыскания решения уравнения (11.62) установлена в доказательстве теоремы 11.3.

§ 12. Нелинейный случай

Предположим, что правые части системы

$$\frac{dx_s}{dt}=f_s(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r), \quad s=1, \ldots, n, \tag{12.1}$$

являются однозначными аналитическими функциями относительно величин $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r$ в окрестности точки

$$x_1=\ldots=x_n=0, \quad u_1=\ldots=u_r=0$$

и обращаются в этой точке в нуль. Будем считать, что функции f_s разлагаются в ряды

$$f_s=\sum_{j=1}^{n} p_{sj}(t)x_j+\sum_{j=1}^{n} q_{sj}(t)u_j+$$
$$+\sum_{\substack{m_1+m_2+\ldots+m_n+\\+n_1+n_2+\ldots+n_r\geqslant 2}}^{+\infty} p_s^{m_1,\ldots,m_n,n_1,\ldots,n_r}\cdot x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}\cdot u_1^{n_1}\ldots u_r^{n_r},$$
$$s=1, \ldots, n,$$

коэффициенты которых являются вещественными, непрерывными, однозначными, ограниченными функциями, заданными при $t\geqslant 0$. Кроме того, будем предполагать, что ряды сходятся равномерно по отношению к $t\geqslant 0$. Наряду с системой нелинейных уравнений рассмотрим систему первого приближения, которую запишем, как

и ранее, в векторно-матричной форме:

$$dx/dt = P(t)\,x + Q(t)\,u. \tag{12.2}$$

Предположим, что задан функционал

$$J = \int_0^\infty W(t, x, u)\,dt, \tag{12.3}$$

где $W(t, x, u)^0$ есть аналитическая функция, и

$$W = \sum_{m=2}^{\infty} W^m, \tag{12.4}$$

где W^m есть однородные формы степени m относительно $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r$ с вещественными, однозначными, ограниченными и непрерывными коэффициентами, являющимися функциями от t, заданными при $t \geqslant 0$. При этом будем считать, что W^2 имеет вид

$$W^2 = x^* A(t)\,x + x^* B(t)\,u + u^* B^*(t)\,x + u^* C(t)\,u.$$

Матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ обладают теми же свойствами, что и в § 11. Предположим, наконец, что ряд (12.4) сходится равномерно к $t \geqslant 0$ в некоторой фиксированной окрестности точки

$$x_1 = \ldots = x_n = 0, \quad u_1 = \ldots = u_r = 0.$$

Определение 12.1. *Управление* $u = (u_1, \ldots, u_r)$ *называется допустимым, если оно имеет вид*

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} u^m, \tag{12.5}$$

где $u^1(t, x) = M(t)\,x$ *является допустимым управлением для уравнения* (12.2) *в смысле определения* 11.1, u^m *являются однородными формами степени* m *относительно* $x_1, \ldots, x_n$. *Коэффициенты этих форм есть вещественные, однозначные, непрерывные, ограниченные вектор-функции, заданные при* $t \geqslant 0$ *и такие, что ряд* (12.5) *сходится равномерно по отношению к* $t \geqslant 0$ *в некоторой фиксированной окрестности точки* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Определение 12.2. *Допустимое управление* $u_0(t, x)$ *называется оптимальным относительно* x_0 *по отношению к функционалу* (12.3), *если при любом выборе допустимого управления* $u(t, x)$ *оказывается выполненным неравенство*

$$J(u_0, x_0) \leqslant J(u, x_0),$$

где $J(u, x_0)$ *есть значение функционала* (12.3), *вычисленного на интегральной кривой* $x = x(t, x_0)$, *проходящей через точку* x_0 *при*

$t=0$ *и являющейся решением исходной системы уравнений при управлении* $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$.

Лемма 12.1. *Если* $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ — *допустимое управление и* $\bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x})$ — *некоторое управление, являющееся однозначной аналитической функцией, разлагающейся в ряд вида* (12.5), *то управление*

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t, \mathbf{x})+\varepsilon\bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x})$$

будет также допустимым при любом достаточно малом ε.

Доказательство. Согласно предположению, $\bar{u}$ представляется в виде ряда $\bar{\mathbf{u}}=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\bar{\mathbf{u}}^m$, где $\bar{\mathbf{u}}^1=\bar{M}(t)\mathbf{x}$. Следовательно, управление

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x})+\varepsilon\bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x})=[M(t)+\varepsilon\bar{M}(t)]\mathbf{x}+\ldots$$

является допустимым, так как, согласно доказательству леммы 11.1, управление

$$\mathbf{u}^1=[M(t)+\varepsilon\bar{M}(t)]\mathbf{x}$$

будет допустимым для системы (12.2) в смысле определения 12.1.

Теорема 12.1. *Если существует вещественная, ограниченная непрерывная, симметричная матрица* $\Theta(t)$, *заданная при* $t\geqslant 0$, *являющаяся решением уравнения* (11.6) *и такая, что управление*

$$\mathbf{u}=C^{-1}(Q^*\Theta-B^*)\mathbf{x}$$

будет допустимым для системы (12.2) *в смысле определения* 11.1, *то существует управление* $\mathbf{u}_0(t, \mathbf{x})$, *являющееся оптимальным управлением в смысле определения* 11.2 *для исходной системы по отношению к функционалу* (12.3) *при любом выборе начального вектора* $\mathbf{x}_0$ *из некоторой достаточно малой окрестности точки* $\mathbf{x}=0$.

Доказательство. Введем некоторые соотношения, которым должно удовлетворять оптимальное управление $\mathbf{u}_0(t, \mathbf{x})$. С этой целью рассмотрим для любого начального вектора $\mathbf{x}_0$ и начального момента $t_0\geqslant 0$ функцию

$$V_0(t_0, \mathbf{x}_0)=\int\limits_{t_0}^{+\infty}W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_0)\,dt. \qquad (12.6)$$

Разумеется, что вектор $\mathbf{x}_0$ располагается в некоторой достаточно малой окрестности точки $\mathbf{x}=0$. Функция $\mathbf{x}$, стоящая под интегралом в правой части (12.6), есть решение исходной нелинейной системы при управлении $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0(t, \mathbf{x})$, проходящее через

точку $\mathbf{x}_0$ при $t=t_0$, так что

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0). \tag{12.7}$$

Как следует из теоремы Ляпунова, векторная функция (12.7) является однозначной аналитической по отношению к $x_{10}, \ldots, x_{n0}$. Разложение этой функции по степеням $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ начинается с членов, линейных относительно последних. Отсюда и из характера затухания решения (12.7) немедленно вытекает, что функция $V_0(t, \mathbf{x})$ будет однозначной, аналитической относительно $x_1, \ldots, x_n$.

Дифференцируя обе части (12.6) вдоль интегральной кривой (12.7), найдем

$$\frac{\partial V_0}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_0}{\partial x_s} f_s(t, x_1, \ldots, x_n, u_1^0, \ldots, u_r^0)+$$
$$+W(t, x_1, \ldots, x_n, u_1^0, \ldots, u_r^0)=0. \tag{12.8}$$

Рассмотрим функцию $Z=Z(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, определенную равенством

$$Z=\frac{\partial V_0}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_0}{\partial x_s} \cdot f_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})+W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{12.9}$$

Из (12.8) вытекает, что функция (12.9) тождественно обращается в нуль при $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0(t, \mathbf{x})$. Оказывается, что это значение функции Z есть наименьшее возможное, если ее рассматривать как функцию переменных $u_1, \ldots, u_r$. Действительно, пусть это не так. Тогда по крайней мере одна из частных производных

$$\frac{\partial Z(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_0)}{\partial u_j}, \quad j=1, \ldots, r,$$

не обращается тождественно в нуль, ибо квадратичная форма

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 Z(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_0)}{\partial u_i \partial u_j} \alpha_i \alpha_j$$

положительно определена при всех $\mathbf{x}$, расположенных в достаточно малой окрестности точки $\mathbf{x}=0$. Управление

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x})=\mathbf{u}_0(t, \mathbf{x})+\varepsilon \frac{\partial Z}{\partial \mathbf{u}}$$

будет допустимым. В нем $\dfrac{\partial Z(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_0)}{\partial \mathbf{u}}$ есть вектор с компонентами $\partial Z/\partial u_j$ во всяком случае для всех достаточно малых по модулю ε. При таких допустимых управлениях

$$Z\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_0+\varepsilon \frac{\partial Z}{\partial \mathbf{u}}\right) \leqslant 0 \tag{12.10}$$

при $\varepsilon \neq 0$.

Интегрируя почленно равенство (12.9), найдем

$$V_0(0, \mathbf{x}_0) = \int_0^{+\infty} W\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + \varepsilon \frac{\partial Z}{\partial \mathbf{u}}\right) dt - \int_0^{+\infty} Z\, dt. \quad (12.11)$$

Из (12.10) и (12.11) находим

$$V_0(0, \mathbf{x}_0) > \int_0^{+\infty} W\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + \varepsilon \frac{\partial Z}{\partial \mathbf{u}}\right) dt. \quad (12.12)$$

Полагая в (12.6) $t_0 = 0$ и используя (12.12), получаем

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) > J\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0 + \varepsilon \frac{\partial Z}{\partial \mathbf{u}}\right),$$

что невозможно в силу оптимальности управления $\mathbf{u}_0(t, \mathbf{x})$. Таким образом, функция (12.9) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(t, \mathbf{x})$ имеет наименьшее возможное значение. Следовательно,

$$\frac{\partial Z(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_0)}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, r, \quad (12.13)$$

т. е. оптимальное управление $\mathbf{u}_0(t, \mathbf{x})$ и функция $V_0(t, \mathbf{x})$, определяемая равенством (12.6), обязательно удовлетворяют условиям (12.8) и (12.13). Эти условия образуют систему для отыскания оптимального управления.

Дальнейший ход доказательства теоремы состоит в фактическом построении рядов, определяющих функцию V_0 и управление $\mathbf{u}_0$, в доказательстве сходимости этих рядов и в доказательстве того, что найденное таким путем $\mathbf{u}_0(t, \mathbf{x})$ является оптимальным управлением.

Будем искать функцию V_0 и управление $\mathbf{u}_0$ в виде рядов

$$V_0 = \sum_{m=2}^{\infty} V^m, \qquad \mathbf{u}_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{U}^m, \quad (12.14)$$

где $\mathbf{U}^m$ и V^m есть однородные формы степени m относительно $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами, подлежащими определению, при этом

$$\mathbf{U}^1 = M(t)\mathbf{x}, \quad V^2 = -\mathbf{x}^* H(t)\mathbf{x}. \quad (12.15)$$

Подставляя ряды (12.14) в систему (12.8), (12.13) и приравнивая слева и справа члены одинакового измерения, для определения коэффициентов форм V^2 и $\mathbf{U}^1$ найдем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial V^2}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V^2}{\partial x_s} [P(t)\mathbf{x} + Q(t)\mathbf{U}^1]_s + W^2(t, \mathbf{x}, \mathbf{U}^1) = 0, \quad (12.16)$$

$$\mathbf{U}^1 = C^{-1}[Q^* H(t) - B^*]\mathbf{x}.$$

Индекс s за скобкой означает, что берется s-я компонента вектора, стоящего в скобках. Система (12.16) служит для определения форм (12.15). Производя подстановку (12.15) в (12.16), найдем, что матрица $H(t)$ удовлетворяет тому же самому уравнению, что и $\Theta(t)$. Следовательно, в качестве $H(t)$ можно взять $\Theta(t)$. Тогда

$$M(t) = C^{-1}[Q^*\Theta - B^*].$$

Положим

$$P^0(t) = P(t) + Q(t)\,M(t).$$

Уравнения для определения форм V^{m+1} и U^m при $m > 1$ можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial V^{m+1}}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V^{m+1}}{\partial x_s}[P^0(t)\,\mathrm{x}]_s + R^{m+1} = 0, \tag{12.17}$$

$$\mathrm{U}^m = P^m. \tag{12.18}$$

Функции R^{m+1} и P^m являются однородными формами относительно $x_1, \ldots, x_n$ соответственно степени $m+1$ и m с известными коэффициентами. При этом коэффициенты R^{m+1} определены, когда известны формы $\mathrm{U}^1, \ldots, \mathrm{U}^{m-1}, V^1, \ldots, V^m$; коэффициенты P^m определены, когда известны формы $V^1, \ldots, V^{m+1}, \mathrm{U}^1, \ldots, \mathrm{U}^{m-1}$.

Таким образом, если форма R^{m+1} определена, то из уравнения (12.17) находится форма V^{m+1}, а затем из уравнения (12.18) — форма U^m. Предположим, что форма R^{m+1} определена. Тогда уравнение (12.17) имеет единственное решение в виде формы степени $m+1$ с вещественными, непрерывными и ограниченными коэффициентами, заданными при $t \geqslant 0$. Действительно, положим

$$V^{m+1}(t_0, \mathrm{x}_0) = \int_{t_0}^{+\infty} -R^{m+1}\,dt. \tag{12.19}$$

Интегрирование в (12.19) ведется вдоль интегральной кривой системы

$$\dot{\mathrm{x}} = P^0(t)\,\mathrm{x}, \tag{12.20}$$

проходящей при $t = t_0$ через точку x_0. Такая интегральная кривая системы (12.20) удовлетворяет неравенству

$$\|\mathrm{x}(t)\| \leqslant a\,\|\mathrm{x}_0\|\,e^{-b(t-t_0)} \tag{12.21}$$

при $t \geqslant t_0$. Используя (12.21), найдем оценку

$$|V^{m+1}(t_0, \mathrm{x}_0)| \leqslant \int_0^{+\infty} a_1\,\|\mathrm{x}_0\|^{m+1} e^{-(m+1)\,b\,(t-t_0)}\,dt,$$

откуда получаем, что

$$|V^{m+1}(t_0, \mathbf{x}_0)| \leqslant a_2 \|\mathbf{x}_0\|^{m+1}.$$

Величины a, b, a_1, a_2 в этих выражениях являются положительными постоянными. Форма U^m будет иметь также вещественные, непрерывные и ограниченные коэффициенты, заданные при $t \geqslant 0$. Итак, при $H = \Theta(t)$ ряды (12.14) определяются единственным образом.

Покажем теперь, что ряды (12.14) сходятся и что функция u_0, определяемая ими, дает исходное оптимальное управление, функция же $V_0(0, \mathbf{x}_0)$ дает наименьшее возможное значение функционала (12.3) $J(\mathbf{x}_0, \mathrm{u}_0)$. Для доказательства сходимости рядов (12.14) введем в рассмотрение функции $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{d\lambda_s}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_s}\lambda_j - \frac{\partial W}{\partial x_s}, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{12.22}$$

Рассмотрим теперь систему уравнений, связывающую функции $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Эта система включает в себя исходные дифференциальные уравнения, систему (12.13) и систему (12.22). Будем далее обозначать ее символом (*). Систему (*) можно рассматривать как систему, полученную из исходных уравнений, уравнения (12.8) и системы (12.13) путем дифференцирования уравнения (12.8) по переменным $x_1, \ldots, x_n$ с последующим введением обозначений $\lambda_s = \partial V_0/\partial x_s$. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\left[\frac{\partial V_0}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V_0}{\partial x_k} f_k(t, x_1, \ldots, x_n, u_1^0, \ldots, u_r^0) + W(t, x_1, \ldots, x_n, u_1^0, \ldots, u_r^0)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial V_0}{\partial x_s} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial V_0}{\partial x_s}\right) f_k + \frac{\partial W}{\partial x_s} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V_0}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial f_k}{\partial x_s} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial V_0}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial f_k}{\partial u_j} + \frac{\partial W}{\partial u_j}\right]\frac{\partial u_j}{\partial x_s} = 0. \tag{12.23}$$

Последнее слагаемое в этом равенстве обращается в нуль в силу (12.13) при $\mathrm{u} = \mathrm{u}_0$. Поэтому получающиеся выражения в точности совпадают с системой (12.22), если положить

$$-\frac{\partial V_0}{\partial x_k} = \lambda_k \tag{12.24}$$

и заметить, что первые два слагаемых здесь образуют полную

производную функции λ_s, вычисленную вдоль интегральной кривой исходной системы при управлении $\mathrm{u}=\mathrm{u}_0$.

Перейдем к анализу системы (12.23). Пользуясь уравнениями (12.13), исключим из исходной системы и уравнений (12.22) переменные $u_1, \ldots, u_r$. Полученную таким образом систему для переменных $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ будем обозначать символом (**). Наряду с системой (**) будем рассматривать систему линейных уравнений, образующих первое приближение для уравнений системы (**):

$$\dot{\mathrm{x}} = P(t)\,\mathrm{x} + Q(t)\,C^{-1}(t)\left[\frac{1}{2}Q^*(t)\,\Lambda - B^*(t)\,\mathrm{x}\right],$$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -P^*(t)\,\Lambda + 2A(t)\,\mathrm{x} + 2B(t)\,C^{-1}(t)\left[\frac{1}{2}Q^*(t)\,\Lambda - B^*(t)\,\mathrm{x}\right]. \tag{12.25}$$

Здесь Λ есть вектор $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_n\end{pmatrix}$. Знак звездочка, как обычно, означает транспонирование. Непосредственным вычислением можно проверить, что система (12.25) имеет семейство решений, зависящих от произвольных постоянных $x_1^0, \ldots, x_n^0$, представимое в виде

$$\begin{aligned}\mathrm{x}(t) &= Y(t)\,\mathrm{x}_0,\\ \Lambda(t) &= 2\Theta(t)\,\mathrm{x}(t).\end{aligned} \tag{12.26}$$

Здесь $Y(t)$ есть фундаментальная система решений для системы

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = P^0(t)\,\mathrm{x}, \tag{12.27}$$

где, как и выше

$$P^0(t) = P(t) + Q(t)\,C^{-1}(t)\,[Q^*(t)\,\Theta(t) - B^*(t)].$$

Из свойств системы (12.27) вытекает, что семейство решений (12.26) при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$. удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned}\|\mathrm{x}\| &\leqslant a\,\|\mathrm{x}_0\|\,e^{-b(t-t_0)}\\ \|\Lambda\| &\leqslant a_1\|\mathrm{x}_0\|\,e^{-b(t-t_0)}.\end{aligned}$$

Таким образом, система (12.25) имеет по крайней мере n положительных характеристичных чисел. Обозначим их через $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Тогда из первого метода Ляпунова *) вытекает, что система (12.24) имеет семейство решений, зависящих от n произвольных постоян-

*) Считаем, что система (12.25) — правильная.

ных $c_1, \ldots, c_n$, представимое в форме рядов

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i c_i + \sum_{m_1+\ldots+m_n=2}^{m_1+\ldots+m_n=\infty} L^{m_1 \ldots m_n}(t)\, c_1^{m_1} \ldots c_n^{m_n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \mu_i m_i t}, \tag{12.28}$$

$$\Lambda(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i + \sum_{m_1+\ldots+m_n=2}^{m_1+\ldots+m_n=\infty} M^{m_1 \ldots m_n}(t)\, c_1^{m_1} \ldots c_n^{m_n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \mu_i m_i t}, \tag{12.29}$$

где $\mathbf{x}_i$, λ_i представляют собой решения системы (12.25), соответствующие характеристичному числу μ_i, $i = 1, \ldots, n$. Известно, что ряды (12.28) можно разрешить относительно $c_1, \ldots, c_n$ и затем исключить эти величины из рядов (12.29). В результате таких преобразований получим ряды

$$\Lambda = \sum_{m=1}^{+\infty} \Lambda^m, \tag{12.30}$$

где Λ^m представляет собой однородную форму степени m относительно величин $x_1, \ldots x_n$. При этом $\Lambda^1 = 2\Theta(t)\mathbf{x}$.

Подставляя ряд (12.30) в уравнения (12.13), найдем, что функция $\mathbf{u}_0$, определяемая ими, будет представляться в форме ряда (12.14). С помощью этой функции можно из уравнения (12.8) найти V_0.

Далее можно установить, что ряды, служащие для определения функции λ_s и $-\partial V_0/\partial x_s$, совпадают. А тогда в силу того, что (12.30) представляют собой однозначные аналитические функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, будет иметь место сходимость рядов (12.14). Таким образом, ряды (12.14) представляют собой однозначные аналитические функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, определенные в некоторой достаточно малой окрестности точки $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Остается показать, что управление $\mathbf{u}_0$, определяемое рядом (12.14), является оптимальным. Пусть это не так. Тогда существует такое допустимое управление $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, что будет

$$V_0(0, \mathbf{x}_0) > J(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{u}}). \tag{12.31}$$

Из неравенства (12.31) вытекает, что для всех достаточно малых $t > 0$ будет иметь место также неравенство $\xi(t) > 0$, где

$$\xi(t) = V_0(t, \mathbf{x}(t)) - \int_t^{+\infty} W(t, \mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{u}}(t))\, dt.$$

Здесь $\mathbf{x}(t)$ — решение исходной системы при управлении $\bar{\mathbf{u}}$ с начальным условием $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ при $t = 0$.

Легко видеть, что полная производная функции $\xi(t)$ совпадает с функцией $Z(t, x, u)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = Z(t, x, \bar{u}),$$

следовательно, будет иметь место неравенство

$$\frac{d\xi}{dt} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant 0,$$

т. е. функция $\xi(t)$ неубывающая. Следовательно,

$$\xi(t) \geqslant \xi(0) > 0 \qquad (12.32)$$

при всех $t \geqslant C$.

С другой стороны, ввиду того что u — допустимое управление, обязательно будет выполнено неравенство

$$\| x(t) \| \leqslant a \| x_0 \| e^{-b(t-t_0)}.$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$V_0(t, x(t)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

и

$$\int_t^{+\infty} W(t, x, \bar{u})\, dt \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$$

Следовательно.

$$\xi(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$$

Это обстоятельство противоречит неравенству (12.32). Таким образом, сделанное выше предположение неверно, и потому управление $u_0(t, x)$ является оптимальным.

Следствие 1. *Если исходные уравнения стационарны, коэффициенты разложения функции W в ряды не зависят от времени и матрица Θ также постоянна, то оптимальное управление u_0 не зависит явным образом от переменной t и функция V_0 также не зависит от времени.*

Это утверждение вытекает из подробного рассмотрения построения рядов (12.14). В данном случае коэффициенты форм V^m можно определить единственным образом как решение системы линейных алгебраических уравнений, получающихся из уравнения (12.17), если пренебречь частной производной по времени и приравнять коэффициенты при членах одного измерения. Таким образом, ряды (12.14) получаются не зависящими от t. Сходимость их установлена в любом случае. Поэтому управление u_0 и функция V_0 не зависят от времени.

Следствие 2. *Если матрица $\Theta(t)$ и все функции времени, входящие в исходную систему уравнений и в разложение W, являются периодическими с одним и тем же периодом, то оптимальное управление* $\mathbf{u}_0$ *и функцию* V_0 *можно разложить в сходящиеся ряды относительно* x_1 $\ldots$, x_n, *коэффициенты которых будут являться периодическими функциями того же периода.*

Доказательство этого утверждения вытекает из того, что при сделанных предположениях решение уравнения (12.17), являющееся формой степени $m+1$ с ограниченными коэффициентами, обязательно будет периодическим по t при любом $m \geqslant 1$. Это утверждение справедливо, так как коэффициенты исходной формы V^{m+1} будут удовлетворять линейной системе дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и периодическим свободным членом. Собственные колебания в данной системе неограниченно возрастают. Поэтому отсутствует явление резонанса, и система имеет единственное стационарное движение, которое является периодическим.

Заметим, что приведенная теорема позволяет строить оптимальное управление лишь в том случае, когда известна матрица $\Theta(t)$. Дадим далее способ непосредственного построения оптимального управления, основанный на методе последовательного приближения и не связанный с предварительным построением матрицы $\Theta(t)$. Пусть задано некоторое допустимое управление

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbf{U}^m,$$

где $\mathbf{U}^1 = M(t)\mathbf{x}$.

Построим функцию

$$V_1(t_0, \mathbf{x}_0) = \int_{t_0}^{+\infty} W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\,dt. \tag{12.33}$$

Интегрирование в правой части (12.33) ведется вдоль интегральной кривой $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ исходной системы при управлении $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, причем считается, что $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ при $t = t_0$. Функция (12.33) однозначна относительно $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ в некоторой окрестности начала координат. Действительно, функция $V_1(t, \mathbf{x})$ является решением уравнения в частных производных

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial x_s} f_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) + W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = 0. \tag{12.34}$$

Это уравнение имеет единственное формальное решение, представимое в виде ряда

$$V_1 = \sum_{m=2}^{\infty} V_1^m, \tag{12.35}$$

где V_1^m есть однородная форма степени m относительно $x_1, \ldots, x_n$ с вещественными, непрерывными, ограниченными коэффициентами, заданными при $t \geqslant 0$. Сходимость ряда (12.35) вытекает из применения первого метода Ляпунова к системе уравнений

$$\begin{aligned} d\mathrm{x}/dt &= F(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}(t, \mathrm{x})), \\ dV/dt &= -W(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}(t, \mathrm{x})). \end{aligned} \tag{12.36}$$

Система (12.36) имеет семейство решений, зависящих от n произвольных постоянных, представимое в форме рядов Ляпунова. Исключая эти постоянные, приходим к выражению функции через $x_1, \ldots, x_n$. Полученный сходящийся ряд необходимо совпадает с (12.35).

Построим управление $\mathrm{u}_1(t, \mathrm{x})$ из условия, что функция $\mathrm{u}_1(t, \mathrm{x})$ доставляет функции

$$Z_1(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) = \frac{dV_1}{dt} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial x_s} f_s(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) + W(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) \tag{12.37}$$

наименьшее возможное значение.

Если $\mathrm{u}_1(t, \mathrm{x})$ есть допустимое управление, то можно построить по нему функцию $V_2(t, \mathrm{x})$ так же, как была построена $V_1(t, \mathrm{x})$ по управлению $\mathrm{u}(t, \mathrm{x})$. Дальше строится функция $\mathrm{u}_2(t, \mathrm{x})$ как функция, доставляющая наименьшее возможное значение функции,

$$Z_2(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) = \frac{\partial V_2}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_2}{\partial x_s} f_s(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) + W(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}).$$

Если $\mathrm{u}_2(t, \mathrm{x})$ оказывается допустимым управлением, то можно построить функцию V_3 и т. д.

Теорема 12.2. *Если квадратичная форма W^2 является положительно определенной по отношению к переменным $x_1, \ldots, x_n$ $u_1, \ldots, u_r$ и существует по крайней мере одно допустимое управление $\mathrm{u}(t, \mathrm{x})$, то построение последовательностей $\mathrm{u}_1(t, \mathrm{x})$, $\mathrm{u}_2(t, \mathrm{x})$, ... и $V_1(t, \mathrm{x})$, $V_2(t, \mathrm{x})$, ... всегда оказывается возможным, при этом*

$$\mathrm{u}_k(t, \mathrm{x}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathrm{u}_0(t, \mathrm{x}), \qquad V_k(t, \mathrm{x}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} V_0(t, \mathrm{x}),$$

где $\mathrm{u}_0(t, \mathrm{x})$ есть оптимальное управление, $V_0(0, \mathrm{x}_0)$ — оптимальное значение функционала $J(\mathrm{x}_0, \mathrm{u}_0)$:

$$V_0(0, \mathrm{x}_0) = J(\mathrm{x}_0, \mathrm{u}_0).$$

Доказательство. Каждое управление, получающееся в ходе построения последовательных приближений, можно представить в виде

$$\mathrm{u}_k(t, \mathrm{x}) = \sum_{m=1}^{+\infty} \mathrm{U}_k^m, \tag{12.38}$$

где $U_k^1(t, x) = M_k(t)x$ при этом легко видеть, что матрица $M_k(t)$ определяется формулой

$$M_k(t) = C^{-1}(t)[Q^*(t)\Theta_k(t) - B^*(t)]. \qquad (12.39)$$

Здесь $\Theta_k(t)$ — матрица квадратичной формы, являющаяся первой формой в разложении функции $V_k(t)$, взятой с обратным знаком, так что

$$V_k(t) = \sum_{m=2}^{\infty} V_k^m, \qquad (12.40)$$

где $V_k^2 = -x^*\Theta_k x$.

Для коэффициентов форм V_k^m легко построить линейные дифференциальные уравнения. Из предыдущего параграфа вытекает, что матрицы $M_k(t)$ сходятся и управления $M_k(t)x$ являются допустимыми, следовательно, будут сходиться коэффициенты форм V_k^m к непрерывным ограниченным функциям, заданным при $t \geqslant 0$. Таким образом, существуют формы V_0^m такие, что $V_k^m \to V_0^m$.

Положим

$$V_0(t, x) = \sum_{m=2}^{\infty} V_0^m \qquad (12.41)$$

и

$$u_0(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} U_0^m, \qquad (12.42)$$

где U_0^m есть предел формы U_k^m при $k \to \infty$:

$$U_0^m = \lim_{k \to \infty} U_k^m.$$

Легко видеть, что ряды (12.41) и (12.42) являются решениями системы (12.8), (12.13). Следовательно, как было показано выше в предыдущей теореме, они сходятся. И потому $u_0(t, x)$ является оптимальным управлением и $V_0(0, x_0) = J(x_0, u_0)$.

Следствие. *Если управление $(u_1, \ldots, u_r)$ входит в исходную систему линейно и если формы W^m не зависят от $u_1, \ldots, u_r$ при $m > 2$, то построение последовательных приближений осуществляется другим способом. Действительно,*

$$U_k(t, x) = C^{-1}\left[-Q^*\frac{\partial V_k}{\partial x} - B^*x\right],$$

где $\dfrac{\partial V_k}{\partial x}$ *есть вектор* $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_k}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial V_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$.

Заметим, что построение $U_k(t, \mathbf{x})$ также легко осуществляется, если формы $W^m (m > 2)$ лишь линейно зависят от $u_1, \ldots, u_r$.

Оптимальное среди всех допустимых управлений обладает одним замечательным свойством. Предположим, что исходная система уравнений имеет вид

$$d\mathbf{x}/dt = F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{12.43}$$

и что оптимальное управление $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ определено для всех значений вектора $\mathbf{x}$.

Определение 12.3. *Множество всех точек* $\mathbf{x}_0$, *обладающих свойством*

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0,$$

где $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ *есть решение уравнения* (12.43) *при управлении* $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, *называется областью притяжения положения равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *при управлении* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Теорема 12.3. *Область притяжения положения равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *при оптимальном управлении* $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ *является более широкой, чем при любом другом допустимом управлении, если выполнено условие*

$$W \geqslant \alpha\,[\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2]\sqrt{1 + \|\mathbf{F}\|^2}.$$

Доказательство. Предположим, что $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ есть некоторое допустимое управление

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{\mathbf{F}[\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})]}{\sqrt{1 + \|\mathbf{F}\|^2}}. \tag{12.44}$$

Интегральные кривые системы (12.44) совпадают с интегральными кривыми системы (12.43) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Отличие этих кривых состоит только в различной параметризации. Действительно, система (12.44) переходит в систему (12.43) при замене $ds = dt\sqrt{1 + \|\mathbf{F}\|^2}$.

Интегральные кривые системы (12.44) определены для всех значений s от $-\infty$ до $+\infty$.

Введем в рассмотрение функцию

$$V(\mathbf{x}_0) = \int_0^{+\infty} W(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))\,dt. \tag{12.45}$$

Функция (12.45) может быть представлена в виде

$$V(\mathbf{x}_0) = \int_0^{+\infty} \frac{W(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))\,ds}{\sqrt{1 + \|\mathbf{F}\|^2}}. \tag{12.46}$$

В формуле (12.46) интегрирование ведется по интегральной кривой системы (12.44), а в формуле (12.45)—по интегральным кривым системы (12.43). Предположим, что $\mathbf{x}$ есть граничная точка области притяжения, которую обозначим через $A(\mathbf{u})$. Известно, что функция $V(\mathbf{x}_0)$, определяемая (12.45), (12.46), обладает свойством

$$V \xrightarrow[\mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}]{} +\infty, \quad \mathbf{x}_0 \in A(\mathbf{u}).$$

Предположим, что точка $\mathbf{x}$ является граничной точкой $A(\mathbf{u}_0)$ и содержится внутри некоторой области притяжения $A(\mathbf{u})$. Тогда можно выбрать столь малую окрестность этой точки, что при $\|\bar{\mathbf{x}}-\mathbf{x}_0\| < \rho$ будет $V(\mathbf{x}_0) < M < +\infty$.

Так как $\mathbf{x}$ является граничной точкой области притяжения $A(\mathbf{u}_0)$, то в этой же окрестности точки $\bar{\mathbf{x}}$ найдется такая $\mathbf{x}_0$, что будет выполнено неравенство $V_0(\mathbf{x}_0) > M$.

Из условия оптимальности управления $\mathbf{u}_0$ следует, что $V_0(\mathbf{x}_0) < V(\mathbf{x}_0)$.

Последнее неравенство противоречит выбору числа ρ, согласно которому должно быть $V(\mathbf{x}_0) < M$. Отсюда вытекает справедливость теоремы.

Итак, точка $\bar{\mathbf{x}}$, являющаяся граничной для области притяжения, соответствующей оптимальному управлению, не может находиться внутри никакой области притяжения, соответствующей какому-либо допустимому управлению.

При доказательстве теоремы 12.3 был использован факт неограниченного возрастания функции V при приближении к границе области притяжения. Коротко этот факт может быть установлен следующим образом. Выберем число ε столь малым, чтобы сфера $\|\mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon$ целиком содержалась внутри области $A(\mathbf{u})$. Возьмем столь малое $\delta > 0$, чтобы все интегральные кривые системы (12.44), начинающиеся в области $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \delta$, оставались при $s \geqslant 0$ в области $\|\mathbf{x}\| < \varepsilon$.

Пусть $\bar{\mathbf{x}}$ есть граничная точка области $A(\mathbf{u})$, т. е. такая, в сколь угодно малой окрестности которой начинаются как траектории, неограниченно приближающиеся к $\mathbf{x}=0$, так и траектории, никогда не попадающие в сферу $\|\mathbf{x}\| < \varepsilon$, а $x_1, x_2, \ldots, x_m$—последовательность точек, обладающих свойством

$$\mathbf{x}_m \xrightarrow[m \to +\infty]{} \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x}_m \in A(\mathbf{u}), \quad m = 1, 2, \ldots$$

Обозначим через s_m момент первого пересечения интегральной кривой системы (12.44) $\mathbf{x}=\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_m)$ с поверхностью сферы $\|\mathbf{x}\| \leqslant \delta$. Последовательность $s_1, \ldots, s_m$ обладает тем свойством, что $s_m \xrightarrow[m \to +\infty]{} +\infty$. В противном случае она должна содержать подпоследовательность, ограниченную числом T. Но в силу инте-

гральной непрерывности все интегральные кривые, начинающиеся в достаточно малой окрестности $\bar{x}$, остаются в сколь угодно малой окрестности интегральной кривой $x(s, \bar{x})$ при $|s| \leqslant T$. Тогда эта интегральная кривая заходит в δ-окрестность точки $x=0$ и, следовательно, неограниченно приближается к $x=0$. Легко видеть, что теми же свойствами должны обладать все интегральные кривые, начинающиеся в достаточно малой окрестности точки $\bar{x}$, что приходит в противоречие с ее свойствами как точки, принадлежащей границе области притяжения. Итак, обязательно должно быть $s_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} +\infty$. Из формулы (12.46) находим

$$V(x_m) \geqslant \int_0^{s_m} \frac{W(x, u)}{\sqrt{1+\|F\|^2}} ds \geqslant \beta s_m,$$

где $\beta = \inf\limits_{x \in A(u)} \dfrac{W(x, u(x))}{\sqrt{1+\|F\|^2}}$; $\|x\| > \delta$.

Отсюда вытекает, что $V(x_m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} +\infty$.

§ 13. Система с ограниченным временем

Пусть задана система линейных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u + f(t), \quad t \in [0, T]. \tag{13.1}$$

Элементы матриц A, B и компоненты вектора $f(t)$ являются вещественными, непрерывными функциями, заданными при $t \in [0, T]$. Матрица A имеет размерность $n \times n$, матрица B — размерность $n \times r$, x и f имеют размерности n и u — размерность r.

Пусть задан функционал

$$J = \int_0^T [x^* A_1(t) x + 2x^* B_1(t) u + u^* C(t) u + x^* A_2(t) + u_1^* C_1(t)] dt + x^*(T) \Theta_0 x(T) + x^*(T) \varphi_0, \tag{13.2}$$

где A, B_2, C, Θ_0 — матрицы соответствующих размерностей и A_2, C_1, φ_0 — векторы соответствующих размерностей. Будем считать элементы упомянутых матриц и компоненты соответствующих векторов вещественными, непрерывными, заданными на $[0, T]$. Элементы матрицы Θ_0 и компоненты φ_0 будем считать постоянными. Предположим далее, что квадратичная форма u^*Cu является положительно определенной, иначе говоря, существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$cu^*u \leqslant u^*Cu, \quad t \in [0, T].$$

Определение 13.1. *Управление* u *будем называть допустимым, если оно представимо в форме*

$$\mathbf{u} = M(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{N}(t), \tag{13.3}$$

где $M(t)$ — *матрица, имеющая* r *строк,* n *столбцов;* $\mathbf{N}(t)$ — *вектор размерности* r, *причем элементы матрицы* M *и компоненты вектора* $\mathbf{N}(t)$ — *вещественные, непрерывные функции, заданные на* $[0,\ T]$.

Определение 13.2. *Допустимое управление* $\mathbf{u}_0 = M_0(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{N}_0(t)$ *называется оптимальным по отношению к функционалу* (13.2), *если оно доставляет этому функционалу наименьшее возможное значение на любом движении* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ *при* $t = 0$, *иначе говоря, если* u — *какое-либо допустимое управление и* $\mathbf{u}_0$ *оптимально, то* $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \leqslant J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ *при любом* $\mathbf{x}_0$.

Пусть

$$V(\mathbf{x},\ t) = \mathbf{x}^*\Theta(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\varphi(t) + \psi(t), \tag{13.4}$$

где $\Theta(t)$ — матрица размерности n; $\varphi(t)$ — вектор размерности n; $\psi(t)$ — скалярная функция. Будем считать, что элементы матрицы Θ, компоненты φ и функция ψ заданы при $t \in [0,\ T]$, вещественны и непрерывно дифференцируемы. Подынтегральное выражение, входящее в функционал J, для краткости обозначим $f_0(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t)$. Будем искать управление в системе (13.1), оптимальное по отношению к демпфированию функционала $V + \int\limits_0^t f_0\,dt$.

Такое управление, как известно, должно доставлять наименьшее значение производной этого функционала по времени вдоль движений системы (13.1)

$$\dot V + f_0 = \mathbf{x}^*A^*\Theta\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\dot\Theta\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\Theta A\mathbf{x} + \mathbf{u}^*B^*\Theta\mathbf{x} + \dot\psi + \mathbf{f}^*\Theta\mathbf{x} + \\ + \mathbf{x}^*\Theta B\mathbf{u} + \mathbf{x}^*\Theta\mathbf{f} + (A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{f})^*\varphi + \mathbf{x}^*\dot\varphi + f_0 = W. \tag{13.5}$$

После преобразования функция W имеет вид

$$W = \mathbf{x}^*(A^*\Theta + \Theta A + \dot\Theta)\,\mathbf{x} + \mathbf{x}^*(2\Theta B\mathbf{u} + 2\Theta\mathbf{f} + A^*\varphi + \dot\varphi) + \\ + \mathbf{u}^*B^*\varphi + \mathbf{f}^*\varphi + f_0 + \dot\psi.$$

Оптимальное управление по отношению к демпфированию функционала, приведенного выше, определяется из уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1,\ \ldots,\ r, \tag{13.6}$$

где

$$\frac{\partial W}{\partial u_j} = (2\mathbf{x}^*\Theta B)_j + (\varphi^*B)_j + (2\mathbf{x}^*B_1)_j + 2(C\mathbf{u})_j + (c_1^*)_j.$$

Уравнения (13.6) являются линейными относительно $u_1, \ldots, u_r$ с отличным от нуля определителем. Поэтому решение данной системы можно представить в форме

$$\mathbf{u}_0 = M_0\mathbf{x} + \mathbf{N}_0. \tag{13.7}$$

При этом получим

$$M_0 = -C^{-1}(B^*\Theta + B_1^*), \tag{13.8}$$

$$\mathbf{N}_0 = -\frac{1}{2}C^{-1}(\varphi^* B + \mathbf{C}_1^*)^*. \tag{13.9}$$

Для того чтобы решение (13.7) было оптимальным в смысле функционала (13.2), необходимо матрицу $\Theta(t)$, вектор $\varphi(t)$ и функцию $\psi(t)$ выбрать так, чтобы было

$$W = 0 \tag{13.10}$$

при управлении (13.7) и

$$V(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^*\Theta_0\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\varphi_0 \quad \text{при} \quad t = T. \tag{13.11}$$

Найдем уравнения для матрицы Θ, вектора φ и функции ψ из условия (13.10). Подставляя (13.7) в выражение функции W и используя уравнение (13.10), найдем

$$W = \mathbf{x}^*(A^*\Theta + \Theta A + \dot{\Theta})\mathbf{x} + \mathbf{x}^*[2\Theta B(M_0\mathbf{x} + \mathbf{N}_0) + 2\Theta\mathbf{f} + A^*\varphi + \dot{\varphi}] + \\ + (\mathbf{x}^*M_0^* + \mathbf{N}_0^*)B^*\varphi + \mathbf{f}^*\varphi + \dot{\psi} + \mathbf{x}^*A_1\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^*B_1(M_0\mathbf{x} + \mathbf{N}_0) + \\ + (\mathbf{x}^*M_0^* + \mathbf{N}_0^*)C(M_0\mathbf{x} + \mathbf{N}_0) + \mathbf{x}^*\mathbf{A}_2 + (\mathbf{x}^*M_0 + \mathbf{N}_0)\mathbf{C}_1.$$

После преобразования этого выражения имеем

$$W = \mathbf{x}^*(A^*\Theta + \Theta A + \dot{\Theta} + 2\Theta BM_0 + A_1 + 2B_1M_0 + M_0^*CM_0)\mathbf{x} + \\ + \mathbf{x}^*(2\Theta B\mathbf{N}_0 + 2\Theta\mathbf{f} + A^*\varphi + \dot{\varphi} + M_0^*B^*\varphi + 2B_1\mathbf{N}_0 + M_0^*C\mathbf{N}_0 + \\ + \mathbf{A}_2 + M_0^*\mathbf{C}_1) + \mathbf{N}_0^*CM_0\mathbf{x} + \mathbf{N}_0^*B\varphi + \mathbf{f}^*\varphi + \dot{\psi} + \mathbf{N}_0^*CN_0 + \mathbf{N}_0^*\mathbf{C}_1.$$

Используя (13.10), найдем

$$A^*\Theta + \Theta A + \dot{\Theta} + 2\Theta BM_0 + A_1 + 2B_1M_0 + M_0^*CM_0 = 0; \tag{13.12}$$

$$2\Theta B\mathbf{N}_0 + 2\Theta\mathbf{f} + A^*\varphi + \dot{\varphi} + M_0^*B^*\varphi + 2B_1\mathbf{N}_0 + \\ + 2M_0^*C\mathbf{N}_0 + \mathbf{A}_2 + M_0^*\mathbf{C}_1 = 0; \tag{13.13}$$

$$N_0^*B^*\varphi + \mathbf{f}^*\varphi + \dot{\psi} + \mathbf{N}_0^*C\mathbf{N}_0 + \mathbf{N}_0^*\mathbf{C}_1 = 0. \tag{13.14}$$

Условие (13.11) дает начальные данные, необходимые для решения уравнений (13.12), (13.13) и (13.14):

$$\Theta = \Theta_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \psi = 0 \quad \text{при} \quad t = T.$$

Используя (13.8) и (13.9), уравнения (13.12)—(13.14) можно записать в явной форме:

$$A^*\Theta+\Theta A+\dot{\Theta}-2\Theta BC^{-1}(B^*\Theta+B_1^*)+A_1-2B_1C^{-1}(B^*\Theta+B_1^*)+ \\ +(\Theta B+B_1)C^{-1}(B^*\Theta+B_1^*)=0; \quad (13.15)$$

$$-\Theta BC^{-1}(\varphi^*B+\mathbf{C}_1^*)+2\Theta\mathbf{f}+A^*\varphi+\dot{\varphi}-(B\Theta+B_1)C^{-1}B^*\varphi- \\ -B_1C^{-1}(\varphi^*B+\mathbf{C}_1^*)+(\Theta B+B_1)C^{-1}(\varphi^*B+\mathbf{C}_1)+\mathbf{A}_2- \\ -(\Theta B+B_1)C^{-1}\mathbf{C}_1=0; \quad (13.16)$$

$$-\frac{1}{2}(B\varphi+\mathbf{C}_1)C^{-1}B^*\varphi+\mathbf{f}^*\varphi+\dot{\varphi}+ \\ +\frac{1}{4}(B\varphi+\mathbf{C}_1)C^{-1}(\varphi^*B+\mathbf{C}_1^*)-\frac{1}{2}(B\varphi+\mathbf{C}_1)C^{-1}\mathbf{C}_1=0. \quad (13.17)$$

Уравнение (13.15) можно представить в форме

$$\dot{\Theta}+\Theta(A-BC^{-1}B_1^*)+(A^*-B_1C^{-1}B^*)\Theta- \\ -\Theta BC^{-1}B^*\Theta+A_1-B_1C^{-1}B_1^*=0, \quad (13.18)$$

$$\Theta=\Theta_0 \quad \text{при} \quad t=T. \quad (13.19)$$

Теорема 13.1. *Для того чтобы существовало оптимальное управление в системе* (13.1) *в смысле функционала* (13.2), *необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (13.18) *с начальным условием* (13.19) *имело решение, непрерывное при* $t\in[0, T]$; *при этом оптимальное управление представимо в форме* (13.7), *где вектор* $\varphi(t)$ *удовлетворяет уравнению* (13.16) *с начальным условием* $\varphi=\varphi_0$ *при* $t=T$. *Система* (13.18) *при начальном условии* (13.19) *всегда имеет решение, вещественное и непрерывно дифференцируемое, заданное в некоторой окрестности точки* $t=T$. *Условие теоремы состоит в том, чтобы это решение можно было продолжить на весь промежуток* $[0, T]$.

Доказательство. Пусть уравнение (13.18) имеет решение с начальным условием (13.19), заданное в $[0, T]$, вещественное и непрерывное. Обозначим его $\Theta(t)$. Подставим $\Theta(t)$ в уравнение (13.16). Тогда для определения вектора φ получаем линейную систему дифференциальных уравнений. Эта система всегда имеет решение, заданное при $t\in[0, T]$. Подставляя найденный вектор $\varphi(t)$ в (13.17), найдем $\psi(t)$ с начальным условием $\psi(T)=0$. Определим с помощью $\Theta(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функцию $V(\mathbf{x}, t)$ и управление (13.7). Тогда управление (13.7) является оптимальным по отношению к демпфированию функционала $V+\int\limits_0^{+} f_0\,d\tau$.

На этом управлении $V+f_0=W=0$, следовательно, это управление является оптимальным по отношению к функционалу (13.2).

Оптимальное значение дается формулой

$$J(x_0, u_0) = x_0^*\Theta(0)x_0 + x_0^*\varphi(0) + \psi(0).$$

Если оптимальное управление в системе (13.1) по отношению к функционалу (13.2) существует, то с помощью него можно определить функцию

$$V(x, t) = \int_t^T f_0(x, u_0, \tau)\,d\tau + x^*(T)\Theta_0 x(T) = x^*(T)\varphi_0. \quad (13.20)$$

Легко видеть, что функция (13.20) является квадратичной формой относительно $x_1, \ldots, x_n$, представимой в виде

$$V(x, t) = x^*\Theta(t)x + x^*\varphi(t) + \psi(t), \quad (13.21)$$

где матрица Θ, вектор φ и функция ψ удовлетворяют системе (13.12)—(13.14). Будем считать, что в этой системе матрица M_0 и вектор N_0 определяют управление $u_0 = M_0x + N_0$, оптимальное по отношению к J, существование которого только что было предположено. Остается показать, что матрица M_0 и вектор N_0 необходимо выражаются формулами (13.8), (13.9). Вслед за этим, применяя (13.8) и (13.9), найдем, что $\Theta(t)$ будет решением системы (13.18) с начальным условием (13.19), заданным при $t \in [0, T]$. Итак, для полного доказательства остается установить, что (13.8), (13.9) выражают необходимые условия оптимальности функционала. Общий вид таких условий приведен в гл. III. Так же, как и в § 11, можно показать, что эти условия представимы в форме (13.8), (13.9). Теорема доказана.

Поставим вопрос об отыскании матрицы $\Theta(t)$ как решения уравнения (13.18) и об условиях, достаточных для существования решения системы (13.18) при условии (13.19) на всем промежутке $[0, T]$.

Теорема 13.2. *Если квадратичная форма*

$$x^*[A(t) + A^*\Theta_0 + \Theta_0 A]x$$

является положительно определенной, то непрерывные решения системы (13.18) *при условии* (13.19) *существуют на всем промежутке* $[0, T]$.

Доказательство. Для отыскания этого решения можно предложить следующий метод последовательных приближений. Возьмём управление

$$u_1 = M_1(t)x + N_1(t),$$

где $M_1(t)$—заданная матрица, $N_1(t)$—заданный вектор. Заменим в системе (13.12)—(13.14) матрицу M_0 на M_1, вектор N_0 на N_1. Найдем решение Θ_1, φ_1, ψ_1 полученной системы линейных

уравнений с начальными условиями

$$\Theta_1(T)=\Theta_0; \quad \varphi(T)=\varphi_0; \quad \psi(T)=0.$$

Это решение существует, и оно непрерывно на $[0, T]$. С помощью Θ_1 и φ_1 по формулам (13.8), (13.9) определим матрицу M_2 и вектор N_2 путем замены в (13.8) и (13.9) Θ на Θ_1 и φ на φ_1. После этого с полученным управлением

$$u_2 = M_2(t)x + N_2(t)$$

поступим точно так же, как и с u_1. В результате этого процесса получим последовательность управлений $u_1, u_2, u_3, \ldots$ и последовательности квадратичных форм $V_1, V_2, \ldots$:

$$u_k = M_k(t)x + N_k(t); \tag{13.22}$$

$$V_k = x^*\Theta_k x + x^*\varphi_k(t) + \psi_k(t). \tag{13.23}$$

Покажем, что

$$\Theta_k \to \Theta(t), \quad \varphi_k(t) \to \varphi(t), \quad \psi_k(t) \to \psi(t),$$

где $\Theta(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют системе (13.15)—(13.17) с начальными условиями $\Theta(T)=\Theta_0$, $\varphi(T)=\varphi_0$, $\psi(T)=0$, откуда будет следовать, что $u_k \to u_0$ при $k \to +\infty$, где u_0 есть оптимальное управление. Из характера построения последовательностей u_k и V_k вытекает, что

$$V_k(x, t) = \int_t^T f_0(x, u_k, \tau)\,d\tau + x^*(T)\Theta_0 x(T) + x^*(T)\varphi_0. \tag{13.24}$$

Построим с помощью функции V_k функцию $W_k(t, x, u)$:

$$W_k = \dot{V}_k + f_0(x, u, t). \tag{13.25}$$

В равенстве (13.25) производная от функции V_k берется вдоль интегральных кривых системы (13.1) при каком-либо допустимом управлении u. Управление u_{k+1} выбирается как управление, которое доставляет W_k наименьшее возможное значение. Заметим, что в равенстве (13.24) через x обозначено решение системы (13.1) при управлении $u=u_k$. Из (13.24) находим

$$\frac{dV_k}{dt} + f_0 = 0 \quad \text{при} \quad u = u_k.$$

Следовательно, при $u = u_{k+1}$

$$\frac{dV_k}{dt} + f_0 \leqslant 0, \tag{13.26}$$

так как u_{k+1} доставляет функции W_k наименьшее возможное

значение. Проинтегрируем (13.26) от t до T и получим

$$V_k(\mathrm{x},\ t)-W_k(\mathrm{x}(T),\ T)-\int_t^T f_0(\mathrm{x},\ \mathrm{u}_{k+1},\ \tau)\,d\tau \geqslant 0. \quad (13.27)$$

Из (13.27) имеем

$$V_k(\mathrm{x},\ t) \geqslant V_{k+1}(\mathrm{x},\ t),$$

так как $V_k(\mathrm{x}(T),\ T)=\mathrm{x}^*(T)\,\Theta_0\mathrm{x}(T)+\mathrm{x}^*\varphi_0$.

Итак, последовательность квадратичных форм V_1, V_2, ... монотонно убывает. При выполнении условия рассматриваемой теоремы функционал J ограничен снизу при любом выборе допустимых управлений. Значит, последовательность квадратичных форм также будет ограничена снизу, и поэтому элементы матриц Θ_k, компоненты векторов φ_k и функции ψ_k ограничены в совокупности при $t \in [0,\ T]$. Следовательно, такими же будут компоненты векторов N_k и элементы матриц M_k. Ввиду этого коэффициенты линейной системы (13.12)—(13.14), в которой следует заменить M_0 на M_k, N_0 на N_k, ограничены в совокупности. Но тогда решения этой системы будут равностепенно непрерывны как функции $t \in [0,\ T]$. Отсюда следует, что последовательность матриц Θ_k содержит сходящуюся последовательность. Более того, любая бесконечная последовательность этой последовательности матриц будет содержать в себе сходящуюся подпоследовательность. Это же утверждение относится к векторам φ_k и функциям ψ_k.

Заменим в системе (13.12)—(13.14) M_0 на M_k, N_0 на N_k. Перейдем в полученной системе к пределу по упомянутой выше подпоследовательности. Тогда получим уравнения (13.15)—(13.17). Таким образом, пределы упомянутых подпоследовательностей являются решениями этих уравнений с начальными данными $\Theta(T)=\Theta_0$, $\varphi(T)=\varphi_0$, $\psi(T)=0$. Ввиду единственности такого решения далее оказывается, что любая сходящаяся подпоследовательность будет сходиться к одному и тому же пределу. Это возможно тогда и только тогда, когда сами последовательности Θ_k, φ_k, ψ_k сходятся. Указанная сходимость будет равномерной, и предельные функции будут являться непрерывно-дифференцируемыми, заданными на $[0,\ T]$. Это и показывает, что (13.18) имеет непрерывное решение с начальными условиями (13.19) на $[0,\ T]$. Построение оптимального управления сводится, таким образом, к отысканию решений системы (13.18). Оптимальное управление можно построить также, не прибегая к решению уравнения (13.18), если известны оптимальные программные управления.

Определение 13.3. *Непрерывная вектор-функция* $\mathrm{u}_0(t)$ *называется оптимальным программным управлением по отношению к функционалу* J *в точке* x_0, *если она доставляет функционалу*

J наименьшее возможное значение среди всех непрерывных векторных функций $\mathbf{u}(t)$, *заданных при* $t \in [0, T]$, *так что* $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \leqslant J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ *для данного* $\mathbf{x}_0$.

Теорема 13.3. *Оптимальное управление* $\mathbf{u}_0 = M_0\mathbf{x} + \mathbf{N}_0$ *можно построить при помощи* $n+1$ *оптимальных программных управлений* $\mathbf{u}_i(t)$; $i = 1, \ldots, n+1$, *соответствующих точкам* $\mathbf{x}_i^{(0)}$, $i = 1, \ldots, n+1$, *находящимся в общем положении, что означает линейную независимость векторов*

$$\xi_i = \mathbf{x}_i^{(0)} - \mathbf{x}_i^{(0)}, \quad i = 2, \ldots, n+1. \tag{13.28}$$

Доказательство. Обозначим через $U(t)$ матрицу, столбцами которой являются векторы $\mathbf{u}_i(t) - \mathbf{u}_1(t)$, $i = 2, \ldots, n+1$, а через $X(t)$ — матрицу, столбцами которой являются векторы $\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_1(t)$, $i = 2, \ldots, n+1$, где $\mathbf{x}_i(t)$ — движение, определяемое системой (13.1) при управлении $\mathbf{u}_i(t)$ и начальном условии $\mathbf{x}_i^{(0)}$. Положим, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(0)}$ при $t = 0$, $M_0 = UX^{-1}(t)$ и $\mathbf{N}_0 = \mathbf{u}_1(t) - U(t)X^{-1}\mathbf{x}_1$.

Покажем, что управление $\mathbf{u}_0 = M_0\mathbf{x} + \mathbf{N}_0$ является оптимальным. Действительно, так как управление $\mathbf{u}_i(t)$ является оптимальным программным управлением, то оно и соответствующее ему движение $\mathbf{x}_i(t)$ удовлетворяют следующему необходимому условию.

Существуют функции $\lambda_{1i}(t), \ldots, \lambda_{ni}(t)$ такие, что они связаны с функциями $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{u}_i$ уравнениями

$$\frac{\partial x_{si}}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_{si}}, \tag{13.29}$$

$$\frac{\partial \lambda_{si}}{\partial t} = -\frac{\partial W}{\partial x_{si}}, \tag{13.30}$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_{ji}} = 0, \quad i = 1, \ldots, n+1, \quad j = 1, \ldots, r, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{13.31}$$

$$W = f_0 + \sum_{s=1}^{n} \lambda_{si} g_s; \qquad g_s = (A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{f})_s.$$

Пусть λ_i — вектор с компонентами $\lambda_{1i}, \ldots, \lambda_{ni}$. Обозначим через Λ матрицу, столбцами которой являются векторы $\lambda_i - \lambda_1$. Положим

$$\Theta(t) = \frac{1}{2}\Lambda X^{-1}(t),$$

$$\varphi(t) = \lambda_1(t) - \Lambda(t) X^{-1}\mathbf{x}_1(t).$$

С помощью матрицы $\Theta(t)$ и вектора $\varphi(t)$ построим функцию $\psi(t)$ как решение уравнения (13.17) $\psi(T) = 0$. Введем в рассмотрение квадратичную форму

$$V_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^*\Theta(t)\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\varphi(t) + \psi(t). \tag{13.32}$$

С помощью уравнений (13.13) можно показать, что управление $u_0 = M_0 x + N_0$ доставляет функции $V_0 + f_0$ наименьшее возможное значение, равное нулю, и является, следовательно, оптимальным по отношению к функционалу J.

Доказанная теорема решает проблему синтеза оптимального управления на основе построения нескольких программных управлений. В этой теореме и в § 11 такая проблема решена для конкретных задач. Требуется найти другие важные случаи, когда такая проблема разрешима. Особое внимание следует обратить на синтез управлений, оптимальных по быстродействию.

Перейдем к рассмотрению нелинейных систем дифференциальных уравнений. Пусть задана система

$$dx/dt = Ax + Bu + f(x, u, t) \tag{13.33}$$

и функционал

$$J = p(x(T)) + \int_0^T [f_0(x, u, t) + h(x, u, t)]\, dt. \tag{13.34}$$

Предположим, что функции p, h и компоненты вектора f являются однозначными аналитическими функциями $x_1, \ldots, x_n$, $u_1, \ldots, u_r$ в окрестности точки $x_1 = \ldots = x_n = u_1 = \ldots = u_r = 0$ и разлагаются в ряды, сходящиеся равномерно при $t \in [0, T]$, в некоторой фиксированной окрестности упомянутой точки, с непрерывными вещественными коэффициентами, зависящими от t. Будем считать, что разложение компонент вектора f по $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r$ начинается с членов второго порядка, а у функции h—с третьего порядка, функция p не содержит свободного члена, а совокупность членов первого и второго измерений в функции p представляется в форме $x^*\varphi_0 + x^*\Theta x$.

Матрицы A и B и функция f_0 обладают теми же свойствами, что и ранее.

Определение 13.4 *Управление* $u = u(x, t)$ *называется допустимым, если компоненты вектора* $u(x, t)$ *являются однозначными аналитическими функциями* $x_1, \ldots, x_n$ *в окрестности* $x_1 = \ldots = x_n = 0$, *разлагаются по степеням* $x_1, \ldots, x_n$ *в ряды, не содержащие свободных членов и имеющие непрерывные вещественные коэффициенты при* $t \geqslant 0$, $t \in [0, T]$. *Эти коэффициенты таковы, что упомянутые ряды равномерно сходятся в некоторой фиксированной окрестности точки* $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Определение 13.5. *Допустимое управление* $u_0(x, t)$ *называется оптимальным, если для любого* x_0 *управление* u_0 *доставляет функционалу* (13.34) *наименьшее возможное значение. Точка* x_0 *расположена в некоторой достаточно малой окрестности точки* $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Теорема 13.4. *Если существует непрерывное решение уравнения* (13.18) *с начальным условием* (13.19) *при* $t \in [0, T]$, *то*

для системы (13.33) *существует оптимальное управление по отношению к функционалу* (13.34).

Доказательство. Возьмем функцию

$$V(\mathrm{x},\ t)=\mathrm{x}^*\varphi+\mathrm{x}^*\Theta\mathrm{x}+\sum_{m=3}^{\infty}\varphi_m(\mathrm{x},\ t), \tag{13.35}$$

которая является однозначной и аналитической в некоторой окрестности $x_1=\ldots=x_n=0$. Коэффициенты ряда (13.35) будем считать вещественными, непрерывными и такими, что ряд (13.35) сходится равномерно в указанной области. Через φ_m обозначены однородные формы степени m относительно $x_1,\ \ldots,\ x_n$.

Найдем управление U_0, оптимальное по отношению к демпфированию функционала

$$V+\int_0^t (f_0+h)\,d\tau.$$

Это управление доставляет функции

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}g_s+f_0+h=\overline{W}$$

наименьшее возможное значение, где g_s — s-я компонента вектора правой части системы (13.33). Следовательно, это оптимальное управление будет удовлетворять системе уравнений

$$\partial\overline{W}/\partial u_j=0,\quad j=1,\ \ldots,\ r, \tag{13.36}$$

так как в достаточно малой окрестности $x_1=\ldots=x_n=u_1=\ldots$ $\ldots=u_r=0$ наименьшее возможное значение $\overline{W}$ является минимумом.

Решение системы (13.36) будет являться допустимым управлением. Обозначим его через

$$\mathrm{U}_0=M_0\mathrm{x}+\sum_{m=2}^{\infty}\mathrm{U}^{(m)}(\mathrm{x},\ t). \tag{13.37}$$

Для того чтобы управление (13.37) было оптимальным по отношению к функционалу (13.34), достаточно выбрать коэффициенты в (13.35) таким образом, чтобы при управлении (13.37) было выполнено равенство

$$\overline{W}=-\partial V/\partial t,\quad V(\mathrm{x}(T),\ T)=p(\mathrm{x}(T)). \tag{13.38}$$

Подставляя (13.37) в (13.38) и приравнивая слева и справа формы одинаковой степени, найдем последовательности систем дифференциальных уравнений для определения коэффициентов (13.37). При этом оказывается, что $\Theta(t)$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют

системе (13.15)—(13.17) с начальными условиями $\Theta(T)=\Theta_0$, $\varphi(T)=\varphi_0$. Матрица M_0 определяется по-прежнему уравнением (13.8). Остальные коэффициенты функции V определяются единственным образом как решения линейных систем дифференциальных уравнений. Предположим, что решения всех таких линейных систем найдены. Тогда возникает вопрос о сходимости рядов (13.37). Покажем, что эти ряды сходятся. Введем в рассмотрение функции

$$\lambda_1=\partial V/\partial x_1, \ \ldots, \ \lambda_n=\partial V/\partial x_n.$$

Дифференцируя (13.38) по $x_1, \ldots, x_n$ и учитывая (13.36), найдем, что функции $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ удовлетворяют системе

$$\frac{\partial\lambda_s}{\partial t}=-\frac{\partial\overline{W}}{\partial x_s}, \quad s=1, \ldots, n. \tag{13.39}$$

Система (13.33) может быть записана в форме

$$\frac{dx_s}{dt}=\frac{\partial W}{\partial\lambda_s}, \quad s=1, \ldots, n, \qquad \overline{W}=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s g_s+f_0+h. \tag{13.40}$$

Теперь уравнения (13.36) определяют $u_1, \ldots, u_r$ как функции $2n+1$ переменных $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, t$. С помощью этих функций

$$U_j=U_j(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, t), \quad j=1, \ldots, r, \tag{13.41}$$

исключим управления $u_1, \ldots, u_r$ из правых частей систем (13.39), (13.40). Полученная вновь система

$$\frac{d\lambda_s}{dt}=\bar{g}_s(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, t), \qquad \frac{dx_s}{dt}=\bar{f}_s(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, t), \quad s=1, \ldots, n, \tag{13.42}$$

имеет семейство решений, зависящее от n произвольных постоянных и представимое в форме рядов

$$\lambda_s=\sum_{i=1}^{n}\lambda_{si}c_i+\ldots, \qquad x_s=\sum_{i=1}^{n}x_{si}c_i+\ldots \tag{13.43}$$

Это семейство строится следующим образом. Рассматриваем линейное приближение системы (13.42). Для него строим

решений с начальными данными

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)} \quad \text{при} \quad t=0, \quad \lambda=2\Theta_0\mathbf{x}(T)+\varphi_0 \quad \text{при} \quad t=T.$$

Затем берем линейную комбинацию этих решений с произвольными коэффициентами $c_1, \ldots, c_n$. Обозначим полученные комбинации через $\lambda_s^{(1)}$, $x_s^{(1)}$, $s=1, \ldots, n$. Семейство решений системы (13.42), зависящее от n произвольных постоянных, строим в виде

$$\mathbf{x}_s=\sum_{m=1}^{\infty} x_s^{(m)}, \quad \lambda_s=\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_s^{(m)}, \quad s=1, \ldots, n, \qquad (13.44)$$

где $x_s^{(m)}$ и $\lambda_s^{(m)}$ — однородные формы относительно $c_1, \ldots, c_n$. Исходную систему n решений можно выбрать так, чтобы $c_1, \ldots, c_n$ были начальными данными, т. е. компонентами вектора $\mathbf{x}^{(0)}$. Коэффициенты форм $\mathbf{x}_s^{(m)}$ и $\lambda_s^{(m)}$ будут удовлетворять линейным дифференциальным уравнениям. Эти уравнения последовательно интегрируются со специальным выбором начальных условий. Если $c_1, \ldots, c_n$ достаточно малы, то ряды (13.44) будут сходиться равномерно при $t \in [0, T]$. Матрица $(\mathbf{x}_{si})$, $s=1, \ldots, n$; $i=1, \ldots, n$, имеет отличный от нуля определитель, ибо решения, входящие в нее, линейно независимы. Поэтому величины $c_1, \ldots, c_n$ можно исключить из равенств (13.44). В результате получим

$$\lambda_s=\lambda_s(x_1, \ldots, x_n, t); \quad s=1, \ldots, n. \qquad (13.45)$$

Функции (13.45) однозначные аналитические в окрестности $x_1=\ldots=x_n=0$ и разлагаются в равномерно сходящиеся ряды по степеням $x_1, \ldots, x_n$ при $t \in [0, T]$. Подставляя функции (13.45) в (13.41), найдем

$$u_j=u_j^{(0)}(x_1, \ldots, x_n, t), \quad j=1, \ldots, r. \qquad (13.46)$$

С помощью функций $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ можно построить функцию

$$V(\mathbf{x}, t)=\int_t^T (f_0+h)\,d\tau+p(\mathbf{x}(T)). \qquad (13.47)$$

Интегрирование в формуле (13.47) осуществляется при управлении (13.46). Функция V является однозначной и аналитической и разлагается в равномерно сходящийся ряд. Легко показать, что функции (13.46) и (13.47) совпадают с рядами, построенными выше. Поэтому ряды (13.47) сходятся и дают оптимальное управление для системы (13.33) по отношению к функционалу (13.34). Оптимальное управление (13.37) можно разыскивать с помощью следующего метода последовательных приближений. Пусть

$\mathbf{U}_1(\mathbf{x}, t)$ — некоторое допустимое управление. Построим функцию $V_1(\mathbf{x}, t)$

$$V_1(\mathbf{x}, t) = \int_t^T (f_0 + h)\, d\tau + p(\mathbf{x}(T)). \qquad (13.48)$$

Интегрирование (13.48) ведется при управлении $U = U_1(\mathbf{x}, t)$. Построим управление $\mathbf{U}_2(\mathbf{x}, t)$ как управление, оптимальное по отношению к демпфированию функционала

$$V_1(\mathbf{x}, t) + \int_0^T (f_0 + h)\, d\tau.$$

С полученным управлением $\mathbf{U}_2(\mathbf{x}, t)$ поступим так же, как с $\mathbf{U}_1$. В результате найдем последовательности

$$\{\mathbf{U}_k(\mathbf{x}, t)\} \quad \text{и} \quad \{V_k(\mathbf{x}, t)\}. \qquad (13.49)$$

Теорема 13.5. *Если выполнены условия теоремы* 11.2, *то построение последовательности* $\mathbf{U}_k(\mathbf{x}, t)$ *возможно. При этом каждый член этой последовательности — допустимое управление и* $\mathbf{U}_k(\mathbf{x}, t) \to \mathbf{U}_0(\mathbf{x}, t)$ *при* $k \to +\infty$, *где* $\mathbf{U}_0(\mathbf{x}, t)$ — *оптимальное управление системы* (13.33) *по отношению к функционалу* (13.34).

Доказательство осуществляется следующим образом. Сначала устанавливается ограниченность в совокупности коэффициентов рядов $\mathbf{U}_k$ при членах одинаковых измерений, затем устанавливается их равностепенная непрерывность. Вследствие этого из последовательности $\mathbf{U}_k$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. При этом оказывается, что всякая сходящаяся подпоследовательность сходится к одному и тому же пределу. Этот предел обозначим $\mathbf{U}_0(\mathbf{x}, t)$. Затем устанавливается сходимость

$$V_k(\mathbf{x}, t) \xrightarrow[k \to \infty]{} V(\mathbf{x}, t).$$

Оказывается, что управлением, оптимальным по отношению к демпфированию функции $V = \int_0^T (f_0 + h)\, d\tau$, будет $\mathbf{U}_0$. При этом $\overline{W} = -\partial V / \partial t$ на управлении $\mathbf{U}_0$, следовательно, $\mathbf{U}_0$ оптимально по отношению к (13.34).

Глава IV

ПРОБЛЕМА СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ

§ 14. Линейная независимость скалярных и векторных функций

Рассмотрим совокупность вещественных функций $B_1(t), \ldots, B_n(t)$, заданных и непрерывных при $t \in [t_0, t_1]$.

Определение 14.1. *Будем говорить, что функции $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ линейно независимы на промежутке $[t_0', t_1'] \subset [t_0, t_1]$, если из условия $\sum_{s=1}^{n} c_s B_s(t) = 0$ при $t \in [t_0', t_1']$, где $c_1, \ldots, c_n$ — вещественные постоянные, вытекает, что $c_s = 0$, $s = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\mathbf{B}(t)$ векторную функцию $\mathbf{B}(t) = [B_1(t), \ldots, B_n(t)]$ и через $A(t_0', t_1')$ — матрицу $A(t_0', t_1') = \int_{t_0'}^{t_1'} \mathbf{B}(t)\mathbf{B}^*(t)\,dt$, где B^* есть матрица-строка, получаемая из матрицы-столбца B транспонированием.*

Теорема 14.1. *Для того чтобы вещественные непрерывные функции $B_1(t), \ldots, B_n(t)$, заданные при $t \in [t_0, t_1]$, были линейно независимы в промежутке $[t_0', t_1']$, необходимо и достаточно, чтобы $A(t_0', t_1')$ была положительно определенной.*

Доказательство. Необходимость. Пусть функции $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ линейно независимы на промежутке $[t_0', t_1']$. Покажем, что матрица $A(t_0', t_1')$ будет положительно определенной. Действительно $A(t_0', t_1')$ имеет неотрицательные собственные числа, так как квадратичная форма, порождаемая этой матрицей, принимает лишь неотрицательные значения при любом выборе независимых переменных $c_1, \ldots, c_n$. Именно,

$$\mathbf{c}^* A(t_0', t_1')\mathbf{c} = \int_{t_0'}^{t_1'} [\mathbf{c}^*\mathbf{B}(t)]^2\,dt \geqslant 0.$$

Предположим теперь, что среди собственных чисел $A(t_0', t_1')$ имеется хотя бы одно нулевое. Тогда обязательно существует вещественный ненулевой вектор $\mathbf{c}$, отвечающий этому собственному числу и являющийся собственным вектором $A(t_0', t_1')$. Тогда

будем иметь $A(t'_0, t'_1)\cdot \mathbf{c}=0$. Умножая это равенство слева на $\mathbf{c}^*$, получим далее

$$\int_{t'_0}^{t'_1} [\mathbf{c}^*\mathbf{B}(t)]^2\,dt=0.$$

Из свойства непрерывности функций $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ вытекает тогда, что $\sum_{s=1}^{n} c_s B_s(t)=0$ при $t\in[t'_0, t'_1]$. Но тогда из условия линейной независимости функций $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ должно вытекать $c_s=0$, $s=1, \ldots, n$. В то же время вектор $\mathbf{c}$ был выбран ненулевым.

Полученное противоречие показывает, что все собственные числа матрицы $A(t'_0, t'_1)$ положительны, следовательно, эта матрица определенно положительна.

Достаточность. Пусть известно, что $A(t'_0, t'_1)$ положительно определенная. Покажем тогда, что функции $B_1(t), \ldots$ $\ldots, B_n(t)$ линейно независимы в промежутке $[t'_0, t'_1]$. Пусть это не так. И пусть именно существует ненулевой вектор $\mathbf{c}$ с такой, что $\mathbf{c}^*\mathbf{B}(t)=0$ при $t\in[t'_0, t'_1]$. Тогда также должно быть

$$\int_{t'_0}^{t'_1} [\mathbf{c}^*\mathbf{B}(t)]^2\,dt=\mathbf{c}^*A(t'_0, t'_1)\,\mathbf{c}=0.$$

Наряду с этим равенством из положительной определенности матрицы $A(t'_0, t'_1)$ вытекает $\mathbf{c}^*A(t'_0, t'_1)\,\mathbf{c}\geqslant\lambda\mathbf{c}^2$, где $\lambda>0$; — наименьшее собственное число матрицы A. Следовательно, $\mathbf{c}=0$, что противоречит предыдущему предположению. Таким образом, полученное противоречие показывает, что функции $B_1(t), \ldots$ $\ldots, B_n(t)$ будут непременно линейно независимыми в промежутке $[t'_0, t'_1]$.

Теорема 14.2. *Для того чтобы вещественные непрерывные функции $B_1(t), \ldots, B_n(t)$, заданные при $t\in[t_0, t_1]$, были линейно независимыми в промежутке $[t'_0, t'_1]$, необходимо и достаточно, чтобы существовали точки $\tau_1, \ldots, \tau_n$, расположенные в промежутке $[t'_0, t'_1]$, такие, что постоянные векторы $\mathbf{B}_s=\mathbf{B}(\tau_s)$, $s=1, \ldots, n$ образуют в n-мерном векторном пространстве базис.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{B}_1(t), \ldots$ $\ldots, \mathbf{B}_n(t)$ линейно независимы в промежутке $[t'_0, t'_1]$. Покажем тогда, что в этом промежутке существуют точки $\tau_1, \ldots, \tau_n$ такие, что векторы $\mathbf{B}_s=\mathbf{B}(\tau_s)$, $s=1, \ldots, n$, линейно независимы и, следовательно, образуют базис в E_n, где E_n — векторное n-мерное пространство. Для того чтобы векторы $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ образовывали

базис, как известно, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы, столбцами которой являются эти векторы, был отличен от нуля.

Рассмотрим на промежутке $[t_0', t_1']$ счетное, всюду плотное множество точек τ. Обозначим точки этого множества через $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ Если среди векторов $\mathbf{B}(\tau_s)$, $s=1, 2, \ldots$, имеется n линейно независимых, то необходимость условия доказана. Предположим, что это не так. Именно, пусть существует лишь $k<n$ линейно независимых. Не ограничивая общности, можно считать, что такими векторами являются $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_k$, $\mathbf{B}_j=\mathbf{B}(\tau_j)$. Тогда существует ненулевой вектор $\mathbf{c}$ такой, что $\mathbf{B}_s^*\cdot\mathbf{c}=0$, $s=1, \ldots, k$. Так как любой вектор $\mathbf{B}_j, j>k$, является линейной комбинацией векторов $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_k$, то обязательно будет $\mathbf{B}_j^*\mathbf{c}=0$ для любого j. Далее из непрерывности функций $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ и всюду плотности множества точек $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ на промежутке $[t_0', t_1']$ будет также иметь место равенство $\mathbf{B}^*(t)\,\mathbf{c}=0$, $t\in[t_0', t_1']$. Т. е. функции $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ оказываются линейно зависимыми в промежутке $[t_0', t_1']$. Это противоречие показывает, что выше сделанное предположение $k<n$ несправедливо, и, следовательно, среди векторов $\mathbf{B}_j$, $j=1, 2, \ldots$, имеется ровно n линейно независимых. Этим полностью доказана необходимость условия.

Достаточность. Пусть в промежутке $[t_0', t_1']$ существуют точки $\tau_1, \ldots, \tau_n$ такие, что векторы $\mathbf{B}_s=\mathbf{B}(\tau_s)$, $s=1, \ldots, n$, образуют базис. Покажем тогда, что функции $\mathbf{B}_1(t), \ldots, \mathbf{B}_n(t)$ линейно независимы в промежутке $[t_0', t_1']$. Пусть это не так. Тогда существует ненулевой вектор $\mathbf{c}$ такой, что $\mathbf{B}^*(t)\cdot\mathbf{c}=0$, $t\in[t_0', t_1']$. Положим в этом равенстве $t=\tau_s$, $s=1, \ldots, n$; тогда будем иметь также $\mathbf{B}_s^*\mathbf{c}=0$, $s=1, \ldots, n$. Ввиду того, что матрица коэффициентов этой системы имеет по условию определитель, отличный от нуля, то эта система имеет единственное решение $\mathbf{c}=0$. Следовательно, по определению функции $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ являются линейно независимыми.

Рассмотрим теперь векторные функции $\mathbf{B}_1(t), \ldots, \mathbf{B}_n(t)$ размерности r

$$\mathbf{B}_s(t)=\{B_{js}(t)\}, \quad j=1, \ldots, r.$$

Пусть они заданы при $t\in[t_0, t_1]$, вещественны и непрерывны там.

Определение 14.2. *Векторные функции* $\mathbf{B}_1(t), \ldots, \mathbf{B}_n(t)$ *называются линейно независимыми в промежутке* $[t_0', t_1']\subset[t_0, t_1]$, *если из условия* $\sum_{s=1}^{n} c_s\mathbf{B}_s(t)=0$ *следует* $c_s=0$, $s=1, \ldots, n$.

Введем в рассмотрение матрицу B, строки которой являются векторными функциями $\mathbf{B}_1(t), \ldots, \mathbf{B}_n(t)$. Следовательно, матрица B имеет n строк и r столбцов.

Определим матрицу $A(t'_0, t'_1)$, как и выше, соотношением $A(t'_0, t'_1) = \int_{t'_0}^{t'_1} B(t)B^*(t)\,dt$, где $B^*(t)$ — матрица, транспонированная по отношению к $B(t)$. Аналогично теоремам 14.1 и 14.2 могут быть доказаны теоремы, содержащие необходимые и достаточные условия линейной независимости векторных функций $\mathbf{B}_1(t), \ldots, \mathbf{B}_n(t)$.

Теорема 14.3. *Для того чтобы векторные функции* $\mathbf{B}_1(t), \ldots$ $\ldots, \mathbf{B}_n(t)$, *заданные при* $t \in [t_0, t_1]$, *вещественные и непрерывные были независимы в промежутке* $[t'_0, t'_1] \subset [t_0, t_1]$, *необходимо и достаточно, чтобы матрица* $A(t'_0, t'_1)$ *была положительно определенной.*

Теорема 14.4. *Для того чтобы векторные функции* $\mathbf{B}_1(t), \ldots$ $\ldots, \mathbf{B}_n(t)$, *заданные при* $t \in [t_0, t_1]$, *вещественные и непрерывные были линейно независимы в промежутке* $[t'_0, t'_1] \subset [t_0, t_1]$, *необходимо и достаточно, чтобы в этом промежутке* $[t'_0, t'_1]$ *существовали точки* $\tau_1, \ldots, \tau_n$ *такие, что среди столбцов матриц* $B(\tau_s)$, $s = 1, \ldots, n$, *имелось в точности* n *линейно независимых.*

Рассмотрим далее матрицу G, имеющую n строк и r столбцов, элементы которой заданы при $t \in [t_0, t_1]$, вещественны и являются функциями ограниченной вариации.

Рассмотрим матрицу $H(t'_0, t'_1) = \int_{t'_0}^{t'_1} [dG] \cdot B^*$.

Теорема 14.5. *Для того чтобы векторные функции* $\mathbf{B}_1(t), \ldots$ $\ldots, \mathbf{B}_n(t)$, *заданные, вещественные и непрерывные при* $t \in [t_0, t_1]$, *были линейно независимыми при* $t \in [t'_0, t'_1] \subset [t_0, t_1]$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала матрица* G, *элементы которой вещественны, заданы при* $t \in [t_0, t_1]$ *и являются функциями ограниченной вариации, для которой матрица* $H(t'_0, t'_1)$ *будет иметь определитель, отличный от нуля.*

Доказательство. Необходимость. Обозначим через $B^+(t)$ матрицу, элементы которой совпадают с элементами матрицы $B(t)$ в тех точках, где они неотрицательны и равны нулю в остальных точках. Через $B^-(t)$ обозначим матрицу, элементы которой совпадают с элементами матрицы $-B(t)$ в тех точках, где они неотрицательны и в остальных точках обращаются в нуль.

Ясно, что $B(t) = B^+(t) - B^-(t)$. Положим $G = \int_{t_0}^{t} B^+\,dt - \int_{t_0}^{t} B^-\,dt$.

Из вида этой матрицы вытекает, что элементы ее заданы в промежутке $[t_0, t_1]$ и являются функциями ограниченной вариации, так как представляются в виде разности двух неубывающих

функций. Легко видеть, что при таком выборе матрицы G матрица $H(t_0', t_1')$ совпадает с матрицей $A(t_0', t_1')$. А тогда из линейной независимости векторных функций $\mathbf{B}_1(t), \ldots, \mathbf{B}_n(t)$ в промежутке $[t_0', t_1']$ вытекает, что матрица $H(t_0', t_1')$ имеет отличный от нуля определитель.

Достаточность. Предположим, что матрица $H(t_0', t_1')$ неособая. Покажем, что тогда векторные функции $\mathbf{B}_1(t), \ldots, \mathbf{B}_n(t)$ линейно независимы на промежутке $[t_0', t_1']$. Пусть существует вектор c такой, что $B^*\mathbf{c}=0$. Домножая обе части слева на матрицу $[dG]$ и интегрируя в пределах от t_0' до t_1', находим $H(t_0', t_1')\times\times\mathbf{c}=0$. Следовательно, $\mathbf{c}=0$, откуда вытекает, что векторные функции $\mathbf{B}_1(t), \ldots, \mathbf{B}_n(t)$ линейно независимы.

Замечание. Пусть $l_1, \ldots, l_m$ — совокупность каких-либо однородных аддитивных операций над векторными функциями. Именно, $l_j\left[\sum_{s=1}^{n} c_s\mathbf{B}_s(t)\right]=\sum_{s=1}^{n} c_s l_j[\mathbf{B}_s(t)]$. Из теоремы 14.5 вытекает, что для линейной независимости векторных функций $\mathbf{B}_1(t), \ldots, \mathbf{B}_n(t)$ в промежутке $[t_0', t_1']$ необходимо и достаточно, чтобы существовала совокупность $l_1, \ldots, l_m$ однородных, аддитивных операций над векторными функциями в промежутке $[t_0', t_1']$ таких, что ранг матрицы линейной системы $\sum_{s=1}^{n} c_s l_j[\mathbf{B}_s(t)]=0$, $j=1, \ldots, m$, в точности равен n.

Пример 14.1. Рассмотрим функции $B_1=1$, $B_2=t_1, \ldots, B_n=t^{n-1}$. Покажем, что эти функции линейно независимы на любом промежутке вещественной оси. Пусть τ — точка промежутка $[t_0', t_1']$. Положим

$$l_1[\mathbf{B}_s]=\mathbf{B}_s(\tau), \ldots, \quad l_j[\mathbf{B}_s]=\frac{d^{j-1}\mathbf{B}_s(\tau)}{dt^{j-1}}.$$

Тогда матрица системы $\sum_{s=1}^{n} c_s l_j\{\mathbf{B}_s\}$, $j=1, \ldots, m$, будет неособой. И, следовательно, эти функции будут линейно независимыми в промежутке $[t_0', t_1']$.

Пример 14.2. Рассмотрим функции $B_1(t), \ldots, B_n(t)$, являющиеся компонентами вектора $e^{Pt}\cdot\mathbf{Q}$, где P — вещественная $n\times n$ постоянная матрица и $\mathbf{Q}$ — постоянный вектор (n-мерный).

Покажем, что эти функции линейно независимы в любом интервале вещественной оси тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{Q}$, $P\mathbf{Q}, \ldots, P^{n-1}\mathbf{Q}$ образуют базис. Применим те же операции, что и в примере 1. Тогда получим систему уравнений

$$\mathbf{c}^*P^je^{P\tau}\mathbf{Q}=0, \quad j=0, \ldots, n-1.$$

Или $\gamma^*P^j\mathbf{Q}=0$, $j=0, \ldots, n-1$, где $\gamma^*=\mathbf{c}^*e^{P\tau}$. Отсюда видно что для линейной независимости функций $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ в любом промежутке вещественной оси необходимо и достаточно, чтобы векторы $\mathbf{Q}$, $P\mathbf{Q}, \ldots, P^{n-1}\mathbf{Q}$ образовывали базис.

Пример 14.3. Пусть задано дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}+P_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+P_n(t)y=0.$$

Будем считать, что коэффициенты этого уравнения заданы при $t \in [t_0, t_1]$, вещественны и непрерывны.

Пусть $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ есть вещественные непрерывные решения этого уравнения. Если в некоторой точке $\tau \in [t_0, t_1]$ матрица $B_s^{(j)}(\tau)$; $s=1, \ldots, n$; $j=0, \ldots, n-1$ неособая, то функции $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ будут линейно независимыми в любом промежутке, содержащем точку τ.

Для случая дифференциальных уравнений справедливо и более сильное утверждение: функции $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ будут линейно независимыми и в любом промежутке $[t_0', t_1']$, не содержащем τ. Действительно, обозначим через $V(t)$ определитель матрицы $B_s^{(j)}(t)$. Тогда будет иметь место соотношение $\frac{dV}{dt} = -P_1 V$, откуда

$$V(t) = V(\tau) e^{-\int_\tau^t P_1(t)\,dt}.$$

И, следовательно, если $V(\tau) \neq 0$, то и $V(t)$ также $\neq 0$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Пример 14.4. Пусть задана система дифференциальных уравнений $\dot{y} = P(t)y$, где $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — вектор, P — матрица порядка $n \times n$ с вещественными непрерывными элементами, заданными при $t \in [t_0, t_1]$.

Пусть векторные функции $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ есть решения этой системы. Если в некоторой точке τ матрица $Y(\tau)$ неособая, то векторные функции $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ линейно независимы в любом промежутке $[t_0', t_1'] \subset [t_0, t_1]$. Здесь через $Y(t)$ обозначена матрица, столбцами которой являются векторные функции $B_1(t), \ldots, B_n(t)$.

Обозначим через Δ определитель матрицы $Y(t)$. Тогда имеем

$$\dot{\Delta} = p\Delta, \quad \text{где} \quad p = \sum_{s=1}^{n} p_{ss}(t),$$

p_{ss} — диагональные элементы матрицы P. Из последнего уравнения находим

$$\Delta(t) = \Delta(\tau) e^{\int_\tau^t p(t)\,dt};$$

откуда и вытекает утверждение о линейной независимости векторных функций $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ в любом промежутке $[t_0', t_1'] \subset [t_0, t_1]$, если $\Delta(\tau) \neq 0$.

Остановимся теперь на задаче представления векторной функции произвольного вида через заданные линейно независимые. Пусть $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ — заданные векторные функции на промежутке $[0, T]$, и пусть векторная функция u является элементом пространства $L^2[0, T]$ векторных функций, суммируемых с квадратом $\int_0^T u^2\,dt < \infty$. Будем считать теперь также, что

$$B_j(t) \in L^2[0, T].$$

Теорема 14.6. *Если векторные функции* $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ *линейно независимы на промежутке* $[0, T]$, *иначе говоря, если матрица* $A(0, T) = \int_0^T BB^*\,dt$ — *неособая, то имеет место*

представление

$$\mathbf{u}=\sum_{j=1}^{n} B_j c_j+\mathbf{v}, \tag{14.1}$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — *постоянные величины*, $\mathbf{v} \in L^2[0, T]$ *и*

$$\int_0^T B_j^* \mathbf{v}\, dt=0, \quad j=1, \ldots, n, \tag{14.2}$$

и притом представление (14.1) *единственно.*

Здесь через B^* обозначена матрица, столбцы которой — векторные функции $\mathbf{B}_1(t), \ldots, \mathbf{B}_n(t)$, так что условия (14.2) могут быть записаны в форме

$$\int_0^T B\mathbf{v}\, dt=0.$$

Перейдем к доказательству. Помножим (14.1) слева на B и проинтегрируем в пределах $[0, T]$. Тогда получим

$$\int_0^T B\mathbf{u}\, dt=A(0, T)\cdot \mathbf{c}, \tag{14.3}$$

откуда $\mathbf{c}=A^{-1}(0, T)\int_0^T B\mathbf{u}\, dt$, и, следовательно, из (14.2) имеем

$$\mathbf{u}=B^*A^{-1}(0, T)\int_0^T B\mathbf{u}\, dt+\mathbf{v}. \tag{14.4}$$

Покажем, что (14.4) дает единственное представление векторной функции $\mathbf{u}$.

Предположим, что имеем два представления $\mathbf{u}=B^*\mathbf{c}+\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}=B^*\mathbf{c}_1+\mathbf{v}_1$.

Вычитая почленно, домножая затем на матрицу B слева и интегрируя по t в пределах $[0, T]$, найдем $A(0, T)(\mathbf{c}-\mathbf{c}_1)=0$, следовательно, $\mathbf{c}=\mathbf{c}_1$ и, следовательно, $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Если матрица $A(0, T)$ является особой, то представление (14.2) остается в силе, однако уже не будет единственности.

Действительно, обозначим через S матрицу, образованную из $A(0, T)$ и состоящую из всех линейно независимых строк этой матрицы. Обозначим через $\mathbf{h}$ вектор, образованный компонентами вектора $\int_0^T B\mathbf{u}\, dt$ с теми номерами, которые соответствуют

строкам, входящим в S. Тогда будем иметь

$$\mathrm{h} = S\mathrm{c}. \tag{14.5}$$

Будем искать решение (14.5) в форме

$$\mathrm{c} = S^*\gamma + \bar{\mathrm{c}}, \tag{14.6}$$

где $\bar{\mathrm{c}}$ — вектор, обладающий свойством $S\bar{\mathrm{c}} = 0$. Подставляя (14.6) в (14.5), найдем $\mathrm{h} = SS^*\gamma$, откуда имеем

$$\mathrm{c} = S^*(SS^*)^{-1}\cdot\mathrm{h} + \bar{\mathrm{c}}. \tag{14.7}$$

Подставляя (14.7) в (14.1), находим $\mathrm{u} = B^*(SS^*)^{-1}\mathrm{h} + \mathrm{v} + \bar{\mathrm{v}}$, где $\bar{\mathrm{v}} = B^*\bar{\mathrm{c}}$. Легко видеть, что $\int\limits_0^T B\bar{\mathrm{v}}\,dt = 0$. Это обстоятельство и создает неоднозначность представления (14.1) в случае, когда матрица $A(0, T)$ особая.

Выше были указаны примеры линейно независимых систем функций. Поставим вопрос о пополнении линейно независимых систем функций. Пусть задано линейное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} + p_1(t)\,x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)\,x = 0. \tag{14.8}$$

Обозначим через $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ линейно независимую систему решений уравнения (14.8). Требуется построить функции $x_{n+1}, \ldots$ $\ldots, x_{n+k}$ таким образом, чтобы функции $x_1, \ldots, x_{n+k}$ были линейно независимы между собой. Обозначим через $l(x)$ выражение

$$l(x) = x^{(n)} + p_1(t)\,x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)\,x$$

и рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$l^{(k)}(x) + Q_1(t)\,l^{(k-1)}(x) + \ldots + Q_k(t)\,l(x) = 0. \tag{14.9}$$

Легко видеть, что уравнению (14.9) удовлетворяют функции $x_1, \ldots, x_n$. Так как уравнение (14.9) имеет порядок $n+k$, то можно также построить его решение $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$ с начальными условиями

$$\begin{gathered}
x_{n+1}(t_0) = x'_{n+1}(t_0) = \ldots = x_{n+1}^{(n-1)}(t_0) = 0, \quad x_{n+1}^{(n)}(t_0) = 1,\\
x_{n+1}^{(n+1)}(t_0) = x_{n+1}^{(n+2)}(t_0) = \ldots = x_{n+1}^{(n+k-1)}(t_0) = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n+k}(t_0) = x'_{n+k}(t_0) = \ldots = x_{n+k}^{(n+k-2)}(t_0) = 0,\\
x_{n+k}^{(n+k-1)}(t_0) = 1.
\end{gathered}$$

Легко видеть, что вронскиан расширенной системы функций $x_1, \ldots, x_{n+k}$ будет отличен от нуля, следовательно, $x_1, \ldots, x_{n+k}$ будут линейно независимыми.

Если этот алгоритм повторить при $k \geqslant 1$, то можно получить нужное количество линейно независимых функций.

§ 15. Синтез линейных управлений

Пусть задана линейная управляемая система, описываемая системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}} = P(t)\mathbf{x} + Q(t)\mathbf{u} + \mathbf{F}(t), \tag{15.1}$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{F}$ — векторы, причем $\mathbf{x}$ — вектор фазового состояния системы имеет размерность n, вектор $\mathbf{u}$ — размерность r, а $P(t)$, $Q(t)$ — матрицы соответственно размерностей $n \times n$, $n \times r$. Будем считать, что элементы матриц P и Q и компоненты n-мерной векторной функции $\mathbf{F}(t)$ заданы при $t > 0$, вещественны, непрерывны и ограничены.

Пусть требуется линейную управляемую систему с помощью управления $\mathbf{u}$ перевести из любого фазового состояния $\mathbf{x}_0$ при $t = 0$ в конечное состояние $\mathbf{x} = 0$ при $t = T$. Возникает вопрос: при каких условиях существует управление

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}), \tag{15.2}$$

разрешающее выше поставленную задачу? И, если такое управление существует, возникает вопрос об его аналитическом представлении. Перейдем к решению поставленных задач.

Обозначим через $Y(t)$ матрицу линейно независимых решений однородной системы уравнений $\dot{\mathbf{x}} = P(t)\mathbf{x}$ и будем считать, что $Y(0) = E$, где E — единичная матрица. Положим далее $B(t) = Y^{-1}(t)Q(t)$ и

$$A(t, T) = \int_t^T B(t)B^*(t)\,dt.$$

Предположим сначала, что для фиксированного начального состояния $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ можно указать управление

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \tag{15.3}$$

такое, что система (15.1) при управлении (15.3) будет иметь решение

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \tag{15.4}$$

обладающее свойством $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ при $t = 0$ и $\mathbf{x} = 0$ при $t = T$. Подставляя (15.3), (15.4) в (15.1) и умножая обе части слева на

матрицу Y^{-1}, получим после интегрирования в пределах от 0 до T

$$\int_0^T Y^{-1}\dot{\mathbf{x}}\,dt = \int_0^T Y^{-1}[P(t)\mathbf{x} + Q(t)\mathbf{u} + \mathbf{F}(t)]\,dt. \qquad (15.5)$$

Интегрируя слева по частям и используя матричное соотношение

$$\frac{d}{dt}Y^{-1} = -Y^{-1}P,$$

находим из (15.5)

$$-\mathbf{x}_0 = \int_0^T B\mathbf{u}\,dt + \int_0^T Y^{-1}\mathbf{F}\,dt. \qquad (15.6)$$

Систему (15.6) можно теперь рассматривать как систему интегральных уравнений, служащую для определения $\mathbf{u}(t)$. Будем искать решение этой системы в виде

$$\mathbf{u} = B^*\mathbf{c} + \mathbf{v}, \qquad (15.7)$$

где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, а $\mathbf{v}(t)$ — векторная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^T B\mathbf{v}\,dt = 0. \qquad (15.8)$$

Естественно, что также требуется, чтобы компоненты B были вещественными функциями, суммируемыми с квадратом.

Подставляя (15.7) в (15.6) и учитывая (15.8), находим

$$-\mathbf{x}_0 = A(0, T)\mathbf{c} + \int_0^T Y^{-1}\mathbf{F}\,dt. \qquad (15.9)$$

Будем считать, что матрица $A(0, T)$ неособая. Тогда из (15.9) найдем

$$\mathbf{c} = -A^{-1}(0, T)\cdot\left[\mathbf{x}_0 + \int_0^T Y^{-1}\mathbf{F}\,dt\right]. \qquad (15.10)$$

Если уравнение (15.1) после подстановки в него (15.3), (15.4) и умножения слева на матрицу Y^{-1} проинтегрировать в пределах от t до T, то будем иметь

$$-Y^{-1}(t)\,\mathbf{x}(t) = A(t, T)\,\mathbf{c} + \boldsymbol{\xi}(t),$$

где

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \int_t^T B\mathbf{v}\,dt + \int_t^T Y^{-1}\mathbf{F}\,dt.$$

Из этого соотношения имеем далее, с одной стороны,

$$c = -A^{-1}(t, T)[Y^{-1}(t)x(t) + \xi(t)] \qquad (15.11)$$

и, с другой стороны, пользуясь (15.10), найдем

$$x(t) = Y(t)\left\{A(t, T)\left[A^{-1}(0, T)\left(x_0 + \int_0^T Y^{-1}F\,dt\right)\right] - \xi(t)\right\}. \qquad (15.12)$$

Исключая вектор c из (15.7), найдем также

$$u = M(t)x + N(t), \qquad (15.13)$$

где $M(t) = -B^*A^{-1}(t, T)Y^{-1}$, $N(t) = v - B^*A^{-1}(t, T)\xi$.

Теорема 15.1. *Если векторные функции, являющиеся столбцами матрицы B^*, линейно независимы в любом промежутке $[t, T]$, $t \geqslant 0$, то существует семейство управлений* (15.13), *зависящее от произвольной векторной функции, удовлетворяющей условию* (15.8), *обладающее тем свойством, что любое решение системы* (15.1) $x = x(t)$ *при управлении* (15.13) *будет обладать свойством $x = x_0$ при $t = 0$ и $x = 0$ при $t = T$, где x_0—произвольное начальное фазовое состояние.*

Доказательство. Если подставить (15.13) в (15.1), то получим линейную систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt = (P + QM)x + QN + F. \qquad (15.14)$$

Непосредственной подстановкой (15.12) в (15.14) убеждаемся, что векторная функция (15.12) является решением системы (15.14). Это решение при $t = 0$ принимает начальное состояние $x = x_0$. Из формулы (15.12) следует также, что $x = 0$ при $t = T$. Этим теорема доказана полностью.

Пусть теперь требуется построить управление $u = u(t, x)$ такое, при котором система (15.1) переходит из любого начального состояния $x = x_0$ при $t = 0$ в конечное состояние $x = 0$ при $t \to +\infty$. Будем искать управление, обладающее таким свойством, в следующем виде:

$$u = e^{-kt}(B^*c + v), \qquad (15.15)$$

где k—некоторая положительная постоянная, c—постоянный вектор, v—векторная функция с компонентами, суммируемыми с квадратом на каждом конечном интервале и такая, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-kt}Bv\,dt = 0.$$

Подставляя (15.15) в (15.1), домножая слева на Y^{-1} и интегрируя затем один раз в пределах от 0 до ∞, а другой раз

в пределах от t до $+\infty$, как и выше, найдем

$$\mathbf{c} = -A^{-1}(k, 0, +\infty)\left[\mathbf{x}_0 + \int_0^{+\infty} Y^{-1}\mathbf{F}\,dt\right], \tag{15.16}$$

$$\mathbf{c} = -A^{-1}(k, t, +\infty)\left[Y^{-1}(t)\,\mathbf{x}(t) + \eta(t)\right], \tag{15.17}$$

$$\mathbf{x}(t) = Y(t)\left\{A(k, t, +\infty)\left[A^{-1}(k, 0, +\infty)\left(\mathbf{x}_0 + \int_0^{+\infty} Y^{-1}\mathbf{F}\,dt\right)\right] - \eta(t)\right\}, \tag{15.18}$$

где $\eta(t) = \int_t^{+\infty} B\mathbf{v}e^{-kt}\,dt + \int_t^{+\infty} Y^{-1}\mathbf{F}\,dt$. Исключая вектор $\mathbf{c}$ из (15.15), найдем далее

$$\mathbf{u} = \mu\cdot\mathbf{x}(t) + \mathbf{\nu},$$

где

$$\begin{aligned} \mu(t) &= -e^{-kt}B^{*}A^{-1}(k, t, +\infty)\,Y^{-1}(t),\\ \mathbf{\nu}(t) &= e^{-kt}(\mathbf{v} - B^{*}A^{-1}(k, t, +\infty)\,\eta). \end{aligned} \tag{15.19}$$

Теорема 15.2. *Если матрица* $A(k, t, +\infty) = \int_t^{+\infty} e^{-kt}BB^{*}\,dt$ *неособая при* $t \geqslant 0$, *то существует семейство управлений* (15.19), *зависящее от векторной функции* $\mathbf{v}$, *такое, что любое решение* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ *системы* (15.1) *при управлении* (15.19) *обладает свойством* $\mathbf{x}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Доказательство. Если подставить управление (15.19) в систему (15.1), то получится система линейных дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{x}/dt = [P + Q\mu]\,\mathbf{x} + Q\mathbf{\nu} + \mathbf{F}. \tag{15.20}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что векторная функция (15.18) удовлетворяет системе (15.20), а также удовлетворяет начальному условию $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ при $t = 0$. Это решение, как следует из формулы (15.18), будет обладать свойством $\mathbf{x} \to 0$ при $t \to +\infty$.

Замечание 1. При доказательстве теоремы используются два дополнительных условия, а именно, требуется чтобы $\int_0^{+\infty} Y^{-1}\mathbf{F}\,dt$ был сходящимся и число $k > 0$ можно было выбрать таким образом, что $\int_0^{+\infty} e^{-kt}BB^{*}\,dt$ также сходился. Это последнее предположение всегда выполняется, так как элементы матриц Y и Y^{-1} могут возрастать не быстрее экспоненты.

Именно,

$$\|Y\| < \alpha e^{\beta t}, \qquad \|Y^{-1}\| < \alpha e^{\beta t},$$

что в свою очередь вытекает из ограниченности элементов матрицы $P(t)$.

В предыдущем изложении управляемая система (15.1) из начального состояния $\mathbf{x}_0$ переводилась в конечное состояние $\mathbf{x}=0$ за время $[0, T]$. Однако в ряде случаев могут задаваться некоторые промежуточные состояния управляемой системы. Например, пусть требуется построить такое движение системы (15.1) $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$, которое будет удовлетворять на промежутке $[0, T]$ граничным условиям

$$S_j\mathbf{x}(t_j)=\mathbf{H}_j, \quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ k; \tag{15.21}$$

$t_0=0$, $t_k=T$. Здесь S_j—постоянные матрицы порядка $n_j\times n$, $\mathbf{H}_j$—постоянные векторы размерности n_j, числа $t_0, t_1, \ldots, t_k$ могут быть заданы или некоторые из них могут подлежать определению. Систему граничных условий (15.21) можно записать в форме интеграла Стилтьеса

$$\int_0^T [dS(\vartheta)]\,\mathbf{x}(\vartheta)=\mathbf{H}, \tag{15.22}$$

где S, вообще говоря,—произвольная вещественная матрица, элементы которой есть функции ограниченной вариации на промежутке $[0, T]$ и $\mathbf{H}$—постоянный вектор.

Будем, как и выше, семейство управлений представлять в форме

$$\mathbf{u}=B^*\mathbf{c}+\mathbf{v}. \tag{15.23}$$

Подставляя (15.23) в (15.1), домножая затем на Y^{-1} слева и интегрируя по t в пределах $[t, \vartheta]$, получаем

$$Y^{-1}(\vartheta)\,\mathbf{x}(\vartheta)-Y^{-1}(t)\,\mathbf{x}(t)=A(t, \vartheta)\,\mathbf{c}+\int_t^\vartheta B\mathbf{v}\,dt+\int_t^\vartheta Y^{-1}\mathbf{F}\,dt. \tag{15.24}$$

Умножим обе части (15.24) слева на матрицу $Y(\vartheta)$, и полученный результат подставим в (15.22). Тогда находим

$$\int_0^T [dS(\vartheta)]\,Y(\vartheta)\,A(t, \vartheta)\,\mathbf{c}+\int_0^T [dS(\vartheta)]\,Y(\vartheta)\,Y^{-1}(t)\,\mathbf{x}(t)+$$
$$+\int_0^T [dS(\vartheta)]\,Y(\vartheta)\left[\int_t^\vartheta B\mathbf{v}\,dt+\int_t^\vartheta Y^{-1}\mathbf{F}\,dt\right]=\mathbf{H}. \tag{15.25}$$

Положим в (15.25) $t=0$. Тогда (15.25) перейдет в равенство

$$S\mathbf{c}+\sigma\mathbf{x}_0=\mathbf{H}_0, \tag{15.26}$$

где S и σ — постоянные матрицы, $\mathbf{H}_0$ — постоянный вектор,

$$S=\int_0^T [dS(\vartheta)]\,Y(\vartheta)\,A(0,\vartheta),$$

$$\sigma=\int_0^T [dS(\vartheta)]\,Y(\vartheta).$$

Рассмотрим теперь следующие задачи:

а) Требуется найти условия, при которых при любом выборе начального состояния $\mathbf{x}_0$ существует управление, удовлетворяющее (15.22).

б) Найти начальное состояние и управление, при которых система (15.1) имеет решение, удовлетворяющее (15.22).

в) Найти начальное состояние, при котором система (15.1) имеет решение, удовлетворяющее (15.22). При этом управление является заданной, но произвольной функцией.

Теорема 15.3. 1) *Если строки матрицы S независимы, то задача* а) *разрешима*; 2) *если строки матрицы σ независимы, то задача* в) *разрешима*; 3) *если ранг матрицы $\{S,\sigma\}$ совпадает с рангом матрицы $\{S,\sigma,\mathbf{H}_0\}$, то разрешима задача* б). *Здесь считается, что матрица $\{S,\sigma\}$ получается из S приписыванием столбцов матрицы σ, и соответственно матрица $\{S,\sigma,\mathbf{H}_0\}$ получается из $\{S,\sigma\}$ путем приписывания дополнительного столбца* $\mathbf{H}_0$.

Замечание 2. Если строки матрицы S зависимы, то, вообще говоря, задача а) неразрешима, так как ранг матрицы S может оказаться отличным от ранга матрицы $\{S,(\sigma\mathbf{x}_0-\mathbf{H}_0)\}$.

Замечание 3. Если строки матрицы σ зависимы, то вообще говоря, может не существовать решения задачи в), так как ранг матрицы σ может оказаться отличным от ранга матрицы $\{\sigma,(S\mathbf{c}-\mathbf{H}_0)\}$.

Замечание 4. Условие 3) теоремы 15.3 является необходимым и достаточным для разрешимости задачи б).

Перейдем к доказательству теоремы 15.3. Будем искать решение системы (15.26) в задаче а) в форме

$$\mathbf{c}=S^*\gamma+\bar{\mathbf{c}}, \tag{15.27}$$

где вектор $\bar{\mathbf{c}}$ содержится в ортогональном дополнении подпространства, натянутого на строки матрицы S. Иначе говоря, $S\bar{\mathbf{c}}=0$. Подставляя (15.27) в (15.26), получим

$$SS^*\gamma+\sigma\mathbf{x}_0=\mathbf{H}_0. \tag{15.28}$$

Матрица SS^* — неособая. Отсюда из (15.28) найдем

$$\gamma = [SS^*]^{-1}[\mathbf{H}_0 - \sigma \mathbf{x}_0] \tag{15.29}$$

и, следовательно, из (15.29) и (15.27) получаем

$$\mathbf{c} = S^*[SS^*]^{-1}[\mathbf{H}_0 - \sigma \mathbf{x}_0] + \bar{\mathbf{c}}. \tag{15.30}$$

Подставляя (15.30) в (15.23), найдем требуемое семейство управлений. Любое решение системы (15.1), определяемое семейством (15.23), (15.30), будет обязательно удовлетворять граничным условиям (15.22).

Выше было использовано утверждение, что матрица SS^* неособая. Покажем это.

Пусть эта матрица особая. Тогда она имеет по крайней мере одно нулевое собственное число. Этому собственному числу отвечает ненулевой собственный вектор γ, так что имеем $SS^*\gamma = 0$. Домножая это равенство на γ^*, получаем $\gamma^* SS^* \gamma = (S^*\gamma)^2$. Следовательно, $S^*\gamma = 0$, а это значит, что строки матрицы S линейно зависимы, что противоречит предположению теоремы. Этим утверждение 1) теоремы доказано полностью.

В случае задачи в) будем искать начальное условие $\mathbf{x}_0$ в форме

$$\mathbf{x}_0 = \sigma^* \xi + \bar{\mathbf{x}}, \tag{15.31}$$

где $\bar{\mathbf{x}}$ удовлетворяет условию ортогональности $\sigma \bar{\mathbf{x}} = 0$.

Подставляя (15.31) в (15.26), получим

$$\xi = [\sigma\sigma^*]^{-1}[\mathbf{H}_0 - S\mathbf{c}]. \tag{15.32}$$

Из (15.31) и (15.32) окончательно находим

$$\mathbf{x}_0 = \sigma^*[\sigma\sigma^*]^{-1}[\mathbf{H}_0 - S\mathbf{c}] + \bar{\mathbf{x}}. \tag{15.33}$$

Легко проверить, что любое решение системы (15.1) с начальным условием (15.33) будет удовлетворять граничным условиям (15.22). Этим утверждение 2) теоремы 15.3 доказано полностью.

При доказательстве третьего утверждения теоремы 15.3 без ограничения общности можно считать, что строки матрицы $\{S, \sigma\}$ линейно независимы. Тогда решение системы (15.26) будем искать в форме

$$\mathbf{c} = S^*\delta + \bar{\bar{\mathbf{c}}}, \tag{15.34}$$

$$\mathbf{x}_0 = \sigma^*\delta + \bar{\bar{\mathbf{x}}}, \tag{15.35}$$

Здесь вектор $\bar{\bar{\mathbf{c}}}, \bar{\bar{\mathbf{x}}}$ ортогонален матрице $\{S, \sigma\}$. Именно, $S\bar{\bar{\mathbf{c}}} + \sigma\bar{\bar{\mathbf{x}}} = 0$.

Подставляя (15.34), (15.35) в (15.26), найдем

$$[SS^* + \sigma\sigma^*]\delta = \mathbf{H}_0. \tag{15.36}$$

Матрица системы (15.36) неособая. Отсюда имеем

$$\delta = [SS^* + \sigma\sigma^*]^{-1}\mathbf{H}_0.$$

Непосредственным вычислением можно показать, что любое решение системы (15.1) при управлении, определяемом формулами (15.23), (15.34), (15.36), и начальном условии, определяемом формулами (15.35), (15.36), будет удовлетворять граничному условию (15.22). Этим теорема 15.3 доказана полностью.

Дадим теперь представление управлений для задачи а) в синтезированной форме. С этой целью исключим вектор $\mathbf{c}$ из (15.23) и (15.25). Тогда получим

$$\mathbf{u} = \overline{M}(t)\cdot\mathbf{x} + \overline{\mathbf{N}}(t), \tag{15.37}$$

где

$$\overline{M}(t) = -B^*\left[\int_0^T [dS(\vartheta)]\,Y(\vartheta)\,A(t, \vartheta)\right]^{-1}\int_0^T [dS(\vartheta)]\,Y(\vartheta)\,Y^{-1}(t),$$

$$\overline{\mathbf{N}}(t) = \mathbf{V} + B^*\left[\int_0^T [dS(\vartheta)]\,Y(\vartheta)\,A(t, \vartheta)\right]^{-1} \times$$
$$\times\left\{\mathbf{H} - \int_0^T [dS(\vartheta)]\,Y(\vartheta)\left[\int_t^{\vartheta} B\mathbf{v}\,dt + \int_t^{\vartheta} Y^{-1}\mathbf{F}\,dt\right]\right\}.$$

Если в предыдущих рассмотрениях при переходе из произвольного начального состояния в состояние $\mathbf{x} = 0$ за время $[0, T]$ управление имело неограниченное значение коэффициентов лишь при $t = T$, то в случае задачи (15.21), (15.22) управление (15.37) будет иметь неограниченное значение в точках t_j, в которых заданы граничные условия для движения системы (15.1). Однако само движение такой системы при управлении (15.37) будет определяться начальным состоянием однозначно и будет представлено непрерывно дифференцируемой векторной функцией.

Теорема 15.4. *Если матрица S является квадратной и неособой, то система* (15.1) *при управлении* (15.37) *будет иметь непрерывно дифференцируемое решение, удовлетворяющее условию* (15.22).

Доказательство. Из (15.26) находим

$$\mathbf{c} = S^{-1}[\mathbf{H}_0 - \sigma\mathbf{x}_0]. \tag{15.38}$$

Полагаем в (15.24) $t = 0$, заменяем ϑ на t и исключаем вектор $\mathbf{c}$, пользуясь (15.38). Тогда получим

$$\mathbf{x}(t) = Y(t)\,[E - A(0, t)\,S^{-1}\sigma]\,\mathbf{x}_0 +$$
$$+ Y(t)\left[A(0, t)\,S^{-1}\mathbf{H}_0 + \int_0^t (B\mathbf{v} + Y^{-1}\mathbf{F})\,dt\right]. \tag{15.39}$$

Непосредственной подстановкой (15.39) в (15.1) убеждаемся, что (15.39) является непрерывно дифференцируемым решением системы (15.1) при управлении (15.37), и кроме того, из хода построения вытекает, что (15.39) удовлетворяет граничным условиям (15.22), что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь несколько подробнее задачу в). С одной стороны, задача может рассматриваться как краевая задача для линейных дифференциальных уравнений. С другой стороны, задача в) может рассматриваться как задача интерполирования. Действительно; рассмотрим множество $C_{[0,\,T]}$ всех вещественных непрерывных, векторных функций $\xi(t)$, заданных на промежутке $[0,\ T]$. Пусть требуется найти начальные условия для системы (15.1) таким образом, чтобы соответствующее этим начальным условиям решение $\mathrm{x}=\mathrm{x}(t)$ удовлетворяло тем же граничным условиям вида (15.21), (15.22), что и наперед заданная функция $\xi(t)$. Иначе говоря, требуется, чтобы было

$$S_j[\mathrm{x}(t_j)-\xi(t_j)]=0, \quad j=0,\ \ldots,\ k. \tag{15.40}$$

или в более общем случае

$$\int_0^T [dS(\vartheta)][\mathrm{x}(\vartheta)-\xi(\vartheta)]=0. \tag{15.41}$$

Решение $\mathrm{x}(t)$ системы (15.1), удовлетворяющее (15.41), будем называть интерполирующим для функции $\xi(t)$.

Теорема 15.5. *Если σ — квадратная неособая матрица, то каждой векторной функции $\xi(t)$ отвечает при заданном управлении и единственная интерполирующая функция $\mathrm{x}(t)$, удовлетворяющая системе* (15.1) *и условию* (15.41). *Если матрица σ прямоугольная и имеет линейно независимые строки, то каждой векторной функции $\xi(t)$ отвечает для фиксированного управления и семейство интерполирующих векторных функций $\mathrm{x}(t)$, удовлетворяющих системе* (15.1) *и условию* (15.41).

Доказательство. Пусть σ — квадратная неособая матрица. Тогда из (15.26) имеем

$$\mathrm{x}_0=\sigma^{-1}[\mathrm{H}_0-S\mathrm{c}]. \tag{15.42}$$

Полагая в (15.24) $t=0$ и заменяя ϑ на t, пользуясь (15.42), исключаем вектор x_0. Тогда получим

$$\mathrm{x}(t)=Y(t)\left\{\sigma^{-1}[\mathrm{H}_0-S\mathrm{c}]+A(0,t)\mathrm{c}+\int_0^t (B\mathrm{v}+Y^{-1}\mathrm{F})\,dt\right\}. \tag{15.43}$$

Функция (15.43) удовлетворяет системе (15.1) при управлении (15.23) и является единственным решением этой системы, удовлетворяющим условию (15.22). Пусть $\xi(t)$, принадлежащее $C_{[0,\,T]}$,

есть векторная функция, удовлетворяющая (15.22). Тогда функция $[\mathbf{x}(t)-\xi(t)]$ удовлетворяет (15.41). Следовательно, $\mathbf{x}(t)$ является интерполирующей функцией для $\xi(t)$. Пусть теперь матрица σ — прямоугольная, и строки ее линейно независимы. Тогда решение будет иметь вид $\mathbf{x}_0=\sigma[\sigma\sigma^*]^{-1}[\mathbf{H}_0-S\mathbf{c}]+\bar{\mathbf{x}}$, где $\bar{\mathbf{x}}$ — вектор, удовлетворяющий условию ортогональности. Полагая в (15.24) $t=0$ и заменяя ϑ на t, найдем

$$\mathbf{x}(t)=Y(t)\{\sigma[\sigma\sigma^*]^{-1}[\mathbf{H}_0-S\mathbf{c}]+\bar{\mathbf{x}}\}+ \\ +A(0,\ t)\cdot\mathbf{c}+\int_0^t(B\mathbf{v}+Y^{-1}\mathbf{F})\,dt. \qquad (15.44)$$

Формула (15.44) дает нам решение системы (15.1) при управлении (15.23), удовлетворяющее условию (15.22). Таким образом, (15.44) является семейством интерполирующих векторных функций для любой функции $\xi(t)\in C_{[0,\ T]}$, удовлетворяющей условию (15.22).

Заметим, что (15.44) зависит от произвольного вектора $\bar{\mathbf{x}}$, ортогонального строкам матрицы σ, что и требовалось доказать.

Рассмотрим различные частные случаи применения теоремы 15.5.

С этой целью рассмотрим линейные дифференциальные уравнения порядка n:

$$x^{(n)}+p_1x^{(n-1)}+\ldots+p_nx=qu+f, \qquad (15.45)$$

где $p_1,\ \ldots,\ p_n,\ q,\ f$ — вещественные, непрерывные, ограниченные функции, заданные при $t\geqslant 0$. Обозначим через $x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)$ совокупность линейно независимых решений однородного уравнения, получаемого из (15.45) при $q=0$, $f=0$. Рассмотрим далее совокупность всех непрерывных функций $\xi(t)\in C_{[0,\ T]}$, заданных на $[0,\ T]$. Пусть требуется найти начальное условие для уравнения (15.45) таким образом, чтобы (15.45) имело решение $x=x(t)$, удовлетворяющее условиям

$$x(t_j)=\xi(t_j)=\xi_j,\quad j=1,\ \ldots,\ n, \qquad (15.46)$$

где $t_1,\ \ldots,\ t_n$ — некоторые различные точки промежутка $[0,\ T]$.

Известно, что общее решение уравнения (15.45) имеет вид

$$x=\sum_{j=1}^{n}\gamma_jx_j(t)+\int_0^t W(t,\ \tau)[qu+f]\,d\tau. \qquad (15.47)$$

Будем называть (15.47) *интерполяционным многочленом* для функции $\xi(t)$, если выполняется (15.46). Введем в рассмотрение

определитель

$$D(t_1, \ldots, t_n) = \{x_j(t_i)\}, \quad \begin{matrix} i=1, \ldots, n, \\ j=1, \ldots, n, \end{matrix} = \begin{vmatrix} x_1(t_1), & x_2(t_1), & \ldots, & x_n(t_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1(t_n), & x_2(t_n), & \ldots, & x_n(t_n) \end{vmatrix}. \tag{15.48}$$

Из теоремы 15.5 вытекает, что если определитель (15.48) отличен от нуля, то для любой функции $\xi(t)$ имеется единственный интерполяционный многочлен (15.47). Этот интерполяционный многочлен может быть представлен в различных формах.

Для того чтобы получить из (15.47) интерполяционный многочлен типа Лагранжа, введем в рассмотрение линейно независимые решения $l_j(t)$ однородной системы (15.45) по формулам

$$l_j = \frac{D(t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}, t, t_{j+1}, \ldots, t_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)}. \tag{15.49}$$

Тогда интерполяционный многочлен типа Лагранжа для функции $\xi(t)$ будет иметь вид

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} l_j(t)\bar{\xi}_j + \int_0^t W(t, \tau)(qu+f)\,d\tau, \tag{15.50}$$

где

$$\bar{\xi}_j = \xi_j - \int_0^{t_j} W(t_j, \tau)(qu+f)\,d\tau.$$

Действительно, полагая $t = t_j$ в формуле (15.50), найдем из $l_j(t_j) = 1$, $l_s(t_j) = 0$, $s \neq j$, что $x(t_j) = \xi_j$, с одной стороны, и, с другой стороны, (15.50) является решением системы (15.45). Таким образом, установлена

Теорема 15.6. *Если определитель* (15.48) *отличен от нуля, то для любой функции* $\xi \in C_{[0, T]}$ *существует единственный интерполяционный многочлен типа Лагранжа, представимый в форме* (15.50).

Перейдем теперь к построению интерполяционного многочлена типа Ньютона. С этой целью введем в рассмотрение оператор сдвига τ. Именно, если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — числовая последовательность, то $\tau(\xi_k) = \xi_{k+1}$, так что $\xi_{k+1} = \tau^k(\xi_1)$. Обозначим далее через Δ — разностный оператор $\Delta = \tau - 1$. Тогда будем иметь $\Delta(\xi_k) = \xi_{k+1} - \xi_k$. Далее имеем $\Delta^k = [\tau - 1]^k = \sum_{j=0}^{k} \tau^{k-j}(-1)^j c_k^j$, и,

следовательно

$$\Delta^k(\xi_1)=\sum_{j=1}^{k}\xi_{k+1-j}(-1)^j c_k^j.$$

Последнее соотношение определяет k-ю разность. Из этой формулы вытекает, что для заданных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$ можно образовать все разности до порядка $n-1$ включительно.

Выразим степень оператора сдвига через разностный оператор. Тогда получим

$$\tau^k=(1+\Delta)^k=\sum_{j=0}^{k} c_k^j\Delta^j.$$

Интерполяционный многочлен типа Лагранжа (15.50) можно записать в форме

$$x=\sum_{k=1}^{n} l_k(t)\,\tau^{k-1}(\bar{\xi}_1)+\int_0^t W(t,\ \tau)(qu+f)\,d\tau. \qquad (15.51)$$

Исключая из (15.51) степени оператора сдвига, получим

$$x=\sum_{k=1}^{n} l_k(t)\sum_{j=1}^{k-1} c_{k-1}^j\Delta^j(\bar{\xi}_1)+\int_0^t W(t,\ \tau)(qu+f)\,d\tau.$$

Меняя порядок суммирования, найдем

$$x=\sum_{j=0}^{k-1} l_j(t)\,\Delta^j(\bar{\xi}_1)+\int_0^t W(t,\ \tau)(qu+f)\,d\tau, \qquad (15.52)$$

где

$$l_j(t)=\sum_{k=j+1}^{n} c_{k-1}^j l_k.$$

Теорема 15.7. *Если определитель* (15.48) *отличен от нуля, то для любой функции* $\xi(t)\in C_{[0,\ T]}$ *существует единственный интерполяционный многочлен* (15.52) *типа Ньютона.*

Возникает вопрос, при каких условиях определитель (15.48) отличен от нуля.

Теорема 15.8. *Существует положительное число* $\varepsilon>0$ *такое, что если* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *— различные точки промежутка* $[t,\ t+\varepsilon]$, $t\in[0,\ T]$, *то определитель* (15.48) *отличен от нуля.*

Доказательство. Пусть теорема 15.8 не имеет места. Тогда можно указать по крайней мере одно число t такое, что для любого $\varepsilon>0$, сколь угодно малого, найдутся различные точки $t_1, t_2, \ldots, t_n$ промежутка $[t;\ t+\varepsilon]$ такие, что определитель (15.48) обращается в нуль. Покажем, что это предположение

противоречит линейной независимости функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ на промежутке $[0, T]$. Разложим вторую строку этого определителя в ряд Тейлора по степеням t_2-t_1 до членов второго порядка малости относительно t_2-t_1. Третью строку разложим в ряд Тейлора по степеням t_3-t_1 до членов третьего порядка малости и т. д. Разложим n-ю строку определителя в ряд по степеням t_n-t_1 до членов n-го порядка малости. Затем вычтем из всех строк первую строку. В полученном определителе k-ю строку поделим на t_k-t_n и вычтем вторую строку из последующих. Действуя таким образом далее, получим определитель, сколь угодно мало отличающийся от определителя Вронского

$$\operatorname{Wron}(x_1, \ldots, x_n)=\begin{vmatrix} x_1(t_1) & \ldots & x_n(t_1) \\ x_1'(t_1) & \ldots & x_n'(t_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(n-1)}(t_1) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t_1) \end{vmatrix}. \qquad (15.53)$$

Следовательно, определитель (15.48) может обращаться в нуль при достаточно малом ε лишь в том случае, когда определитель (15.53) обращается в нуль. Последнее невозможно, следовательно, указанное в теореме положительное число ε существует.

Следствие. *Если узлы интерполяции $t_1, \ldots, t_n$ выбраны с достаточно малым шагом, то построение интерполяционного полинома для любой функции $\xi(t) \in C_{[0, T]}$ всегда возможно.*

В другом частном случае применения теоремы 15.5, а именно, при построении интерполяционного многочлена типа Эрмита условия разрешимости задачи выполняются не всегда, если даже узлы интерполяции сколь угодно близки.

Обозначим через $C^k_{[0, T]}$ совокупность вещественных k раз непрерывно дифференцируемых функций $\xi(t)$, заданных на промежутке $[0, T]$. Пусть $t_1, \ldots, t_l$ — различные точки этого промежутка, и пусть в точке t_s заданы значения производных $[\xi(t_s)]^{(k_{sj})}$, $j=1, 2, \ldots, j_s$ порядков k_{sj}, $s=1, \ldots, l$, так что число k_{sj} может принимать значения из ряда чисел $(0, 1, \ldots \ldots, n-1)$. Будем считать, что $\sum\limits_{s=1}^{l} j_s=n$. Требуется построить интерполяционный многочлен $x(t)$ вида (15.47), для которого

$$[x(t_s)]^{(k_{sj})}=[\xi(t_s)]^{(k_{sj})}, \quad s=1, \ldots, l; \quad j=1, \ldots, j_s. \qquad (15.54)$$

Если задача (15.54) разрешима, то построенный полином будем называть типа Эрмита. Рассмотрим определитель $D_1(t_1, \ldots, t_l)$, строки которого образуют векторы $[x_1(t_s)]^{(k_{sj})}, \ldots, [x_n(t_s)]^{(k_{sj})}$, $j=1, \ldots, j_s$; $s=1, \ldots, l$. Заменим в строке, определяемой индексами s, k_{sj}, этот вектор на $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Полу-

ченный таким образом определитель разделим на D_1 и результат обозначим через

$$l_s^{k_s j}(t). \tag{15.55}$$

Легко видеть, что функции (15.55) являются линейными комбинациями величин $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ с постоянными коэффициентами. Положим

$$x = \sum_{j=1}^{l_s} \sum_{s=1}^{l} l_s^{k_s j}(t)\,[\bar{\xi}(t_s)]^{(k_s j)} + \int_0^t W(t, \tau)(qu+f)\,d\tau,$$

где, как и выше, через $\bar{\xi}$ обозначена функция

$$\xi(t) - \int_0^t W(t, \tau)(qu+f)\,d\tau. \tag{15.56}$$

Если определитель D_1 отличен от нуля, то формула (15.56) дает интерполяционный многочлен типа Эрмита. Из теоремы 15.5 вытекает, что существуют случаи, когда определитель D_1 ни при каком выборе величин $t_1, \ldots, t_n$ не будет отличным от нуля.

§ 16. Синтез управлений в квазилинейных системах и системах стабилизации

Пусть управляемая система описывается с помощью системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = P(t)\,\mathbf{x} + Q(t)\,\mathbf{u} + \mathbf{F}(t) + \mu\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mu). \tag{16.1}$$

Будем считать, что элементы матриц P и Q, а также компоненты вектора $\mathbf{F}$ заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, непрерывны и ограничены, причем матрицы P, Q имеют размерности $n \times n$, $n \times r$, а векторы $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{u}$ — размерности n, r соответственно.

Будем считать, что компоненты векторной функции $\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mu)$ заданы при $t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in En$, $\mathbf{u} \in E_r$, $|\mu| \leqslant \mu_1$, где E_n, E_r — n- и r-мерные евклидовы пространства, μ — вещественный параметр, μ_1 — некоторая положительная величина. Будем считать, что компоненты вектора $\mathbf{G}$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по компонентам векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ и параметра μ. Пусть Ω — некоторая ограниченная область фазового пространства E_n. Предположим, что требуется управляемую систему перевести из любого начального состояния $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ в конечное состояние $\mathbf{x} = 0$ за время $[0, T]$. При решении этой задачи, как и в случае линейных управляемых систем, возникают вопросы отыскания условий существования управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, разрешающих поставленную задачу, а также отыскания аналитического представления таких управлений.

Теорема 16.1. *Если векторные функции, являющиеся столбцами матрицы B^*, линейно независимы в любом промежутке $[t, T]$, то существует семейство управлений*

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \mu, \mathbf{v}), \quad |\mu|\leqslant\mu_0, \quad \|\mathbf{v}\|\leqslant v_0,$$

где μ_0 и v_0 — достаточно малые положительные постоянные, и где $\mathbf{v}$ — непрерывная векторная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^T B\mathbf{v}\,dt=0.$$

Каждое из этих управлений переводит систему (16.1) *из начального состояния $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ при $t=0$, $\mathbf{x}_0\in\Omega$ в конечное состояние $\mathbf{x}=0$ при $t=T$.*

Доказательство. Напомним, что матрица B определяется через фундаментальную систему решений Y однородной линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}=P(t)\,\mathbf{x}, \qquad Y_0=E \tag{16.2}$$

по формуле $B=Y^{-1}Q$. Будем искать управление в форме

$$\mathbf{u}=B^*\mathbf{c}+\mathbf{v}. \tag{16.3}$$

Подставим (16.3) в (16.1), умножим обе части на матрицу Y^{-1} и проинтегрируем в пределах от 0 до T. Тогда получим

$$-\mathbf{x}_0=A(0, T)\,\mathbf{c}+\int_0^T Y^{-1}[\mathbf{F}+\mu\mathbf{G}]\,dt. \tag{16.4}$$

Если после умножения (16.1) на Y^{-1} проинтегрировать в пределах от t до T, то получим также

$$-\mathbf{x}(t)=Y(t)\,A(t, T)\,\mathbf{c}+\int_t^T B\mathbf{v}\,dt+\int_t^T Y^{-1}(\mathbf{F}+\mu\mathbf{G})\,dt. \tag{16.5}$$

Обозначим через c_0 то значение вектора c, которое получается из (16.4) при $\mu=0$. Вычислим теперь якобиан

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(c_1, \ldots, c_n)} \quad \text{при} \quad \mathbf{c}=\mathbf{c}_0 \quad \text{и} \quad \mu=0.$$

Из формулы (16.5) легко видеть, что этот якобиан совпадает с определителем матрицы $-Y(t)\,A(t, T)$. Так как векторные функции, образующие столбцы матрицы B^*, линейно независимы в любом промежутке $[t, T]$, то существует обратная функция

$$\mathbf{c}=\mathbf{c}(t, \mathbf{x}, \mu, \mathbf{v}) \tag{16.6}$$

при любом достаточно малом $|\mu|<\mu_0$ и любой непрерывной функции v, удовлетворяющей условию $\|v\|\leqslant v_0$, μ_0, v_0 — достаточно малые положительные постоянные. Подставляя (16.6) в (16.3), найдем $u=u(t, x, \mu, v)$. Покажем, что при построенном управлении любое решение системы (16.1), начинающееся в точке $x_0\in\Omega$, будет обладать свойством $x=0$ при $t=T$.

Действительно, это решение будет совпадать с тем, которое имеет система (16.1) при управлении (16.3), в котором вектор выбирается как решение системы (16.4). Легко видеть, что решения уравнения (16.1) при таком выборе управления (16.3) будет обладать свойством: $x=x_0$ при $t=0$ и $x=0$ при $t=T$, что следует, в частности, из (16.5). Следовательно, построенное семейство управлений (16.2) обладает требуемым свойством.

Замечание. Векторная функция v может быть и разрывной. Однако требуется, чтобы ее компоненты были суммируемы с квадратом на промежутке $[0, T]$.

Рассмотрим теперь управляемую систему в режиме стабилизации. Пусть именно задана система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}=P(t)x+Q(t)u+H(t, x, u), \tag{16.7}$$

где P и Q имеют те же свойства, что и в системе (16.1). Функция H имеет те же свойства, что и G в системе (16.1) и, кроме того, требуется, чтобы

$$\|H\|\leqslant\gamma[\|x\|+\|u\|]^{1+\alpha}, \tag{16.8}$$

где γ и α — некоторые положительные постоянные.

Будем считать, что неравенство (16.8) выполняется в достаточно малой окрестности точки $x=0$, $u=0$. Предположим, что управление

$$u=u(t, x) \tag{16.9}$$

требуется выбрать так, чтобы система (16.7) при управлении (16.9) имела решение $x=x(t)$, удовлетворяющее условию $x=x_0$ при $t=0$ и $x=0$ при $t=T$ при любом выборе вектора начального состояния x_0 из достаточно малой окрестности конечного состояния $x=0$.

Теорема 16.2. *Если столбцы матрицы $B^*=Q^*(Y^{-1})^*$ линейно независимы, то существует семейство управлений*

$$u=u(t, x, v), \tag{16.10}$$

$\|v\|\leqslant V_0$, $\|x\|\leqslant\varepsilon$, *где V_0 и ε — достаточно малые положительные постоянные. Каждое решение системы* (16.1), *начинающееся при $t=0$ в области $\|x\|\leqslant\varepsilon$, при управлении* (16.10) *будет достигать в момент $t=T$ конечного положения $x=0$.*

Доказательство. Сделаем в системе (16.7) замену искомых функций и управлений по формулам $\mathbf{x}=\mu\bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{u}=\mu\bar{\mathbf{u}}$, где μ — некоторый малый параметр. Тогда получим систему квазилинейных уравнений вида (16.1) при условии, что $\mathbf{F}(t)=0$. Применяя далее теорему 16.1, где в качестве области Ω берется некоторая окрестность положения $\mathbf{x}=0$, придем к построению указанного семейства управлений. Если в системе (16.1) положить $\mathbf{u}=B^*\mathbf{c}+\mathbf{v}$ и затем ввести обозначения $c_1=x_{n+1}, \ldots, c_n=x_{2n}$, то для переменных x_{n+k} получим систему уравнений

$$\frac{dx_{n+k}}{dt}=0, \quad k=1, \ldots, n. \tag{16.11}$$

Объединяя систему (16.1) с системой (16.11), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой задача построения управления, переводящего систему из положения $\mathbf{x}_0$ в положение $\mathbf{x}=0$, за время $[0, T]$, превращается в обычную краевую задачу с разделенными граничными условиями.

В связи с этим особое значение имеет теория существования и единственности решений краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Далее приводится развитие метода прогонки для решения таких задач.

Пусть задана система n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt}=f_s(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad s=1, \ldots, n. \tag{16.12}$$

Предположим, что существует решение

$$x_s=x_s(t), \ t\in[0, T], \quad s=1, \ldots, n, \tag{16.13}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\varphi_i(x_1(0), \ldots, x_n(0))=0, \quad i=1, \ldots, k, \tag{16.14}$$

$$\psi_j(x_1(T), \ldots, x_n(T))=0, \quad j=1, \ldots, n-k. \tag{16.15}$$

Требуется дать способ построения решения (16.13) системы (16.12), удовлетворяющее краевым условиям (16.14) и (16.15).

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_s}f_s=0. \tag{16.16}$$

Построим решения уравнения (16.16)

$$\xi_i=\xi_i(t, x_1, \ldots, x_n)=0, \quad i=1, \ldots, k, \tag{16.17}$$

$$\eta_j=\eta_j(t, x_1, \ldots, x_n)=0, \quad j=1, \ldots, n-k, \tag{16.18}$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\xi_i(0, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, k, \tag{16.19}$$

$$\eta_j(T, x_1, \ldots, x_n) = \psi_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n-k. \tag{16.20}$$

Решение (16.13) с помощью этих функций можно отыскивать различными способами.

I. Найдем решение $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ системы уравнений

$$\begin{gathered} \xi_i(T, x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, k, \\ \psi_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, n-k. \end{gathered} \tag{16.21}$$

Чтобы найти решение (16.13), надо проинтегрировать систему (16.12) в обратном направлении по времени при условии

$$x_s(T) = \bar{x}_s, \quad s = 1, \ldots, n.$$

II. Найдем решение $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ системы уравнений

$$\begin{gathered} \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, k, \\ \eta_j(0, x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, n-k. \end{gathered} \tag{16.22}$$

Для того чтобы построить решение (16.13), надо проинтегрировать систему (16.12) при начальных условиях

$$x_s(0) = \tilde{x}_s, \quad s = 1, \ldots, n.$$

III. Так как решение (16.13) удовлетворяет условиям (16.14) и (16.15), то необходимо имеют место следующие равенства:

$$\begin{gathered} \xi_i(t, x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, k, \\ \eta_j(t, x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, n-k. \end{gathered} \tag{16.23}$$

Равенства (16.23) имеют место вдоль любой интегральной кривой, удовлетворяющей (16.14) и (16.15). Следовательно, искомое решение (16.13) можно отыскать из них, не обращаясь к интегрированию системы (16.12).

Воспользуемся равенствами (16.23) для построения вычислительного алгоритма, позволяющего определить с наперед заданной точностью решение (16.13) системы (16.12) в том случае, когда краевые условия линейны и система (16.12) является квазилинейной.

Пусть

$$f_s(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_{si}(t) x_i + q_s(t) + \mu g_s(t, x_1, \ldots, x_n),$$

$$\varphi_i = \sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s + b_i, \qquad \psi_j = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{js} x_s + \beta_j.$$

Тогда уравнения (16.12) и краевые условия (16.14) и (16.15) можно записать в векторно-матричной форме

$$\begin{gathered}\frac{d\mathbf{x}}{dt}=P(t)\mathbf{x}+\mathbf{Q}(t)+\mu\mathbf{G}(t,\ \mathbf{x}),\\ A_0\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}_0=0,\qquad \Gamma_0\mathbf{x}(T)+\Delta_0=0,\end{gathered}\tag{16.24}$$

где $\mathbf{x}$ есть вектор $(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{Q}(t)$ и $\mathbf{G}(t, \mathbf{x})$ — векторные функции своих аргументов, $\mathbf{B}_0$, Δ_0 — постоянные векторы, $P(t)$, A_0, Γ_0 — матрицы соответствующих размерностей.

Имея в виду получить интегральные уравнения, которым будет удовлетворять непременно решение (16.13), будем теперь рассматривать векторную функцию $\mathbf{G}(t, \mathbf{x})$ лишь как функцию времени, считая, что она вычислена на интересующем нас решении (16.13).

Легко видеть, что в рассматриваемом случае решения (16.17) и (16.18) уравнения (16.16) будут линейными функциями, а именно,

$$\begin{aligned}&\Xi=A(t)\mathbf{x}+\mathbf{B}(t),\\ &\mathrm{H}=\Gamma(t)\mathbf{x}+\Delta(t),\\ &\Xi=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_k),\qquad \mathrm{H}=(\eta_1,\ \ldots,\ \eta_{n-k}),\end{aligned}$$

причем матрица $A(t)$ и вектор $\mathbf{B}(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dA}{dt}+AP=0,\tag{16.25}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt}+A\mathbf{Q}'=0\tag{16.26}$$

при начальных условиях

$$A(0)=A_0.\tag{16.27}$$

$$\mathbf{B}(0)=\mathbf{B}_0.\tag{16.28}$$

Аналогично матрица $\Gamma(t)$ и вектор $\Delta(t)$ удовлетворяют системе

$$\frac{d\Gamma}{dt}+\Gamma P=0,\tag{16.29}$$

$$\frac{d\Delta}{dt}+\Gamma\mathbf{Q}'=0\tag{16.30}$$

при начальных условиях

$$\Gamma(0)=\Gamma_0,\tag{16.31}$$

$$\Delta(0)=\Delta_0.\tag{16.32}$$

Здесь $\mathbf{Q}'=\mathbf{Q}(t)+\mu\mathbf{G}(t,\ \mathbf{x}(t))$.

Интегрируя уравнение (16.26) при начальном условии (16.28), найдем

$$\mathbf{B}(t)=\mathbf{B}_1(t)-\mu\int_0^t A(\tau)\,\mathbf{G}(\tau,\ \mathbf{x}(\tau))\,d\tau,$$

$$\mathbf{B}_1(t)=\mathbf{B}_0-\int_0^t A(\tau)\,\mathbf{Q}(\tau)\,d\tau.$$

Аналогично

$$\Delta(t)=\Delta_1(t)-\mu\int_T^t \Gamma(\tau)\,\mathbf{G}(\tau,\ \mathbf{x}(\tau))\,d\tau,$$

$$\Delta_1(t)=\Delta_0-\int_T^t \Gamma(\tau)\,\mathbf{Q}(\tau)\,d\tau.$$

Из (16.23) имеем

$$A(t)\,\mathbf{x}+\mathbf{B}(t)=0, \tag{16.33}$$

$$\Gamma(t)\,\mathbf{x}+\Delta(t)=0. \tag{16.34}$$

Умножая (16.33) на $A^*(t)$, а (16.34) — соответственно на $\Gamma^*(t)$ и затем складывая почленно и умножая слева на матрицу $C(t)=(A^*A+\Gamma^*\Gamma)^{-1}$, получим искомое интегральное уравнение

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0(t)+\mu\int_0^t A_1(t,\tau)\,\mathbf{G}(\tau,\mathbf{x}(\tau))\,d\tau+\mu\int_T^t A_2(t,\tau)\,\mathbf{G}(\tau,\mathbf{x}(\tau))\,d\tau, \tag{16.35}$$

где

$$\mathbf{x}_0(t)=-C(t)\,(\mathbf{B}_1(t)+\Delta_1(t)),$$
$$A_1(t,\ \tau)=C(t)\,A^*(t)\,A(\tau),$$
$$A_2(t,\ \tau)=C(t)\,\Gamma^*(t)\,\Gamma(\tau).$$

Обозначим через $Y^{-1}(t)$ фундаментальную систему решений линейных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}+P\mathbf{x}=0, \tag{16.36}$$

$Y^{-1}(0)=E$, где E — единичная матрица. Тогда

$$A(t)=A_0Y^{-1}(t),$$
$$\Gamma(t)=\Gamma_0Y(T)\,Y^{-1}(t)$$

и

$$A^*(t)\,A(t)+\Gamma^*(t)\,\Gamma(t)=(Y^{-1}(t))^*[A_0^*A+Y^*(T)\,\Gamma_0^*\Gamma_0Y(T)]\,Y^{-1}(T),$$

откуда вытекает, что для того, чтобы существовало решение интегрального уравнения (16.35), необходимо и достаточно, чтобы

постоянная матрица, стоящая в квадратных скобках, была неособой.

Теорема 16.3. *Пусть: 1) правые части системы дифференциальных уравнений заданы при* $t \in [0, T]$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| \leqslant r$ *вещественны, непрерывны и функции* $G_s(t, \mathbf{x})$ *удовлетворяют условию Липшица по* $(x_1, \ldots, x_n)$; *2) матрица* $A_0^* A_0 + Y^*(T)\Gamma_0^*\Gamma_0 Y(T)$ — *неособая.*

Тогда существует $\mu_0 > 0$ *такое, что интегральное уравнение* (16.35) *будет иметь единственное решение, удовлетворяющее условию*

$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_0(t)\| \leqslant m|\mu|, \quad |\mu| < \mu_0.$$

Здесь r, m — *положительные постоянные и*

$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_0(t)\| = \sqrt{\sum_{s=1}^{n}(x_s - x_{s0})^2}.$$

Доказательство. Обозначим через $k(\mathbf{x})$ интегральный оператор, входящий в уравнение (16.35). Тогда это уравнение можно записать в форме

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mu k(\mathbf{x}). \tag{16.37}$$

Построим последовательность векторных функций:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0 + \mu k(\mathbf{x}_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Обычным способом убеждаемся, что существует такое число, что при $|\mu| < \mu_0$ будет $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \leqslant m|\mu| < r$, и, следовательно, построение всех приближений оказывается возможным. Далее, как при доказательстве сходимости в теореме Пикара, с помощью условия Липшица убеждаемся, что ряд

$$\mathbf{x}_0 + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \ldots + (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}) + \ldots$$

сходится абсолютно и равномерно к решению $\mathbf{x}(t)$ интегрального уравнения (16.35), которое обязательно будет удовлетворять исходным дифференциальным уравнениям и краевым условиям.

На возможность построения последовательных приближений для квазилинейных систем с линейными краевыми условиями мне указал академик В. В. Новожилов.

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt = f_s(t, x_1, \ldots, x_n), \quad s = 1, \ldots, n, \tag{16.38}$$

и пусть на промежутке $t \in [0, T]$ система (16.38) имеет решение

$$x_s = x_s(t), \quad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{16.39}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\varphi_i(\mathbf{x}(t_0),\ \mathbf{x}(t_1),\ \ldots,\ \mathbf{x}(t_{k+1}))=0,\quad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{16.40}$$

где $t_0=0$, $t_{k+1}=T$, $t_0<t_1<\ldots<t_{k+1}$, и где $\mathbf{x}(t)=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$.

Требуется дать способ отыскания решения (16.39) системы (16.38), удовлетворяющего условию (16.40). Перейдем к решению поставленной задачи.

Пусть решение (16.39) найдено:

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t).$$

Положим

$$\mathbf{x}_j(t)=\mathbf{x}(t_j+\alpha_j t),\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k+1. \tag{16.41}$$

Легко видеть, что векторные функции (16.41) будут удовлетворять уравнениям

$$d\mathbf{x}_j/dt=\mathbf{F}_j(t,\ \mathbf{x}_j), \tag{16.42}$$

где $\mathbf{F}_j(t,\ \mathbf{x}_j)=\alpha_j\mathbf{F}(t_j+\alpha_j t,\ \mathbf{x}_j)$.

Векторная функция $\mathbf{F}$ имеет компоненты $f_s(t,\ \mathbf{x})$, являющиеся правыми частями системы (16.38). Кроме того, векторные функции (16.41) удовлетворяют начальным условиям

$$\mathbf{x}_j(0)=\mathbf{x}(t_j),\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k+1. \tag{16.43}$$

Итак, если система (16.38) имеет решение (16.39), удовлетворяющее условию (16.40), то необходимо система (16.38), (16.42) из $n(k+2)$ уравнений будет иметь решение (16.39), (16.41), причем это решение будет удовлетворять краевым условиям

$$\varphi_i(\mathbf{x}(0),\ \mathbf{x}_1(0),\ \ldots,\ \mathbf{x}_{k+1}(0))=0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{16.44}$$

Обратимся теперь к выбору постоянных величин $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{k+1}$. Выберем эти величины так, чтобы в заданный момент были выполнены соотношения

$$\mathbf{x}(\bar t)=\mathbf{x}_j(\bar t),\quad j=1,\ \ldots,\ k+1. \tag{16.45}$$

Для того чтобы имело место (16.45), следует положить $\alpha_j=(\bar t-t_j)/\bar t$. При таком выборе величин α_i для систем уравнений (16.38), (16.42) на промежутке $[0,\ \bar t]$ возникает краевая задача с разделенными краевыми условиями (16.44)—(16.45). Следовательно, на этом промежутке можно будет применить развитую выше теорию. Однако можно действовать и непосредственно, а именно: рассмотреть уравнение в частных производных

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_s}f_s+\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{\partial v}{\partial x_{sj}}f_{sj}=0, \tag{16.46}$$

где f_{s_j} — компоненты векторов $\mathbf{F}_j$ и x_{s_j} — компоненты векторов $\mathbf{x}_j$. Построим n решений уравнения (16.46)

$$\xi_i = \xi_i(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{x}_1,\ \ldots,\ x_{k+1}) \tag{16.47}$$

с начальными условиями

$$\xi_i(0,\ \mathbf{x},\ x_1,\ \ldots,\ x_{k+1}) = \varphi_i(\mathbf{x},\ x_1,\ \ldots,\ x_{k+1}). \tag{16.48}$$

На искомом решении функции (16.47) будут удовлетворять уравнениям

$$\xi_i(t,\ \mathbf{x},\ x_1,\ \ldots,\ x_{k+1}) = 0. \tag{16.49}$$

Для того чтобы найти искомое решение в точке $\bar{t}$, достаточно в равенствах (16.49) положить $t=\bar{t}$ и воспользоваться условиями (16.45). Тогда уравнения (16.49) позволят определить векторную функцию $\mathbf{x}(t)$. Если считать теперь величину $\bar{t} \in (0, T)$ произвольной, то приведенная выше процедура позволяет определить решение (16.39) системы (16.38) без дальнейшего интегрирования.

Рассмотрим теперь несколько подробнее случай квазилинейных систем с линейными неразделенными краевыми условиями. Итак, пусть краевые условия (16.40) имеют вид

$$\sum_{j=0}^{k+1} A_{j_0}\mathbf{x}(t_j) + \mathbf{B}_0 = 0. \tag{16.50}$$

Здесь A_{j_0} представляют собой вещественные квадратные матрицы с постоянными элементами и $\mathbf{B}_0$ — вектор с постоянными вещественными компонентами. Пусть исходная система (16.38), записанная в векторной форме, имеет вид

$$d\mathbf{x}/dt = P(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{Q}(t) + \mu\mathbf{F}(t,\ \mathbf{x}). \tag{16.51}$$

Тогда система уравнений (16.42) будет иметь вид

$$d\mathbf{x}_j/dt = P_j(t)\,\mathbf{x}_j + \mathbf{Q}_j(t) + \mu\mathbf{F}_j(t,\ \mathbf{x}_j), \tag{16.52}$$

где

$$P_j(t) = \alpha_j P(t_j + \alpha_j t), \qquad \mathbf{Q}_j(t) = \alpha_j\mathbf{Q}(t_j + \alpha_j t),$$
$$\mathbf{F}_j(t,\ \mathbf{x}_j) = \alpha_j\mathbf{F}(t_j + \alpha_j t,\ x_j).$$

Предположим, что решение (16.39) найдено. Тогда с помощью этого решения можно вычислить векторные функции $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_j$. Положим

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{F}(t,\ \mathbf{x}(t)), \tag{16.53}$$
$$\mathbf{R}_j(t) = \mathbf{F}_j(t,\ \mathbf{x}(t)), \quad j = 1,\ \ldots,\ k+1.$$

Здесь $\mathbf{x}_j(t)$ — векторные функции, определяемые формулой (16.41). Если в системе (16.51) и (16.52) нелинейные члены заменить по формуле (16.53), то получим нелинейные уравнения, которым

будут удовлетворять функции (16.39) и (16.41). Уравнение (16.46), составленное для этих линейных систем, будет иметь решение (16.47), линейное относительно компонент векторов $x_1, \ldots, x_{k+1}$. Обозначим через Ξ вектор, компонентами которого являются упомянутые функции ξ_i. Тогда

$$\Xi = \sum_{j=0}^{k+1} A_j(t)\,\mathbf{x}_j + \mathbf{B}(t). \tag{16.54}$$

Матрицы $A_j(t)$ и вектор $\mathbf{B}(t)$ удовлетворяют линейной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dA_j}{dt} + A_j P_j = 0, \tag{16.55}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \sum_{j=0}^{k+1} A_j(\mathbf{Q}_j + \mu \mathbf{R}_j) = 0. \tag{16.56}$$

В формулах (16.54)—(16.56)

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}(t), \quad P_0(t) = P(t),$$
$$\mathbf{Q}_0(t) = \mathbf{Q}(t), \quad \mathbf{R}_0(t) = \mathbf{R}(t).$$

Матрицы $A_j(t)$ и вектор $\mathbf{B}(t)$ удовлетворяют начальным условиям

$$A_j(0) = A_{j0}, \qquad \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0.$$

Обозначим через $Y^{-1}(t)$ фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} + P\mathbf{x} = 0, \tag{16.57}$$

$Y^{-1}(0) = E$, где E — единичная матрица. Тогда матрицы $A_j(t)$ можно представить следующей формулой:

$$A_j(t) = A_{j_0} Y(t_j)\, Y^{-1}(t_j + \alpha_j t), \quad j = 0, 1, \ldots, k+1. \tag{16.58}$$

Интегрируя уравнение (16.56), найдем

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 - \int_0^t \sum_{j=0}^{k+1} A_j(\tau)\, Q_j(\tau)\, d\tau - \mu \int_0^t \sum_{j=0}^{k+1} A_j(\tau)\, \mathbf{R}_j(\tau)\, d\tau. \tag{16.59}$$

Из (16.49) имеем, что искомое решение удовлетворяет системе уравнений

$$\sum_{j=0}^{k+1} A_j(t)\,\mathbf{x}_j + \mathbf{B}(t) = 0. \tag{16.60}$$

Положим в (16.60) $t=\bar{t}$. Используя далее соотношение (16.45), найдем из (16.60)

$$\left[\sum_{j=0}^{k+1} A_j(\bar{t})\right]\cdot \mathbf{x}(\bar{t}) = -\mathbf{B}(\bar{t}). \qquad (16.61)$$

Предположим, что матрица $\sum_{j=0}^{k+1} A_j(\bar{t})$ — неособая. Обозначим обратную ей через $C(\bar{t})$ и тогда из (16.61) имеем

$$\mathbf{x}(\bar{t}) = \mathbf{c}(\bar{t})\left[\sum_{j=0}^{k+1}\int_0^{\bar{t}} A_j(\tau)\,\mathbf{Q}_j(\tau)\,d\tau - \mathbf{B}_0\right] + \mu C(\bar{t})\sum_{j=1}^{k+1}\int_0^{\bar{t}} A_j(\tau)\,\mathbf{R}_j(\tau)\,d\tau. \qquad (16.62)$$

Заменим в выражении (16.62) функции $\mathbf{R}_j(\tau)$ их выражениями через функции $\mathbf{F}_j$ и введем в j-м слагаемом новую переменную интегрирования

$$\theta = t_j + \alpha_j\tau.$$

Тогда формула (16.62) примет вид

$$\mathbf{x}(\bar{t}) = \mathbf{x}^0(\bar{t}) + \mu\sum_{j=0}^{k+1}\int_{t_j}^{\bar{t}} A_j(\bar{t},\ \theta)\,\mathbf{F}(\theta,\ \mathbf{x}(\theta))\,d\theta, \qquad (16.63)$$

где $A_j(\bar{t},\ \theta) = C(\bar{t})\,A_{j0}\,Y(t_j)\,Y^{-1}(\theta)$, и

$$\mathbf{x}^0(\bar{t}) = \sum_{j=0}^{k+1}\int_{t_j}^{\bar{t}} A_j(\bar{t},\ \theta)\,\mathbf{Q}(\theta)\,d\theta - C(\bar{t})\,\mathbf{B}_0. \qquad (16.64)$$

Уравнение (16.63) можно рассматривать теперь как интегральное уравнение, служащее для определения векторной функции (16.39), так как величина $\bar{t}$ в уравнении (16.63) может теперь считаться независимой переменной $\bar{t}\in[0,\ T]$. Заметим, что векторная функция $\mathbf{x}^0(t)$, определяемая уравнением (16.64), будет давать решение поставленной задачи при $\mu=0$.

Обозначим через $K(\mathbf{x})$ интегральный оператор, входящий в правую часть (16.63). Тогда уравнение (16.63) может быть представлено в форме

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0(t) + \mu K(\mathbf{x}). \qquad (16.65)$$

Положим

$$\mathbf{x}^N(t) = \mathbf{x}^0(t) + \mu K(\mathbf{x}^{N-1}), \qquad N = 1,\ 2,\ \ldots$$

Оказывается, что при широких предположениях относительно правых частей исходной системы дифференциальных уравнений

последовательные приближения $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \ldots$ равномерно сходятся к решению (16.39) системы (16.38), удовлетворяющему краевым условиям (16.50). А именно, имеет место

Теорема 16.4. *Пусть:* 1) *правые части системы уравнений* (16.57) *заданы при* $t \in [0, T]$,

$$\|\mathbf{x}^0(t) - \mathbf{x}\| \leqslant r,$$

вещественны, непрерывны там и удовлетворяют условиям Липшица по $\mathbf{x}$; 2) *матрица* $\sum_{j=1}^{k+1} A_{j0} Y(t_j)$ — *неособая.*

Тогда существует положительное число μ_0 *такое, что при любом* μ, $|\mu| \leqslant \mu_0$, *система* (16.51) *имеет непрерывное решение* (16.39), *удовлетворяющее краевым условиям* (16.50). *При этом решение будет единственным.*

Доказательство. Из условий непрерывности вытекает, что

$$\|\mathbf{x}^N - \mathbf{x}^0\| \leqslant \mu m_1 \qquad (N = 1, 2, \ldots),$$

если μ_0 выбрано так, чтобы было $\mu_0 \cdot m_1 < r$, где m_1 и r — положительные константы.

Далее из условий Липшица будем иметь

$$\|\mathbf{x}^N - \mathbf{x}^{N-1}\| \leqslant \mu m_2 \|\mathbf{x}^{N-1} - \mathbf{x}^{N-2}\|.$$

Здесь $N = 2, 3, \ldots$ Если величина μ_0 к тому же выбрана так, чтобы было

$$\mu_0 m_2 < 1,$$

то ряд

$$\mathbf{x}^0 + (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0) + (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) + \ldots$$

будет сходиться равномерно и абсолютно при $t \in [0, T]$ к непрерывному решению (16.39) системы (16.51). Это решение непременно будет удовлетворять краевым условиям (16.60).

Установление теоремы единственности для такого решения производится стандартным образом.

В предыдущих рассмотрениях обсуждался общий случай, когда матрица

$$A(t) = \sum_{j=0}^{k+1} A_j(t) \qquad (16.66)$$

была неособой. Уравнение (16.61) можно переписать в следующем виде:

$$A(t)\,\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}_1 + \mu \mathbf{B}_2, \qquad (16.67)$$

где

$$\mathbf{B}_1=\int\limits_0^t\sum_{j=0}^{k+1}A_j(\tau)\,Q_j(\tau)\,d\tau-\mathbf{B}_0=\sum_{j=0}^{k+1}\int\limits_{t_j}^{t}A_{j0}Y(t_j)\,Y^{-1}(\tau)\,\mathbf{Q}(\tau)\,d\tau-\mathbf{B}_0, \tag{16.68}$$

$$\mathbf{B}_2=\int\limits_0^t\sum_{j=0}^{k+1}A_j(\tau)\,\mathbf{R}_j(\tau)\,d\tau=\sum_{j=0}^{k+1}\int\limits_{t_j}^{t}A_{j0}Y(t_j)\,Y^{-1}(\tau)\,\mathbf{F}(\tau,\ \mathbf{x}(\tau))\,d\tau. \tag{16.69}$$

Итак, пусть матрица (16.66) особая. Тогда, как будет показано ниже, ранг этой матрицы не зависит от t. Обозначим его черaз k.

Теорема 16.5. *Система* (16.51) *при* $\mu=0$ *имеет непрерывное решение, удовлетворяющее условию* (16.50), *тогда и только тогда, когда любой постоянный вектор* Λ, *удовлетворяющий соотношению*

$$\Lambda^*\tilde{A}=0,$$

будет удовлетворять также условию

$$\Lambda^*\tilde{\mathbf{B}}_1=0,$$

где

$$\tilde{A}=\sum_{j=0}^{k+1}A_{j0}Y(t_j),$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_1=\mathbf{B}_0+\sum_{j=0}^{k+1}\int\limits_0^{t_j}A_{j0}Y(t_j)\,Y^{-1}(\tau)\,\mathbf{Q}(\tau)\,d\tau.$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы ранг матрицы $A(t)$ и ранг расширенной матрицы, получающейся из $A(t)$ путем приписывания $n+1$-го столбца, равного $\mathbf{B}_1(t)$, будут совпадать. А тогда линейная система уравнений, получающаяся из (16.67) при $\mu=0$, будет иметь решение, зависящее от $n-k$ произвольных постоянных. Итак, покажем, что ранги упомянутых матриц совпадают при выполнении условий теоремы. Матрица $A(t)$, определяемая (16.66), может быть представлена также в форме

$$A(t)=\sum_{j=0}^{k+1}A_{j0}Y(t_j)\,Y^{-1}(t)=\tilde{A}Y^{-1}(t).$$

Так как матрица $Y^{-1}(t)$ — неособая, то ранг матрицы $A(t)$ будет совпадать с рангом постоянной матрицы $\tilde{A}$. Пусть Λ — некоторый

постоянный вектор, такой, что $\Lambda^*\tilde{A}=0$. Тогда непременно будет

$$\Lambda^* A(t)=0.$$

Вычислим скалярное произведение вектора Λ на $\mathbf{B}_1(t)$. Тогда будем иметь

$$\Lambda^*\mathbf{B}_1(t)=\Lambda^*\left[\sum_{j=0}^{k+1}\int_{t_j}^{t} A_{j0}Y(t_j)Y^{-1}(\tau)\,\mathbf{Q}(\tau)\,d\tau-\mathbf{B}_0\right]=$$

$$=\Lambda^*\left[\sum_{j=0}^{k+1}\int_{0}^{t} A_{j0}Y(t_j)Y^{-1}(\tau)\,\mathbf{Q}(\tau)\,d\tau\right]-\Lambda^*\tilde{\mathbf{B}}_1.$$

Покажем теперь, что обязательно будет иметь место равенство

$$\Lambda^*\mathbf{B}_1(t)=-\Lambda^*\tilde{\mathbf{B}}_1.$$

Действительно,

$$\Lambda^*\sum_{j=0}^{k+1}\int_{0}^{t} A_{j0}Y(t_j)Y^{-1}(\tau)\,\mathbf{Q}(\tau)\,d\tau=\Lambda^*\tilde{A}\int_{0}^{t}Y^{-1}(\tau)\,\mathbf{Q}(\tau)\,d\tau=0.$$

Итак, при условии теоремы из $\Lambda^*A(t)=0$ вытекает $\Lambda^*\mathbf{B}_1(t)=0$, что и означает совпадение рангов матрицы $A(t)$ и расширенной матрицы.

Если матрица (16.66) имеет ранг k, то обязательно существует $n-k$ линейно назависимых векторов Λ_i, удовлетворяющих условию $\Lambda_i^*A(t)=0$. Предположим, что условие теоремы 16.5 выполнено и что существует решение системы (16.51), удовлетворяющее краевым условиям (16.50). Подставляя это решение в уравнение (16.67), получим систему тождеств. Умножая слева полученные тождества на Λ_i^*, получим

$$\Lambda_i^*\mathbf{B}_2(\mathbf{x})=0,\quad i=1,\ \ldots,\ n-k. \tag{16.70}$$

Итак, если система (16.51) имеет решение, удовлетворяющее условиям (16.50), то это решение необходимо удовлетворяет уравнениям (16.67) и (16.70). Преобразуем уравнения (16.70), имея в виду, что

$$\Lambda_i^*\sum_{j=0}^{k+1}\int_{t_j}^{t} A_{j0}Y(t_j)Y^{-1}(\tau)\,\mathbf{F}(\tau,\ \mathbf{x}(\tau))\,d\tau=$$

$$=\Lambda_i^*\tilde{A}\int_{0}^{t}Y^{-1}(\tau)\,\mathbf{F}(\tau,\mathbf{x}(\tau))\,d\tau-\Lambda_i^*\sum_{i=0}^{k+1}\int_{0}^{t_j}A_{j0}Y(t_j)Y^{-1}(\tau)\,\mathbf{F}(\tau,\mathbf{x}(\tau))\,d\tau=$$

$$=-\Lambda_i^*\sum_{j=0}^{k+1}\int_{0}^{t_j}A_{j0}Y(t_j)Y^{-1}(\tau)\,\mathbf{F}(\tau;\ \mathbf{x}(\tau))\,d\tau.$$

Из этого вытекает, что уравнения (16.70) можно представить в форме

$$\Lambda_i^* \sum_{j=0}^{k+1} \int_0^{t_j} A_{j0} Y(t_j) Y^{-1}(\tau) \mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}(\tau))\, d\tau = 0, \quad i = 1, \ldots, n-k. \tag{16.71}$$

Обозначим через $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0(t, c_1, \ldots, c_{n-k})$ решение уравнения (16.67) при $\mu = 0$. Подставим эти функции в подынтегральные выражения, входящие в (16.71). Полученные в результате этого функции произвольных постоянных $c_1, \ldots, c_{n-k}$ обозначим через

$$g_i(c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}) = \Lambda_i^* \sum_{j=0}^{k+1} \int_0^{t_j} A_{j0} Y(t_j) Y^{-1}(\tau) \mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}(\tau))\, d\tau. \tag{16.72}$$

Теорема 16.6. *Пусть:* 1) *выполнены условия теоремы* 16.1; 2) *существуют вещественные постоянные* $c_{1,0}, c_{2,0}, \ldots, c_{n-k,0}$, *удовлетворяющие уравнениям*

$$g_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-k, \tag{16.73}$$

и такие, что якобиан функций $g_1, \ldots, g_{n-k}$ *по переменным* $c_1, \ldots, c_{n-k}$ *отличен от нуля в этой точке.*

Тогда существует положительное число μ_0 *такое, что при любом* μ, $|\mu| \leqslant \mu_0$ *будет существовать непрерывное решение системы* (16.51), *удовлетворяющее краевым условиям* (16.50).

Это непрерывное решение может быть получено как предел последовательных приближений, указанных ниже. Обозначим через $\mathbf{x}^0(t)$ то решение системы (16.67) при $\mu = 0$, которое соответствует величинам $c_{1,0}, c_{2,0}, \ldots, c_{n-k,0}$. Определим далее решение системы

$$A(t)\mathbf{x}^1 = \mathbf{B}_1(t) + \mu \mathbf{B}_2(\mathbf{x}^0). \tag{16.74}$$

Это решение будет зависеть от $n-k$ произвольных постоянных

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^1(t, c_1, \ldots, c_{n-k}). \tag{16.75}$$

Выберем произвольные постоянные $c_1, c_2, \ldots c_{n-k}$ таким образом, чтобы функции (16.75) удовлетворяли уравнениям (16.71). Решение уравнений (16.74), соответствующее этим значениям произвольных постоянных, будем обозначать через $\mathbf{x}^1(t)$. Действуя таким образом далее, можно определить N-е приближение как решение уравнения

$$A(t)\mathbf{x}^N = \mathbf{B}_1(t) + \mu \mathbf{B}_2(\mathbf{x}^{N-1}), \tag{16.76}$$

удовлетворяющее соотношениям, получающимся из (16.71) при подстановке туда вместо $\mathbf{x}$ функции $\mathbf{x}^N$.

Указанный способ построения последовательных приближений позволяет однозначно определить векторные функции $\mathbf{x}^N$ ($N=1$, 2, ...), если иметь в виду, что произвольные постоянные c_1, c_2, ..., c_{n-k} на каждом шаге определяются как решения уравнения вида (16.73), расположенные в малой окрестности точки $c_{1,0}$, $c_{2,0}$, ..., $c_{n-k,0}$. При доказательстве сходимости этих последовательных приближений используется факт дифференцируемости правых частей системы (16.51). Будем предполагать, что правые части системы (16.51), заданные при $t\in[0, T]$, $\|\mathbf{x}^0(t)-\mathbf{x}\|\leqslant r$ вещественны, непрерывны и непрерывно дифференцируемы, где r, как и ранее,—некоторая положительная постоянная, и $\mathbf{x}^0(t)$—решение уравнений (16.67) при $\mu=0$, соответствующее выбранным значениям произвольных постоянных $c_{1,0}$, $c_{2,0}$, ..., $c_{n-k,0}$.

Обозначим через $\mathbf{c}$ вектор размерности $n-k$, компонентами которого являются произвольные постоянные c_1, c_2, ..., c_{n-k}. Тогда из уравнений (16.76) можно найти

$$\mathbf{x}^N(t)=H_1(t)\,\mathbf{B}_1(t)+\mu H_2(t)\,\mathbf{B}_2(\mathbf{x}^{N-1})+H_3(t)\,\mathbf{c}^N, \qquad (16.77)$$

где $H_1(t)$, $H_2(t)$, $H_3(t)$—матрицы, определяемые при решении уравнений (16.76). Подставляя функцию $\mathbf{x}^N(t)$ в равенство (16.71), получим, что постоянный вектор $\mathbf{c}^N$ удовлетворяет уравнениям

$$g_i(H_1(t)\,\mathbf{B}_1(t)+\mu H_2(t)\,\mathbf{B}_2(\mathbf{x}^{N-1})+H_3(t)\,\mathbf{c}^N)=0 \quad (i=1, \ldots, n-k). \qquad (16.78)$$

Система (16.78) имеет решение $\mathbf{c}^0$ при $\mu=0$. Якобиан функций в точке $\mathbf{c}^0$ отличен от нуля. Поэтому существует непрерывно дифференцируемая функция $\mathbf{c}^N(\mu)$, удовлетворяющая системе (16.78) и такая, что

$$\mathbf{c}^N(\mu)=\mathbf{c}^0 \quad \text{при } \mu=0.$$

Оценим величину $\|\mathbf{x}^N-\mathbf{x}^{N-1}\|$. Из (16.77) будем иметь

$$\|\mathbf{x}^N-\mathbf{x}^{N-1}\|\leqslant m_1\|\mathbf{c}^N-\mathbf{c}^{N-1}\|+m_2\mu\|\mathbf{x}^{N-1}-\mathbf{x}^{N-2}\|.$$

Записывая равенства (16.78) для номера $N-1$ и почленно вычитая их из (16.78), а затем применяя формулу конечных приращений, также найдем

$$\|\mathbf{c}^N-\mathbf{c}^{N-1}\|\leqslant m_3\mu\|\mathbf{x}^{N-1}-\mathbf{x}^{N-2}\|.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|\mathbf{x}^N-\mathbf{x}^{N-1}\|\leqslant \mu m_4\|\mathbf{x}^{N-1}-\mathbf{x}^{N-2}\|.$$

Можно показать, что положительное число μ_0 можно выбрать так, чтобы при любых $|\mu|\leqslant\mu_0$ величины m_i ($i=1, 2, 3, 4$) были

положительными постоянными, не зависящими от μ, и построение всех последовательных приближений оказалось возможным. Если μ_0 к тому же выбрать так, чтобы

$$\mu_0 m_4 < 1,$$

то последовательные приближения $x^0, x^1, \ldots, x^N, \ldots$ будут равномерно сходиться при $t \in [0, T]$ к непрерывному решению системы (16.51), удовлетворяющему условиям (16.50).

Если в условии (16.50) положить $k=0$, $A_{00}=E$, $A_{10}=-E$ и $B_0=0$, где E — единичная матрица, то получим так называемые периодические краевые условия $x(0)=x(T)$. Для такого рода условий способ построения интегральных уравнений в одном частном случае был указан А. М. Ляпуновым в работе [10]. В работе [5] для периодических краевых условий было построено нелинейное интегральное уравнение, которое позволило дать способ построения периодических решений и найти условия их существования.

Теоремы, приведенные в настоящей работе, можно рассматривать как распространение упомянутых результатов и результатов работы [24] на общий случай краевых условий (16.50).

§ 17. Построение импульсных и релейно-импульсных управлений в линейной системе

Пусть задана линейная управляемая система

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)u + F(t), \tag{17.1}$$

где x — n-мерный фазовый вектор, u — r-мерный вектор управления. Будем считать, что элементы матриц P и Q и компоненты вектора F заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, непрерывны и ограничены. Управление $u(t)$ будем называть импульсным на промежутке $[0, T]$, если этот промежуток подразделяется точками $t_0=0, t_1, t_2, \ldots, t_k$ на частичные промежутки $[t_j, t_{j+1})$, в которых векторная функция $u(t)$ сохраняет постоянное значение u_j. При этом при четных значениях переменных j $u_j=0$. Импульсное управление $u(t)$ будем называть также релейно-импульсным, если компоненты векторов u_j могут принимать лишь значения $0, \pm 1$.

Обозначим, как и выше, через B матрицу $B=Y^{-1}Q$, где Y — матрица фундаментальной системы решений для системы однородных уравнений

$$\dot{x} = P(t)x. \tag{17.2}$$

Пусть требуется с помощью импульсного управления из любого начального состояния $x=x_0$ при $t=0$ перевести систему в конечное фазовое состояние $x=0$ при $t=T$.

Теорема 17.1. *Если векторные функции, являющиеся столбцами матрицы $B^*(t)$, линейно независимы в промежутке $[0, T]$, то существует семейство импульсных управлений, переводящее систему из начальной точки $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ в конечное состояние $\mathbf{x}=0$ за время $[0, T]$.*

Доказательство. Для простоты рассуждений будем считать, что в управляемой системе (17.1) управление u — скалярная функция, иначе говоря, $r=1$. Тогда условие теоремы будет состоять в том, что компоненты вектора $\mathbf{B}(t)$ являются линейно независимыми функциями на промежутке $[0, T]$. Тогда, как вытекает из § 14, необходимо существуют точки $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, T]$ такие, что векторы $\mathbf{B}_s=\mathbf{B}(t_s)$, $s=1, 2, \ldots, n$ линейно назависимы. Выберем далее величины $\tau_1>0$, $\tau_2>0, \ldots$ так, чтобы промежутки $[t_j, t_j+\tau_j)$ не перекрывались при $j=1, \ldots, n$, и положим $u=u_j$ при $t\in[t_j, t_j+\tau_j)$. В остальных точках промежутка $[0, T]$ положим $u=0$. Здесь $u_1, \ldots, u_n$ — постоянные числа. Таким образом, построенное управление будет импульсным. Покажем, что величины $u_1, \ldots, u_n$ можно выбрать так, что решение системы (17.1), начинающееся в произвольной точке $\mathbf{x}_0$ при $t=0$, будет попадать в точку $\mathbf{x}=0$ при $t=T$.

Предположим, что такое управление построено. Тогда, подставляя его в (17.1) и затем домножая обе части на Y^{-1} и интегрируя в пределах от 0 до T, найдем

$$-\mathbf{x}_0-\int_0^T Y^{-1}\mathbf{F}\,dt=\sum_{j=1}^{n}\left[\int_{t_j}^{t_j+\tau_j}\mathbf{B}(t)\,dt\cdot u_j\right]. \tag{17.3}$$

Легко видеть, что уравнение (17.3) имеет решение, если положить

$$\mathbf{x}_0=-\int_0^T Y^{-1}\mathbf{F}\,dt \quad \text{и} \quad u_j=0.$$

Далее якобиан правых частей по переменным $u_1, \ldots, u_n$ совпадает с определителем матрицы, столбцами которой являются векторы

$$\int_{t_j}^{t_j+\tau_j}\mathbf{B}(t)\,dt.$$

Определитель этой матрицы отличен от нуля при достаточно малых положительных величинах $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, так как этот определитель будет отличаться на величины более высокого порядка малости от определителя, составленного из векторов $\mathbf{B}_s$,

помноженного на произведение $\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \ldots \cdot \tau_n$. Ибо

$$\int_t^{t_j+\tau_j} \mathbf{B}(t)\,dt = \tau_j \mathbf{B}_j + \int_t^{t_j+\tau_j} [\mathbf{B}(t) - B_j]\,dt. \tag{17.4}$$

Интеграл, стоящий в правой части (17.4), имеет порядок малости выше чем τ_j в силу непрерывности вектора $\mathbf{B}(t)$. Таким образом, система (17.3) определяет при всех достаточно малых $\tau_1 > 0, \ldots, \tau_n > 0$ величины $u_1, \ldots, u_n$, которые и дают возможность построить импульсное управление.

Обозначим далее через $\mathbf{V}$ любое импульсное управление, заданное на промежутке $[0, T]$, обладающее тем свойством, что

$$\int_0^T B\mathbf{V}\,dt = 0. \tag{17.5}$$

Если обозначить построенное выше управление через $\mathbf{u}_0$, то семейство импульсных управлений, решающее задачу перехода, будет задаваться формулой $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{V}$, что и требовалось доказать.

Если управление можно выбрать только из класса релейно-импульсных, то задача перехода из начального состояния в заданное конечное, вообще говоря, разрешима не для всех начальных состояний.

Теорема 17.2. *Если векторные функции, являющиеся столбцами матрицы B^*, линейно независимы на промежутке* $[0, T]$, *то при* $\mathbf{F} = 0$ *можно указать такое положительное число H, что при $\|\mathbf{x}_0\| < H$ будет существовать релейно-импульсное управление, переводящее систему из начального положения* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ *при* $t = 0$ *в конечное положение* $\mathbf{x} = 0$ *при* $t = T$.

Доказательство. Как и выше, будем предполагать, что в системе (17.1) управление u является скалярной величиной. Тогда, как и в теореме 17.1, получим

$$-\mathbf{x}_0 = \sum_{j=1}^{n} \left[\int_{t_j}^{t_j+\tau_j} \mathbf{B}(t)\,dt \cdot u_j \right]. \tag{17.6}$$

Будем считать в системе (17.6) величины u_j некоторыми параметрами, не обращающимися в нуль. Система (17.6) имеет решение при $\tau_j = 0$, $\mathbf{x}_0 = 0$. Якобиан правых частей по переменным $\tau_1, \ldots, \tau_n$, вычисленный в точке $\tau_1 = 0, \ldots, \tau_n = 0$, совпадает с определителем матрицы, составленной из векторов $\mathbf{B}_j$, $j = 1, \ldots, n$, помноженным на произведение величин u_j, следовательно, якобиан правых частей (17.6) отличен от нуля. Отсюда система (17.6) имеет единственное решение при любом выборе параметров u_j.

Выберем теперь u_j так, чтобы было $u_j = \pm 1$. Если $\|x_0\|$ достаточно мала, то величины $\tau_1, \ldots, \tau_n$ сколь угодно малы. Поэтому промежутки $[t_j, t_j + \tau_j)$ перекрываться не будут, и, следовательно, построенное релейно-импульсное управление будет решать задачу перехода.

Замечание 1. Если при $u = 0$ положение равновесия в системе (17.1) при $F_0 = 0$ оказывается асимптотически устойчивым по Ляпунову, то с помощью релейно-импульсного управления при выполнении условий теоремы 17.2 можно за конечное время перейти из любого начального состояния $x = x_0$ в конечное состояние $x = 0$.

Замечание 2. Если векторные функции, являющиеся столбцами матрицы B^*, линейно зависимы на промежутке $[0, T]$, то не может существовать импульсное управление, переводящее систему из любого начального состояния $x = x_0$ в конечное состояние $x = 0$ за время $[0, T]$.

Действительно, пусть это не так. Тогда импульсное управление можно представить также в форме

$$u = B^* c + V, \qquad \text{где} \qquad \int_0^T BV\,dt = 0.$$

Подставляя это управление в (17.1), домножая на Y^{-1} слева и интегрируя в пределах от 0 до T, найдем

$$A(0, T)\,c = -x_0 - \int_0^T Y^{-1} F\,dt. \tag{17.7}$$

При любом выборе вектора x_0 эта линейная система неразрешима, так как матрица A — особая.

В теореме 17.2 было установлено, что при релейном характере управления систему (17.1) можно перевести, вообще говоря, лишь из некоторой окрестности области начальных состояний x_0 в конечное состояние $x = 0$ за время $[0, T]$. Это обстоятельство возникает, как следует из теоремы 17.1, не из характера дискретности управления, а из того, что управления стеснены ограничениями по величине. Изучим влияние ограничений несколько подробнее.

Предположим, что управление $u \in U$, где U — некоторое множество, содержащее точку $u = 0$ в качестве внутренней.

Определение 17.1. *Будем говорить, что начальное состояние x_0 принадлежит области управляемости R_0, если существует число $T > 0$ и суммируемая с квадратом функция $u(t)$ такие, что система (17.1) переходит из начального состояния x_0 в конечное состояние $x = 0$ за время $[0, T]$ под действием управления $u = u(t) \in U$.*

Естественно, что время перехода T может быть различным для различных начальных состояний $\mathbf{x}_0 \in R_0$.

Аналогично можно ввести понятие об области управляемости, отнесенное к произвольному начальному моменту t_0, а именно через R_{t_0} будем обозначать совокупность всех состояний $\mathbf{x}_0$, для которых можно указать управление, переводящее в конечное состояние $\mathbf{x}=0$ за время $[t_0, t_0+T]$.

Это управление будем также считать суммируемой с квадратом функцией на промежутке $[t_0, t_0+T]$ и, кроме того, $\mathbf{u} \in U$. Для стационарных систем $R_{t_0}=R_0$.

Теорема 17.3. *Если существует некоторая достаточно малая окрестность точки* $\mathbf{x}=0$, $\|\mathbf{x}\|<\delta$, *содержащаяся в* R_0, *и система* (17.1) *стационарна, то область управляемости* R_0 *является открытым и связным множеством.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_0 \in R_0$. Тогда существует управление $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$, для которого будет иметь место равенство

$$-\mathbf{x}_0=\int_0^T Y^{-1}[Q\mathbf{u}+\mathbf{F}]\,dt. \qquad (17.8)$$

Следовательно, для любого начального состояния $\bar{\mathbf{x}}_0$ при этом же управлении будем иметь

$$Y^{-1}(T)\,\mathbf{x}(T)-\bar{\mathbf{x}}_0=\int_0^T Y^{-1}(Q\mathbf{u}+\mathbf{F})\,dt=-\mathbf{x}_0. \qquad (17.9)$$

Если $\|\bar{\mathbf{x}}_0-\mathbf{x}_0\|<\varepsilon$, то будет $\|\mathbf{x}(T)\|\leqslant\|Y(T)\|\cdot\varepsilon$. Положим $\varepsilon=\delta/\|Y(T)\|$. Тогда все движения системы (17.1), начинающиеся в ε-окрестности состояния $\mathbf{x}_0$, оказываются в момент T в δ-окрестности состояния $\mathbf{x}=0$.

Следовательно, существует число T_1 такое, что система (17.1) может быть переведена из состояния $\mathbf{x}(T)$ в положение $\mathbf{x}=0$ за время $[T, T+T_1]$ с помощью некоторого управления $\mathbf{u}_1(t)$.

Таким образом, с помощью управления $\mathbf{u}_2(t)$ система (17.1) может быть переведена из состояния $\bar{\mathbf{x}}_0$ в состояние $\mathbf{x}=0$ за время $[0, T+T_1]$, причем

$$\mathbf{u}_2(t)=\begin{cases}\mathbf{u}(t), & t\in[0, T),\\ \mathbf{u}_1(t), & t\in[T, T+T_1].\end{cases}$$

Тем самым показано, что $\bar{\mathbf{x}}_0 \in R_0$. Значит, R_0 — открытое множество. Связность этого множества вытекает из того, что из любых двух точек $\mathbf{x}_0 \in R_0$, $\bar{\mathbf{x}}_0 \in R_0$ в конечное время система (17.1) может быть переведена в точку $\mathbf{x}=0$. Следовательно, точки $\mathbf{x}_0$ и $\bar{\mathbf{x}}_0$ могут быть соединены интегральными кривыми, соединяющими их с положением $\mathbf{x}=0$. При этом упомянутые интегральные кривые

принадлежат множеству R_0 и являются абсолютно непрерывными. Таким образом, теорема 17.3 установлена.

Рассмотрим теперь случай, когда U есть совокупность векторных функций, удовлетворяющих ограничению

$$\int_0^T \mathbf{u}^2\,dt \leqslant a^2. \tag{17.10}$$

Теорема 17.4. *Если управления стеснены ограничениями (17.10), то область управляемости R_0 определяется неравенством*

$$\mathbf{x}^* A^{-1}(0, +\infty)\cdot \mathbf{x} \leqslant a^2,$$

причем считается, что векторные функции, стоящие в столбцах матрицы B^*, линейно независимы на каком-либо конечном промежутке, и $\mathbf{F}=0$.

Доказательство. Будем представлять управление в форме

$$\mathbf{u} = B^*\mathbf{c} + \mathbf{V}, \qquad \int_0^T B\mathbf{V}\,dt = 0. \tag{17.11}$$

Если управление (17.11) переводит систему (17.1) из начального состояния $\mathbf{x}_0$ в положение $\mathbf{x}=0$, то будем иметь

$$-\mathbf{x}_0 = A(0, T)\cdot \mathbf{c}, \tag{17.12}$$

и, следовательно, управление (17.11) примет вид

$$\mathbf{u} = -B^*A^{-1}(0, T)\cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}. \tag{17.13}$$

Подставляя (17.13) в (17.10), найдем

$$\mathbf{x}_0^* A^{-1}(0, T)\,\mathbf{x}_0 \leqslant a^2 - \int_0^T V^2\,dt. \tag{17.14}$$

Неравенство (17.14) определяет наиболее широкую область при

$$\int_0^T \mathbf{V}^2\,dt = 0.$$

Обозначим через $R(0, T)$ эллипсоид, определенный неравенством

$$\mathbf{x}^* A^{-1}(0, T)\cdot \mathbf{x} \leqslant a^2.$$

Покажем, что $R(0, T)$ включается в $R(0, T_1)$, если $T_1 > T$. Действительно, если управление (17.11) переводит систему (17.1) из начального состояния $\mathbf{x}_0$ в положение $\mathbf{x}=0$ за время $[0, T]$, то, полагая на промежутке $t \in [T, T_1]$ $\mathbf{u}=0$, получим, что про-

должённое таким образом управление будет переводить систему (17.1) из положения x_0 в положение $x=0$ также за время $[0, T_1]$. Следовательно, из $x_0 \in R(0, T)$ вытекает, что $x_0 \in R(0, T_1)$. Так как $R(0, T)$ принадлежит при любом $T \to \infty$ множеству $x^* A^{-1}(0, +\infty) x \leqslant a^2$, то это множество, таким образом, и совпадает с областью управляемости R_0.

Замечание 1. Если в системе (17.1) $F \neq 0$, то множество $R(0, T)$ будет представлять собой эллипсоид при любом достаточно большом T с центром в точке

$$\xi(T) = -\int_0^T Y^{-1} F \, dt.$$

Объединение всех таких эллипсоидов и будет давать область управляемости R_0, и, следовательно, вид этой области может оказаться весьма сложным.

Замечание 2. Предположим, что управления в системе (17.1) являются кусочно-непрерывными и что U является некоторым многогранником пространства E_r. Тогда отыскание области управляемости является довольно сложной проблемой, не решенной до настоящего времени даже в случае, когда все входящие в систему (17.1) функции являются постоянными и U представляет собой r-мерный куб с центром в точке $u=0$.

§ 18. Релейно-импульсные управления в квазилинейных системах и системах стабилизации

Пусть управляемая система описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x} = P(t) x + Q(t) u + F(t) + \mu \cdot G(t, x, u, \mu). \qquad (18.1)$$

Предположим, что элементы матриц P, Q и компоненты вектора F заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, непрерывны и ограничены. Будем считать также, что компоненты вектора G заданы при $t \geqslant 0$, $x \in E_n$, $u \in E_r$, $|\mu| < \mu_1$, вещественны, непрерывны и непрерывно дифференцируемы относительно компонент векторов x и u.

Обозначим, как и ранее, через $Y(t)$ фундаментальную систему решений для системы линейных уравнений

$$\dot{x} = P(t) x, \qquad Y(0) = E. \qquad (18.2)$$

Положим далее $B = Y^{-1} Q$. Пусть Ω — некоторая ограниченная область фазового пространства E_n. Требуется систему (18.1) из любой точки этой области перевести с помощью импульсного управления за время $[0, T]$ в конечное состояние $x=0$.

Теорема 18.1. *Если векторные функции, являющиеся столбцами матрицы B^*, линейно независимы в промежутке $[0, T]$, то можно указать положительное число μ_0 такое, что при любом значении вещественного параметра μ, $|\mu| < \mu_0$, будет существовать семейство импульсных управлений, переводящих систему (18.1) из любого начального положения $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ в конечное положение $\mathbf{x} = 0$ за время $[0, T]$.*

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать управление $u(t)$ в системе (18.1) скалярным. Тогда из условия теоремы 18.1 вытекает, что компоненты вектора $\mathbf{B}$ являются линейно независимыми функциями в промежутке $[0, T]$. А тогда можно указать в этом промежутке точки $t_1, t_2, \ldots, t_n$ такие, что векторы $\mathbf{B}_s = \mathbf{B}(t_s)$, $s = 1, 2, \ldots, n$, будут образовывать в n-мерном пространстве базис, и потому определитель матрицы, столбцами которой являются эти векторы, будет отличен от нуля.

Предположим, что задача построения импульсного управления решена. Именно, пусть существуют достаточно малые положительные числа $\tau_1, \ldots, \tau_n$ и вещественные числа $u_1, \ldots, u_n$ такие, что управление $u(t)$, решающее задачу перехода, имеет вид $u = u_j$ при $t \in [t_j, t_j + \tau_j)$. В остальных же точках промежутка $[0, T]$ $u = 0$. Так как величины $\tau_1, \ldots, \tau_n$ достаточно малы, то эти формулы определяют импульсное управление u однозначно. Подставив это управление в систему (18.1), домножив обе части слева на матрицу Y^{-1} и проинтегрировав затем в пределах от 0 до T, будем иметь

$$-\mathbf{x}_0 = \sum_{s=1}^{n}\left[\int_{t_s}^{t_s+\tau_s} \mathbf{B}(t)\,dt\cdot u_s\right] + \int_0^T Y^{-1}\cdot\mathbf{F}\,dt + \mu\int_0^T Y^{-1}\mathbf{G}\,dt. \quad (18.3)$$

Покажем теперь, что система (18.3) имеет решение при $u = 0$. Действительно, эта система при $u = 0$ будет иметь вид

$$\mathbf{x}_0 + \int_0^T Y^{-1}\mathbf{F}\,dt + \mu\int_0^T Y^{-1}\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, 0, \mu)\,dt = 0. \quad (18.4)$$

Легко видеть, что якобиан левой части (18.4), вычисленный относительно компонент вектора $\mathbf{x}_0$ при $\mu = 0$, равен 1. Уравнение (18.4) при $\mu = 0$ имеет решение $\mathbf{x}_0 = -\int_0^T Y^{-1}\cdot\mathbf{F}\,dt$; следовательно, существует такое число $\mu_2 > 0$, что при $|\mu| < \mu_2$ уравнение (18.4) будет иметь решение. Следовательно, при таких значениях μ уравнение (18.3) также имеет решение.

Вычислим теперь якобиан правой части (18.3) относительно переменных $u_1, \ldots, u_n$. Этот якобиан при $\mu = 0$ будет совпадать с

определителем матрицы, столбцами которой являются векторы

$$\int_{t_s}^{t_s+\tau_s} \mathbf{B}(t)\,dt, \quad s=1, \ldots, n.$$

Определитель этой матрицы при достаточно малых положительных величинах $\tau_1, \ldots, \tau_n$ обязательно будет отличен от нуля, как это было показано в предыдущем параграфе. Таким образом, система (18.3) будет иметь решение при любом выборе параметра μ, $|\mu| < \mu_3$.

Возьмем далее произвольное импульсное управление $\mathbf{V}$, обладающее свойством

$$\int_0^T B\mathbf{V}\,dt = 0.$$

Если построенное выше управление обозначить через $\mathbf{u}_0(\mathbf{V})$, то семейство импульсных управлений, решающих поставленную задачу, будет иметь вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{V}. \tag{18.5}$$

Если импульсное управление подчинить условию $|\mathbf{V}| < V_0$, где V_0—фиксированная положительная константа, то можно будет указать число $\mu_0 = \min\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ такое, что при всех $|\mu| < \mu_0$ управление (18.5) будет давать решение поставленной задачи.

Следует заметить, что при таком выборе управления $\mathbf{u}_0$ область Ω оказывается достаточно малой окрестностью точки $\mathbf{x}_0 = -\int_0^T Y^{-1}\cdot\mathbf{F}\,dt$, а чтобы получить управление, переводящее систему (18.1) из любой точки $\mathbf{x}_0$ наперед заданной ограниченной области Ω, достаточно заметить, что система (18.3) при $\mu = 0$ имеет решение, построенное в предыдущем параграфе для линейного случая. Этим утверждение теоремы доказано полностью.

Теорема 18.2. *Если векторные функции, являющиеся столбцами матрицы B^*, линейно независимы на промежутке $[0, T]$ и если в системе* (18.1) $\mathbf{F} = 0$, *то существуют $h > 0$ и $\mu_0 > 0$ такие, что система* (18.1) *может быть переведена из любого начального положения $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant h$ при любом $|\mu| < \mu_0$ в конечное положение $\mathbf{x} = 0$ с помощью релейно-импульсного управления за время* $[0, T]$.

Доказательство. Будем считать, что управление u в системе (18.1) является скалярной функцией. Тогда можно указать точки $t_1, t_2, \ldots, t_n$ в промежутке $[0, T]$ такие, что векторы $\mathbf{B}_s = \mathbf{B}(t_s)$ будут линейно независимы. Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_n$ —

достаточно малые положительные величины. Положим $u=u_j$ при $t\in[t_j,\ t_j+\tau_j)$, $j=1,\ \ldots,\ n$. В остальных точках промежутка $[0,\ T]$ положим $u=0$. Считаем далее, что $\tau_1,\ \ldots,\ \tau_n$ таковы, что промежутки $[t_j,\ t_j+\tau_j)$ не перекрываются. Величины u_j считаем параметрами, принимающими только два значения ± 1. Если с помощью такого релейно-импульсного управления система (18.1) может быть переведена из начального положения $\mathbf{x}_0$ в конечное положение $\mathbf{x}=0$ за время $[0,\ T]$, то необходимо будет выполняться уравнение

$$-\mathbf{x}_0=\sum_{s=1}^{n}\left[\int_{t_s}^{t_s+\tau_s}\mathbf{B}(t)\,dt\cdot u_s\right]+\mu\int_0^T Y^{-1}\mathbf{G}\,dt. \tag{18.6}$$

Система (18.6) имеет решение $\mathbf{x}_0=0$ при $\mu=0$, $\tau_s=0$, $s=1,\ \ldots,\ n$. Якобиан правых частей (18.6) по отношению к переменным $\tau_1,\ \ldots,\ \tau_n$, вычисленный при $\mu=0$, с точностью до знака совпадает с определителем матрицы, столбцами которой являются векторы $\mathbf{B}_s$, $s=1,\ \ldots,\ n$, и, следовательно, отличен от нуля. Из этого следует, что система (18.6) имеет решение при $\|\mathbf{x}_0\|<h$, $|\mu|<\mu_0$, где h и μ_0 — некоторые положительные постоянные.

Остается теперь распорядиться выбором знаков параметра так, чтобы решения (18.6), а именно $\tau_1,\ \ldots,\ \tau_n$, были неотрицательны.

Этот выбор можно осуществить, например, следующим образом. Так как векторы $\mathbf{B}_s$, $s=1,\ \ldots,\ n$, линейно независимы, то любой начальный вектор $\mathbf{x}_0$ можно разложить по этим векторам как по базису:

$$\mathbf{x}_0=\sum_{s=1}^{n}\mathbf{B}_s\cdot\theta_s, \tag{18.7}$$

где θ_s, $s=1,\ \ldots,\ n$ — некоторые вещественные числа. Положим $u_s=-\operatorname{sign}\theta_s$. Тогда (18.7) может быть представлено в форме

$$-\mathbf{x}_0=\sum_{s=1}^{n}\mathbf{B}_s\cdot\tau_{s0}\cdot u_s.$$

Здесь τ_{s0} будут уже, вообще говоря, положительными числами и будут представлять собой главную часть величин $\tau_1,\ \ldots,\ \tau_n$, рассматриваемых как функции параметра μ.

З а м е ч а н и е. Результат, аналогичный тому, который сформулирован в предыдущей теореме, имеет место для системы в режиме стабилизации. Именно, пусть

$$\dot{\mathbf{x}}=P(t)\,\mathbf{x}+Q(t)\,\mathbf{u}+\mathbf{H}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{u}), \tag{18.8}$$

где $\mathbf{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ — векторная функция, заданная при $t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in E_n$, $\mathbf{u} \in E_r$, вещественная, непрерывная и непрерывно дифференцируемая относительно компонент векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$. Будем считать также, что $\|\mathbf{H}\| \leqslant c \cdot [\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{u}\|]^2$. Система (18.6) примет в этом случае вид

$$-\mathbf{x}_0 = \sum_{s=1}^{n} \left[\int_{t_s}^{t_s+\tau_s} \mathbf{B}(t)\, dt \cdot u_s \right] + \int_0^T Y^{-1} \cdot \mathbf{H}\, dt. \tag{18.9}$$

Если предположить, что

$$\partial \mathbf{H}/\partial x_s = 0, \quad s = 1, \ldots, n,$$

при $\mathbf{x} = 0$, что соответствует тому случаю, что все члены, линейные относительно $\mathbf{x}$, уже выделены, то получим, что система (18.9) имеет решение при $\mathbf{x}_0 = 0$, $\tau_s = 0$, $s = 1, \ldots, n$. Якобиан же правых частей системы (18.9) относительно величин $\tau_1, \ldots, \tau_n$ при $\mathbf{x} = 0$, и $\tau_s = 0$, $s = 1, \ldots, n$, будет отличен от нуля. Поэтому система (18.9) при достаточно малом $\|\mathbf{x}_0\|$ будет разрешима, и, следовательно, путем выбора знаков величин u_j можно построить релейно-импульсное управление, переводящее систему (18.8) из любого начального положения $\mathbf{x}_0$, $\|\mathbf{x}_0\| < h$, в конечное положение $\mathbf{x} = 0$ за время $[0, T]$.

Рассмотрим вновь систему в режиме стабилизации и предположим, что управление стеснено некоторыми ограничениями $\mathbf{u} \in U$, где U — некоторое множество, содержащее точку $\mathbf{u} = 0$.

Определение 18.1. *Начальное состояние* $\mathbf{x}_0 \in E_n$ *и начальный момент* $t_0 > 0$ *будем называть точкой области управляемости* R, *если существует управление* $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$, *переводящее управляемую систему из положения* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ *при* $t = t_0$ *в положение* $\mathbf{x} = 0$ *при* $t = t_0 + T$.

Теорема 18.3. *Если существует достаточно малая окрестность точки* $\mathbf{x} = 0$, $\|\mathbf{x}\| < \delta$, *принадлежащая любому сечению* t *множества* R, *то множество* R *открыто и связно. Здесь под сечением множества* R *понимается совокупность всех точек* $(\mathbf{x}_0, t_0)$ *с фиксированным значением* t_0.

Доказательство. Пусть $(\mathbf{x}_0, t_0)$ — некоторая точка множества R. Тогда существует управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, заданное при $t \in [t_0, t_0 + T]$, переводящее управляемую систему из состояния $\mathbf{x}_0$ в положение $\mathbf{x} = 0$. В силу теоремы об интегральной непрерывности любое движение, начинающееся в точке $(\overline{\mathbf{x}}_0, \overline{t}_0)$, при этом же управлении переходит в точку $\overline{\mathbf{x}}$. При этом $\|\overline{\mathbf{x}}\| < \delta$, если только $\{\|\mathbf{x}_0 - \overline{\mathbf{x}}\| + |t_0 - \overline{t}_0|\} < \varepsilon$. Далее, так как δ — окрестность точки $\mathbf{x} = 0$ принадлежит любому t_0-сечению множества R, то существует управление, переводящее систему из точки $\overline{\mathbf{x}}$ в положение $\mathbf{x} = 0$ при $t \in [t_0 + T, t_0 + T + T_1]$.

Отсюда вытекает, что точка $(\overline{x_0}, \overline{t_0})$ будет непременно принадлежать множеству R, и, следовательно, R является открытым множеством. Далее, любые две точки множества R могут быть связаны между собой абсолютно непрерывной кривой, целиком принадлежащей множеству R. Действительно, из любых двух точек этого множества (x_0, t_0), $(\overline{x_0}, \overline{t_0})$ можно подходящим выбором управлений попасть на полуось $x=0$, $t>0$, и, следовательно, эти две точки могут быть соединены дугами интегральных кривых, по которым совершается переход на полуось и отрезком полуоси. Таким образом, множество R является открытым и связным.

Замечание 1. Если уравнения движения являются стационарными, то область управляемости представляет собой цилиндр, содержащий ось $x=0$, $t\in(-\infty, +\infty)$. В этом случае ограничения $t_0>0$ в определении области управляемости можно опустить и, следовательно, можно рассматривать область управляемости не в пространстве x, t, а в пространстве фазовых состояний E_n.

Замечание 2. Построение границ области управляемости для нелинейных систем является еще не решенной проблемой. Если ограничения, стесняющие управления, смягчаются, то область управляемости, вообще говоря, расширяется. Зависимость границ области управляемости от параметров, входящих в ограничения, еще не изучена.

Ниже приводится интересный пример из области самолетовождения, в котором область управляемости самолетом была расширена за счет увеличения границ, стесняющих управление.

7 октября 1916 г. военный летчик русской авиации Константин Константинович Арцеулов сделал выдающийся вклад в развитие самолетовождения. До этого момента около 20 лет авиаторов всего мира преследовал призрак смертельной опасности срыва самолета в штопор. Применение авиации в военных действиях в Первую мировую войну привело к гибели многих летчиков из-за этого явления. Солдаты-фронтовики неоднократно наблюдали, как самолет как бы останавливался в воздухе, медленно заваливался на крыло и начинал вращаться вокруг своей оси, которая в свою очередь описывала вращательное движение около некоторого направления. Стремительно приближаясь к земле, самолеты разбивались, несмотря на все старания пилотов вывести их из такого опасного режима полета. До 7.X.1916 г. ни одному из пилотов не удалось вывести самолет из штопора и лишь К. К. Арцеулов решил эту трудную проблему самолетовождения.

Рассмотрим подробнее это событие. Рассматривая самолет как твердое тело, выведем уравнения его движения. Пусть

O—некоторая неподвижная точка пространства, начало неподвижной системы координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$, оси которой направлены на неподвижные звезды. Твердое тело можно представить как систему материальных точек. Пусть $\mathbf{R}_i$—радиус-вектор относительно O i-й точки этой системы. Обозначим через G центр масс твердого тела; тогда будем иметь $R_i = R_0 + \rho_i$, где $\mathbf{R}_0$—радиус-вектор точки G, ρ_i—радиус-вектор i-й точки относительно центра масс G.

Обозначая через $\mathbf{F}_i$ совокупность всех ил, действующих на i-ю точку материальной системы, найдем

$$m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{F}_i; \tag{18.10}$$

где m_i—масса, отнесенная к i-й точке. Суммируя уравнение (18.10) по i, найдем далее

$$m\ddot{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{F}. \tag{18.11}$$

Домножая каждое из уравнений (18.10) векторно на ρ_i и суммируя по i, найдем далее

$$\frac{d}{dt}\sum_i (m_i\rho_i \times \dot{\rho}_i) = \mathbf{M}, \tag{18.12}$$

где $\mathbf{F}$—равнодействующая всех сил, приложенных к твердому телу, $\mathbf{M}$—сумма моментов этих сил, вычисленных относительно центра масс тела. Вектор ρ_i сохраняет постоянную величину. Поэтому $\dot{\rho}_i = \omega \times \rho_i$, где ω—угловая скорость тела. Отсюда уравнение (18.12) примет вид

$$\frac{d}{dt}\sum_i (m_i\rho_i \times (\omega \times \rho_i)) = \mathbf{M}.$$

Раскрывая двойное векторное произведение, найдем

$$\rho_i \times (\omega \times \rho_i) = (E\rho_i^2 - \rho_i\rho_i^*) \cdot \omega,$$

Таким образом, уравнение (18.12) может быть записано в форме

$$\frac{d}{dt}(\theta\omega) = \mathbf{M}. \tag{18.13}$$

Здесь E—единичная матрица, θ—тензор инерции, ρ_i^*—транспонированный вектор ρ_i. Таким образом, уравнение (18.11) представляет собой уравнение сил, уравнение (18.13)—уравнение моментов.

Для того чтобы провести подробную запись этих уравнений, введем в рассмотрение системы координат. Рассмотрим неподвижную систему координат $O_1\xi\eta\zeta$, в которой ось $O_1\xi$ направлена на север, ось $O_1\eta$—вертикально вверх и ось $O_1\zeta$—на восток по касательной к параллели. Точка O_1 находится на поверхности Земли на уровне моря.

Рассмотрим также связанную систему координат $Gxyz$, в которой ось Gx направлена по оси самолета к носу, Gy—в плоскости симметрии и ось Gz к правому крылу. Обозначив далее через $Gx_1y_1z_1$ поточную или скоростную систему координат. Ось Gx_1 направлена по вектору скорости $\mathbf{V}=\mathbf{R}_0$, Gy_1—перпендикулярно Gx_1 в плоскости симметрии и Gz_1—в сторону правого крыла.

Введем в рассмотрение углы, дающие связь между этими системами координат. Повернем систему $O_1\xi\eta\zeta$ вокруг оси $O_1\eta$ на угол ψ. Затем полученную систему—вокруг нового положения оси $O_1\zeta$ на угол θ и затем вокруг вновь полученного положения оси $O_1\xi$ на угол γ. Полученная система имеет оси, параллельные осям $Gxyz$. Угол ψ называется углом рыскания, угол θ—углом тангажа, а угол γ—углом крена. Если такие же повороты совершать на углы φ, θ, ν, получая в результате систему с осями, параллельными поточной системе $Gx_1y_1z_1$, этот угол φ называется курсовым углом, θ—угол траектории и ν—воздушный угол крена. При этом считается, что все вращения осуществляются в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления той оси, вокруг которой идет вращение. Далее, если спроектировать ось Gx_1 на плоскость симметрии Gxy, то получим два угла: угол между этой проекцией и осью Gx обозначим α и угол между этой проекцией и Gx_1 обозначим β; α—угол атаки, β—угол скольжения.

Запишем уравнение сил (18.11) в проекциях на поточную систему координат, считая, что вектор $\mathbf{F}$ складывается из силы тяги, силы веса и аэродинамической силы. Мы получим

$$m\dot{V}=T\cos\alpha\cos\beta-X_1-g\sin\theta_1, \qquad (18.14)$$

$$mVr_1=T\sin\alpha+Y_1-g\cos\theta\cos\nu, \qquad (18.15)$$

$$mVq_1=-T\cos\alpha\sin\beta+Z_1+g\cos\theta\sin\nu. \qquad (18.16)$$

Здесь через T обозначена величина силы тяги, g—величина силы веса, X_1—лобовое сопротивление, Y_1—подъемная сила, Z_1—боковая сила, q_1 и r_1—проекции угловой скорости ω_1, с которой вращается система $Gx_1y_1z_1$ в пространстве. Спроектируем теперь уравнение моментов на связанные оси и получим

$$A\dot{p}+(C-B)\,qr-I_{xy}(q-pr)=M_x, \qquad (18.17)$$

$$B\dot{q}+(A-C)\,pr-I_{xy}(p+qr)=M_y, \qquad (18.18)$$

$$C\dot{r}+(B-A)\,pq-I_{xy}(p^2-q^2)=M_z. \qquad (18.19)$$

Здесь A, B, C—моменты инерции соответственно относительно осей x, y, z, I_{xy}—смешанный момент инерции, M_x, M_y, M_z—проекции момента $\mathbf{M}$ на оси связанной системы, p, q, r—проекции угловой скорости системы $Gxyz$ в пространстве на эти

оси. Найдем теперь уравнение движения центра масс в системе координат $O_1\xi\eta\zeta$:

$$\dot{\xi} = V\cos\theta\cos\varphi + u_\xi,$$
$$\dot{\eta} = V\sin\theta,$$
$$\dot{\zeta} = -V\cos\theta\sin\varphi + u_\zeta.$$

Здесь через u_ξ и u_ζ обозначены составляющие скорости ветра.

Дадим вид проекции аэродинамической силы и проекций моментов.

Из аэродинамики самолета известно, что

$$X_1 = \frac{1}{2}\rho V^2 S\cdot C_{X_1}, \qquad M_x = M_1 + \frac{1}{2}\rho V^2 M_2\Delta_{\text{н}} + \frac{1}{2}\rho V^2 M_3\Delta_{\text{э}},$$

$$Y_1 = \frac{1}{2}\rho V^2 S\cdot C_{Y_1}, \qquad M_y = N_1 + \frac{1}{2}\rho V^2 N_2\Delta_{\text{н}},$$

$$Z_1 = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{Z_1}, \qquad M_z = L_1 + \frac{1}{2}\rho V^2 L_2\Delta_{\text{в}}.$$

Здесь через $\Delta_{\text{н}}$, $\Delta_{\text{э}}$, $\Delta_{\text{в}}$ обозначены углы отклонения рулей направления, элеронов, высоты.

Перейдем к анализу уравнений движения (18.14)—(18.19). Рассмотрим упрощенное уравнение (18.14). Если считать, что движение самолета происходит по вертикали вниз, то будем иметь

$$m\dot{V} = T + g - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{X_1}. \tag{18.20}$$

Будем считать в этом уравнении C_{X_1} постоянной величиной и S, как выше, площадью крыльев. Из уравнения (18.20) вытекает, что скорость V будет возрастать и ее предельное значение при постоянной тяге T будет иметь вид

$$V = \sqrt{\frac{2(T+g)}{\rho S C_{X_1}}}.$$

Следовательно, предельное значение скорости тем больше, чем больше тяга. Управляющие моменты, приложенные к самолету, возникающие от отклонения рулей направления, элеронов и высоты, пропорциональны квадрату скорости и поэтому будут тем больше, чем больше сила тяги. Для того чтобы расширить область управляемости, надо, следовательно, увеличивать скорость сближения самолета с поверхностью Земли, что и было предпринято К. К. Арцеуловым.

Обозначим через H_0 высоту, на которой происходит срыв самолета в штопор, через T_0—максимальную силу тяги. Тогда

максимальная скорость определится формулами

$$V_0 = \sqrt{\frac{2(T_0+g)}{\rho S C_{x_1}}},$$

и, следовательно, минимальное время столкновения с землей равно $t_0 = H_0/V_0$. Задача выхода из штопора может быть сформулирована теперь как задача управления. А именно, найти управление рулями высоты, направления и элеронов так, чтобы за время $[0, t_1]$ самолет из положения $\eta = H_0$ перевести в положение $\eta = H_1$, причем $t_1 < t_0$. Разумеется, что эта задача имеет решение не при всех значениях H_0, так как моменты, возникающие от рулевых органов, будут ограничены, и поэтому для каждого типа самолета имеется свое значение H_0, после которого могут существовать режимы движения, в которых столкновение с поверхностью Земли предотвратить невозможно.

§ 19. Синтез линейных инвариантных управлений

Предположим, что линейная управляемая система описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = P(t)\cdot\mathbf{x} + Q(t)\,\mathbf{u} + R(t)\cdot\boldsymbol{\gamma}, \tag{19.1}$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ — векторы размерностей n, r и k, а $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ — матрицы размерностей $n\times n$, $n\times r$ и $n\times k$ соответственно. Будем считать, что элементы матриц P, Q, R заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, непрерывны и ограничены. Пусть далее $\mathbf{x}\in E_n$ — вектор фазовых состояний, $\mathbf{u}\in E_r$ — вектор управлений и $\boldsymbol{\gamma}\in E_k$ — постоянный вектор.

Предположим, что в процессе управления системой (19.1) измеряются компоненты векторной функции

$$\mathbf{z}(t) = P_1(t)\,\mathbf{x} + Q_1(t)\,\mathbf{u} + R_1(t)\,\boldsymbol{\gamma}, \tag{19.2}$$

где $P_1(t)$, $Q_1(t)$, $R_1(t)$ — матрицы с известными элементами, являющимися вещественными функциями, заданными при $t \geqslant 0$, непрерывными и ограниченными. Будем считать, что матрицы P_1, Q_1, R_1 имеют размерности соответственно $l\times n$, $l\times r$, $l\times k$. Требуется построить управление

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}), \tag{19.3}$$

переводящее управляемую систему из любого начального фазового состояния $\mathbf{x}_0$ в момент $t=0$ в конечное состояние $\mathbf{x}=0$ в момент $t=T$. При этом требуется, чтобы управление (19.1) обладало упомянутым свойством при любом выборе компонент вектора $\boldsymbol{\gamma}$, само же, однако, от этого вектора явно не зависело. Из этой постановки задачи вытекают два вопроса, а именно, при

каких условиях существует такое управление и как найти аналитическое представление для таких управлений.

Перейдем к решению первого вопроса. Если существует какое-либо управление, переводящее систему (19.1) из начального положения x_0 в конечное положение $x=0$ за время $[0, T]$, то его можно представить в форме

$$u = B^*c + Y, \tag{19.4}$$

где $B = Y^{-1}Q$ и Y — вектор, удовлетворяющий условию ортогональности $\int_0^T BY\,dt = 0$. Здесь Y — фундаментальная система решений для системы уравнений

$$\dot{x} = Px. \tag{19.5}$$

с начальным условием $Y=E$ при $t=0$.

Подставляя (19.4) в (19.1) и затем домножая на Y^{-1} слева и интегрируя по t в пределах от 0 до T, после некоторых преобразований найдем

$$-Y^{-1}\cdot x = A(t, T)c + \varphi(t, T) + \rho(t, T)\cdot\gamma, \tag{19.6}$$

где $A(t, T) = \int_t^T BB^*\,dt$, $\varphi(t, T) = \int_t^T BV\,dt$ и $\rho(t, T) = \int Y^{-1}R\,dt$.

Будем считать, что столбцы матрицы B^* являются линейно независимыми векторными функциями в любом промежутке $[0, T]$. Тогда из (19.6) найдем

$$c = -A^{-1}\cdot[Y^{-1}x + \varphi + \rho\gamma]. \tag{19.7}$$

Подставляя (19.7) в (19.4), найдем

$$u = Mx + N, \tag{19.8}$$

где $M = -B^*A^{-1}Y^{-1}$, $N = V - B^*A^{-1}(\varphi + \rho\gamma)$.

Подставляя (19.8) в (19.1), получим систему уравнений

$$\dot{x} = P_0x + Qu_0 + R_0\gamma, \tag{19.9}$$

где $P_0 = P + QM$, $u_0 = V - B^*A^{-1}\varphi$, $R_0 = R - B^*A^{-1}\rho$.

Обозначим через Y_0 фундаментальную систему решений для системы

$$\dot{x} = P_0x \tag{19.10}$$

с начальным условием $Y_0 = E$ при $t=0$. Домножая (19.9) на Y_0^{-1} слева и интегрируя в пределах от 0 до t, получим

$$x = Y_0x_0 + Y_0\int_0^t B_0u_0\,dt + Y_0\int_0^t Y_0^{-1}R_0\,dt\cdot\gamma, \tag{19.11}$$

где $B_0 = Y_0^{-1}Q$. Исключим вектор x из (19.8) с помощью (19.11). Тогда получим

$$u = -B^*A^{-1}Y^{-1}Y_0x_0 - \left[B^*A^{-1}Y^{-1}Y_0\int_0^t Y_0^{-1}R_0\,dt + B^*A^{-1}\rho\right]\gamma -$$
$$-B^*A^{-1}Y^{-1}Y_0\int_0^t B_0u_0\,dt + V - B^*A^{-1}\varphi. \qquad (19.12)$$

Пользуясь (19.11) и (19.12), исключим фазовый вектор x и вектор управлений u из (19.2). Тогда получим

$$z = [P_1Y_0 - Q_1B^*A^{-1}Y^{-1}Y_0]\,x_0 +$$
$$+\left\{P_1Y_0\int_0^t Y_0^{-1}R_0\,dt - Q_1\left[B^*A^{-1}Y^{-1}Y_0\int_0^t Y_0^{-1}R_0\,dt + B^*A^{-1}\rho\right] + R_1\right\}\gamma +$$
$$+P_1Y_0\int_0^t B_0u_0\,dt - Q_1\left[B^*A^{-1}Y^{-1}Y_0\int_0^t B_0u_0\,dt - V + B^*A^{-1}\varphi\right]. \qquad (19.13)$$

Пользуясь теперь (19.11) и (19.13), исключим произвольные постоянные векторы x_0 и γ из (19.12). Тогда получим

$$u = \mu x + \nu z + \varkappa, \qquad (19.14)$$

где матрицы μ и ν выбраны так, чтобы после умножения (19.11) на μ и (19.13) на ν и почленного вычитания полученных результатов из (19.12) получилась формула (19.14). Таким образом,

$$\varkappa = -B^*A^{-1}Y^{-1}Y_0\int_0^t B_0u_0\,dt + V - B^*A^{-1}\varphi - \mu Y_0\int_0^t B_0u_0\,dt -$$
$$-\nu\left\{P_1Y_0\int_0^t B_0u_0\,dt - Q_1\left[B^*A^{-1}Y^{-1}Y_0\int_0^t B_0u_0\,dt - V + B^*A^{-1}\varphi\right]\right\}.$$

Обозначим через A_1, A_2, A_3 матрицы, стоящие при векторе x_0 в формулах (19.11), (19.12) и (19.13), через B_1, B_2, B_3—матрицы, стоящие в этих же формулах при векторе γ. Тогда будем иметь

$$A_2 = \mu A_1 + \nu A_3, \qquad B_2 = \mu B_1 + \nu B_3. \qquad (19.15)$$

Теорема 19.1. *Если векторные функции, образующие столбцы матрицы B^*, линейно независимы в любом промежутке $[t, T]$ и если векторы, образующие строки матриц A_2 (соответственно B_2), располагаются в подпространствах, натянутых на векторы, являющиеся строками матриц A_1, A_3 (соответственно B_1, B_3), то управление (19.3) существует и дается формулой (19.14). Следовательно, управление (19.14) переводит систему (19.1) из*

любого состояния x_0 *при* $t=0$ *в конечное состояние* $x=0$ *при* $t=T$ *при любом выборе вектора* γ.

Доказательство. Формула (19.11) дает решение системы (19.1) при управлении (19.8) и потому обладает свойством $x=x_0$ при $t=0$ и $x=0$ при $t=T$ при любом выборе вектора γ. Формула (19.12) дает значение управления (19.8) на решении (19.11), и потому, если подставить (19.11) и (19.12) в (19.1), то получим тождество. Далее это тождество будем обозначать через (19.15). Проделаем над тождеством (19.15) следующие преобразования. Умножим (19.11) на $Q\mu$, (19.13) на $Q\nu$ и вычтем почленно из (19.15) полученные результаты. Тогда находим

$$\dot{x}-Q(\mu x+\nu z)=Px+Q\varkappa+R\gamma,$$

или

$$\dot{x}=Px+Q(\mu x+\nu z+\varkappa)+R\gamma.$$

Отсюда видно, что (19.11) является также решением системы (19.1) при управлении (19.14). При этом это решение начинается в точке $x=x_0$ при $t=0$ и попадает в точку $x=0$ при $t=T$. Это обстоятельство завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим теперь общий случай. А именно, пусть заданы система

$$\dot{x}=Px+Qu+Rf \tag{19.16}$$

и система

$$z=P_1x+Q_1u+R_1f, \tag{19.17}$$

где матрицы P, Q, R, P_1, Q_1, R_1 имеют те же свойства, что и в системе (19.1), (19.2). И пусть, кроме того, векторная функция f является произвольной непрерывной векторной функцией, заданной при $t>0$, вещественной и ограниченной. Пусть f имеет размерность k. Требуется построить управление

$$u=u(t,\ x,\ z), \tag{19.18}$$

переводящее систему (19.16) из любого начального состояния в конечное состояние x_0 за время $[0,\ T]$ при любом выборе функций f.

При построении управления (19.18) естественным образом используется наряду с измеряемыми величинами, являющимися компонентами вектора z, также текущее значение компонент вектора фазового состояния x и элементы матриц P, Q, R, P_1, Q_1, R_1. Поэтому естественно считать, что векторная функция $Rf=\xi$ в процессе движения также является известной в текущий момент t. Будем считать, что значения этой функции во все моменты, предшествующие t, могут быть использованы для формирования управления (19.18). Пусть существует управление.

переводящее систему (19.16) из начального состояния x_0 в конечное состояние $x=0$ за время $[0, T]$. Тогда это управление можно представить в форме

$$u = B^* c + V, \tag{19.19}$$

где векторная функция V удовлетворяет условию $\int_0^T BV\,dt = 0$. Помножая (19.16) на матрицу Y^{-1} слева и интегрируя по t в пределах от t до T, находим

$$-Y^{-1}x = A(t,\ T)c + \int_t^T BV\,dt + \gamma - \int_0^t Y^{-1}\xi\,dt, \tag{19.20}$$

где через γ обозначен неизвестный постоянный вектор $\gamma = \int_0^T Y^{-1}\xi\,dt$. Из (19.20) и (19.19) имеем

$$c = -A^{-1}\left[Y^{-1}x + \int_t^T BV\,dt - \int_0^t Y^{-1}\xi\,dt\right], \tag{19.21}$$

$$u = M_1 x + N_1, \tag{19.22}$$

где $M_1 = -B^*A^{-1}Y^{-1}$, $N_1 = N_2 - B^*A^{-1}\gamma$ и $N_2 = V - B^*A^{-1}\times \left[\int_t^T BV\,dt - \int_0^t Y^{-1}\xi\,dt\right]$. Подставляя (19.22) в (19.16), находим

$$\dot{x} = P_0 x + QN_1 + \xi, \tag{19.23}$$

где $P_0 = P + QM_1$.

Пусть Y_0 означает фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\dot{x} = P_0 x.$$

Применяя к (19.23) формулу Коши, находим

$$x = Y_0 x_0 - Y_0 \int_0^t Y^{-1}(\tau)\,Q(\tau)\,B^*(\tau)\,A^{-1}(\tau,\ T)\,d\tau\cdot\gamma + \\ + Y_0 \int_0^t Y_0(\tau)\,Q(\tau)\,N_2(\tau)\,d\tau + Y_0 \int_0^t Y_0^{-1}(\tau)\,\xi(\tau)\,d\tau \tag{19.24}$$

Из (19.22) и (19.24) имеем далее

$$u = M_1 Y_0 x_0 - \\ - \left[M_1 Y_0 \int_0^t Y_0^{-1}(\tau)\,Q(\tau)\,B^*(\tau)\,A^{-1}(\tau,\ T)\,d\tau + B^*A^{-1}\right]\gamma + u_1(t). \tag{19.25}$$

Предположим теперь, что существует матрица σ, элементы которой заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, непрерывны и ограничены, обладающая тем свойством, что $\sigma R_1 = R$. Тогда, умножая (19.17) на матрицу σ слева и используя (19.24) и (19.25), находим

$$\sigma \mathbf{z} = \sigma (P_1 Y_0 + Q_1 M Y_0) \mathbf{x}_0 - \\ - \sigma P_1 \left\{ Y_0 \int_0^t Y_0^{-1}(\tau) Q(\tau) B^*(\tau) A^{-1}(\tau, T) d\tau + \right. \\ \left. + Q_1 \left[M_1 Y_0 \int_0^t Y_0^{-1}(\tau) Q(\tau) B^*(\tau) A^{-1}(\tau, T) d\tau + B^* A^{-1} \right] \right\} \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{z}_1. \tag{19.26}$$

Теорема 19.2. *Пусть*: 1) *векторные функции, являющиеся столбцами матрицы* B^*, *линейно независимы в любом промежутке* $[t, T]$, 2) *существует матрица* σ *такая, что* $\sigma R_1 = R$, 3) *векторы, стоящие в строках матриц при* $\mathbf{x}_0$ (*соответственно* $\boldsymbol{\gamma}$) *в формуле* (19.25), *являются линейными комбинациями строк соответствующих матриц, стоящих при* $\mathbf{x}_0$ *и* $\boldsymbol{\gamma}$ *в формулах* (19.24) *и* (19.26).

Тогда существует управление (19.18), *и оно представимо в форме*

$$\mathbf{u} = \mu_1 \mathbf{x} + \nu_1 \sigma \mathbf{x} + \varkappa_1. \tag{19.27}$$

Доказательство. Если в (19.16) подставить (19.24) и (19.25), то получаем тождество. Если домножить теперь (19.24) на μ_1, (19.26) на $\nu_1 \sigma$ и затем на матрицу Q слева и вычесть полученный результат почленно из упомянутого выше тождества, то получим, что (19.24) удовлетворяет также уравнению (19.16) при управлении (19.27). При этом из вида (19.24) можно заключить, что $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ при $t = 0$ и $\mathbf{x} \to 0$ при $t \to T$ при любом выборе векторной функции $\mathbf{f}$. Здесь μ_1 и ν_1 — те матрицы, которые выражают линейную зависимость, упомянутую в пункте 3) теоремы 19.2. Этим теорема доказана полностью.

§ 20. Построение инвариантных управлений в квазилинейных системах и нелинейных системах в режиме стабилизации

Предположим, что управляемая система описывается квазилинейной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = P\mathbf{x} + Q\mathbf{u} + R\boldsymbol{\gamma} + \mu \mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}). \tag{20.1}$$

Будем считать, что элементы матриц P, Q, R заданы при $t > 0$, вещественны, непрерывны и ограничены. Векторная функция $\mathbf{G}$

задана при $\mathbf{x}\in E_n$, $\mathbf{u}\in E_r$ $\gamma\in E_k$, $t\geqslant 0$, вещественна, непрерывна и непрерывно дифференцируема по компонентам векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, γ, где $\mathbf{x}$ — вектор фазового состояния системы, $\mathbf{u}$ — вектор управлений и γ — произвольный постоянный вектор.

Пусть в процессе управления системой (20.1) измеряются компоненты вектора

$$\mathbf{z}=P_1\mathbf{x}+Q_1\mathbf{u}+R_1\gamma+\mu\mathbf{G}_1(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mu). \tag{20.2}$$

Будем считать, что элементы матриц P_1, Q_1, R_1 и компоненты вектора $\mathbf{G}_1$ обладают свойствами, аналогичными перечисленным выше для матриц P, Q, R и компонент вектора $\mathbf{G}$. Будем считать, что вектор $\mathbf{z}$ имеет размерность k. Параметр μ, входящий в (20.1) и (20.2), считаем малым.

Требуется найти управление

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t,\ \mathbf{x},\ z,\ \mu), \tag{20.3}$$

переводящее систему (20.1) из любого начального состояния $\mathbf{x}_0\in\Omega_n$ в конечное состояние $\mathbf{x}=0$ за время $[0,\ T]$ при любом выборе вектора $\gamma\in\Omega_k$, где Ω_n и Ω_k — ограниченные области соответственно в E_n и E_k. При этом требуется, чтобы управление (20.3) не зависело от компонент вектора γ явным образом.

Пусть существует управление, переводящее систему (20.1) из начального состояния $\mathbf{x}_0$ в конечное состояние $\mathbf{x}=0$ за время $[0,\ T]$. Тогда это управление можно представить в форме

$$\mathbf{u}=B^*\mathbf{c}+\mathbf{V}, \tag{20.4}$$

где

$$\int_0^T B\mathbf{V}\,dt=0.$$

Здесь матрица B, как и ранее, определяется формулой $B=Y^{-1}Q$ и Y — фундаментальная система решений для линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}=P\mathbf{x} \tag{20.5}$$

с начальным условием $Y=E$ при $t=0$.

Будем далее считать, что векторная функция $\mathbf{V}$ непрерывна и $\mathbf{V}\in\Omega_r$, где Ω_r — ограниченная область пространства E_r. Подставляя (20.4) в (20.1) и затем домножая на Y^{-1} слева и интегрируя в пределах от 0 до T, находим

$$-\mathbf{x}_0=A(0,\ T)\,\mathbf{c}+\int_0^T Y^{-1}R\,dt\cdot\gamma+\mu\int_0^t Y^{-1}\mathbf{G}\,dt, \tag{20.6}$$

где через $A(t,\ T)$, как и ранее, обозначена матрица $\int_t^T BB^*\,dt$.

Будем считать, что матрица $A(0,\ T)$ — неособая.

Система (20.6) при $\mu=0$ имеет решение

$$\mathbf{c}=-A^{-1}(0, T)\cdot\left(\mathbf{x}_0+\int_0^T Y^{-1}R\,dt\cdot\gamma\right).$$

Далее якобиан правых частей уравнений (20.6), вычисленный по отношению к компонентам вектора $\mathbf{c}$ при $\mu=0$, совпадает с определителем матрицы $A(0, T)$ и, следовательно, отличен от нуля. Отсюда вытекает, что система (20.6) определяет неявную векторную функцию

$$\mathbf{c}=\mathbf{c}(\mathbf{x}_0, \mu, \gamma, \mathbf{V}). \tag{20.7}$$

Управление (20.4) при условии (20.7) будет определять при заданном $\mathbf{x}_0$ движение системы (20.1), заданное на промежутке $[0, T]$ при достаточно малых μ. Это движение в силу (20.6) обязательно будет обладать свойством $\mathbf{x}\to\mathbf{0}$ при $t\to T$. Обозначим это движение через

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \gamma, \mu). \tag{20.8}$$

Подставляя (20.8), (20.4) и (20.7) в (20.2), получим также

$$\mathbf{z}=\mathbf{z}(t, \mathbf{x}_0, \gamma, \mu). \tag{20.9}$$

Теорема 20.1. *Если векторные функции, являющиеся столбцами матрицы B^*, линейно независимы и если якобиан правых частей* (20.8), (20.9) *по отношению к компонентам векторов* $\mathbf{x}_0$ *и* γ *отличен от нуля при* $\mu=0$, *то существует управление* (20.3), *переводящее систему* (20.1) *из любого начального состояния* $\mathbf{x}_0\in\Omega_n$ *в конечное состояние* $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ *за время* $[0, T]$ *при любом выборе вектора* $\gamma\in\Omega_k$ *и вектора* $\mathbf{V}\in\Omega_r$.

Доказательство. Подставим (20.8), (20.4) и (20.7) в (20.1). Тогда получим тождество. Далее из уравнений (20.8) и (20.9) выразим векторы γ и $\mathbf{x}_0$:

$$\mathbf{x}_0=\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \mu), \qquad \gamma=\gamma(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \mu). \tag{20.10}$$

Пользуясь (20.10), исключим величины $\mathbf{x}_0$ и γ из (20.7). Тогда это управление примет вид (20.8), и упомянутое выше тождество будет связывать (20.8) и (20.3). Следовательно, (20.8) будет являться решением системы (20.1) при управлении (20.3). Этим теорема доказана полностью.

Замечание. Так как якобиан функций (20.8), (20.3) по компонентам векторов $\mathbf{x}_0$ и γ при $\mu=0$ совпадает с аналогичным якобианом для системы (20.1) при $\mu=0$, то теорема 20.1 может быть сформулирована следующим образом.

Если проблема построения инвариантных управлений разрешима для линейной системы, то она также разрешима для квазилинейной системы (20.1).

§ 21. Синтез линейных управлений с последействием

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = P(t)\mathbf{x} + Q(t)\mathbf{u} + \mathbf{f}(t). \tag{21.1}$$

Будем считать, что элементы матриц P и Q и компоненты вектора $\mathbf{f}$ заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, непрерывны и ограничены. Пусть требуется построить управление

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t-\tau)) \tag{21.2}$$

и начальную функцию

$$\mathbf{x} = \varphi \tag{21.3}$$

при $t \in [0, \tau]$, так, чтобы система (21.1) имела при начальной функции (21.3) и управлении (21.2) решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$, обладающее свойством

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \quad \text{при} \quad t = 0, \quad \mathbf{x} = 0 \quad \text{при} \quad t = T. \tag{21.4}$$

Здесь τ — запаздывание, $T > \tau > 0$. Если подставить управление (21.2) в систему (21.1), то получим систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Для того чтобы построить решение такой системы, необходимо задать начальную функцию (21.3). Тогда решение системы (21.1) на следующем промежутке $t \in [\tau, 2\tau]$ будет определяться как решение системы уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = P(t)\mathbf{x} + Q(t)\mathbf{u}(t, \varphi(t-\tau)) + \mathbf{f}(t)$$

с начальным условием $\mathbf{x} = \varphi(\tau)$ при $t = \tau$.

Действуя аналогичным образом, можно построить решение системы (21.1) при управлении (21.2) на любом интервале $[k\tau, (k+1)\tau]$, $k = 2, 3, 4, \ldots$ и, следовательно, построить решение системы (21.1) при уравнении (21.2) на всем промежутке $[0, T]$.

Если существует управление, переводящее систему (21.1) из любого начального состояния $\mathbf{x}_0$ в положение $\mathbf{x} = 0$ за время $[0, T]$, то его можно представить в форме

$$\mathbf{u} = B^*\mathbf{c} + \mathbf{V}, \tag{21.5}$$

где векторная функция $\mathbf{V}$ удовлетворяет условию

$$\int_0^T B\mathbf{V}\, dt = 0.$$

Матрица B определяется соотношением $B = Y^{-1}Q$. Здесь Y — фундаментальная система решений системы линейных уравнений $\dot{\mathbf{x}} = P\mathbf{x}$ с начальным условием $Y = E$ при $t = 0$.

Подставляя (21.5) в (21.1) и домножая затем слева на Y^{-1}, а затем интегрируя по t один раз в пределах $[0, T]$, другой раз в пределах $[t, T]$, находим

$$-\mathbf{x}_0 = A(0, T)\,\mathbf{c} + \int_0^T Y^{-1}\mathbf{f}\,dt, \tag{21.6}$$

$$-Y^{-1}\mathbf{x} = A(t, T)\,\mathbf{c} + \int_t^T B\mathbf{V}\,dt + \int_t^T Y^{-1}\mathbf{f}\,dt. \tag{21.7}$$

Здесь $A(t, T)$ есть матрица $\int_t^T BB^*\,dt$.

Из (21.6) и (21.7) имеем далее

$$\mathbf{x} = YA(t, T)\,A^{-1}(0, T)\,\mathbf{x}_0 - Y\int_t^T B\mathbf{V}\,dt. \tag{21.8}$$

Заметим, что формула (21.8) дает решение системы (21.1) при управлении (21.5), причем это решение обладает свойством (21.4). Заменим в (21.7) t на $t-\tau$ и исключим затем с помощью (21.7) постоянный вектор $\mathbf{c}$ из управления (21.5). Тогда получим

$$\mathbf{u} = M\mathbf{x}(t-\tau) + \mathbf{N}, \tag{21.9}$$

где

$$M = -B^*(t)\,A^{-1}(t-\tau, T)\,Y^{-1}(t-\tau),$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{V} - B^*(t)\,A^{-1}(t-\tau, T)\left[\int_{t-\tau}^T B\mathbf{V}\,dt + \int_{t-\tau}^T Y^{-1}\mathbf{f}\,dt\right].$$

Теорема 21.1. *Если векторные функции, являющиеся столбцами матрицы* B^*, *линейно независимы на любом промежутке* $[t, T]$, $t \in [0, T-\tau]$, *то существуют начальная функция* (21.3) *и управление* (21.2) *такие, что система* (21.1) *будет переходить из любого начального состояния* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ *в конечное состояние* $\mathbf{x} = 0$ *за время* $[0, T]$. *При этом начальная функция определяется формулой* (21.8), *управление*—(21.9).

Доказательство. Теорема 21.1 будет доказана, если установить, что система (21.1) при управлении (21.9) и начальной функции (21.8) будет иметь решение, обладающее свойством (21.4).

Из (21.7) имеем

$$\mathbf{x} = -YA(t, T)\,\mathbf{c} - Y\int_t^T B\mathbf{V}\,dt - Y\int_t^T Y^{-1}\mathbf{f}\,dt. \tag{21.10}$$

Если подставить в систему (21.1) управление (21.5) и векторную функцию (21.10), то получим тождество. Если теперь в этом

тождестве исключить величину c, входящую в управление (21.5), выразив ее из (21.10) после замены t на $t-\tau$, то получим вновь тождество, которое будет связывать векторную функцию (21.10) и управление (21.9). Если теперь постоянный вектор c исключить из (21.10), используя (21.6), то получим векторную функцию (21.8). Таким образом, полученное тождество будет связывать векторную функцию (21.8) и управление (21.9).

Из этого можно заключить, что (21.8) есть решение системы (21.1) при управлении (21.9). По способу построения это решение обладает свойством (21.4), откуда вытекает доказательство теоремы.

Рассмотрим теперь тот случай, когда измеряется не весь фазовый вектор $\mathbf{x}(t)$, а лишь некоторые линейные комбинации его компонент, вычисленные, вообще говоря, в различные моменты времени. В общем случае такие измерения можно представить в форме

$$\mathbf{z}=\int_{-\tau}^{0}[dR(t,\vartheta)]\,\mathbf{x}(t+\vartheta), \qquad (21.11)$$

где $R(t,\vartheta)$ — матрица размерности $n\times n$, элементы которой есть функции ограниченной вариации относительно $\vartheta\in[-\tau, 0]$ и непрерывные функции по t, заданные при $t\geqslant 0$.

Элементы матрицы $R(t,\vartheta)$ будем считать вещественными и ограниченными. Обозначим через H матрицу

$$H=\int_{-\tau}^{0}[dR(t,\vartheta)]\,Y(t+\vartheta)\,A(t+\vartheta, T). \qquad (21.12)$$

Здесь, как и выше, интегрирование ведется по ϑ в пределах $[-\tau, 0]$, и интеграл понимается в смысле Стилтьеса.

Теорема 21.2. *Если векторные функции, стоящие в столбцах матрицы B^*, линейно независимы на промежутке $[0, T]$ и матрица H — неособая при $t\in[\tau, T]$, то система (21.1) из любого начального состояния $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ может быть переведена в конечное состояние $\mathbf{x}=0$ за время $[0, T]$ с помощью начальной функции (21.3), определяемой формулой (21.8) и управления*

$$\mathbf{u}=M_1\int_{-\tau}^{0}[dR(t,v)]\,\mathbf{x}(t+v)+\mathbf{N}_1.$$

Доказательство. Заменим в (21.10) t на $t+\vartheta$ и подставим в (21.11); тогда получим

$$\mathbf{z}=-H\mathbf{c}-\int_{-\tau}^{0}[dR(t,\vartheta)]\,Y(t+\vartheta)\int_{t+\vartheta}^{T}(B\mathbf{V}+Y^{-1}\mathbf{f})\,dt. \qquad (21.13)$$

Из (21.13) и (21.5) имеем

$$\mathbf{u} = M_1 z + \mathbf{N}_1, \tag{21.14}$$

где

$$M_1 = -B^* H^{-1},$$

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{V} - B^* H^{-1} \int_{-\tau}^{0} [dR(t, \vartheta)] Y(t+\vartheta) \int_{t+\vartheta}^{T} (B\mathbf{V} + Y^{-1}\mathbf{f})\, dt.$$

Покажем теперь, что система (21.1) при управлении (21.14) и начальной функции (21.3), определяемой формулой (21.8), будет иметь решение, обладающее свойством (21.4).

Действительно, если подставить (21.10) и (21.5) в систему (21.1), то получим тождество. Если в этом тождестве исключить c, входящее в управление u, с помощью (21.13), а вектор c, входящий в (21.10), с помощью (21.6), тогда получим, что (21.8) будет решением системы (21.1) при управлении (21.14). Далее решение (21.8) обладает свойством (21.4). Таким образом, теорема доказана полностью.

Пусть измеряется величина

$$\xi = R(t)\,\mathbf{x}(t). \tag{21.15}$$

Возникает вопрос, при каких условиях можно указать начальную функцию (21.3) и управление, построенное лишь с помощью измерений (21.15), так, чтобы система (21.1) при этой начальной функции и управлении имела решение, обладающее свойством (21.4).

Ответ на этот вопрос можно дать с помощью теоремы 21.3. Положим

$$\beta = R(t)\, Y(t)\, A(t, T). \tag{21.16}$$

Теорема 21.3. *Если векторные функции, стоящие в столбцах матрицы B^*, линейно независимы на промежутке $[0, T]$ и если существует число $T > \tau > 0$ такое, что столбцы матрицы β линейно независимы на любом промежутке $[t-\tau, t]$, то можно указать начальную функцию* (21.3) *и управление*

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} M_j \mathbf{x}(t - \tau_j(t)) + \overline{\mathbf{N}}$$

такие, что система (21.1) *будет иметь решение, обладающее свойством* (21.4).

Доказательство. Так как матрица $A(0, T)$ неособая, то решение (21.8) существует, и потому его можно будет взять в качестве начальной функции (21.3). Из линейной независимости столбцов матрицы β на промежутке $[t-\tau, t]$ вытекает существование точек этого промежутка $t-\tau_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, таких.

что среди строк матриц $\beta(t-\tau_j(t))$ имеются n линейно независимых при любом t. Здесь $\tau_j(t)$ можно считать непрерывными функциями от t, удовлетворяющими ограничениям $0<\tau_j(t)<\tau$.

Из линейной независимости вытекает тогда, что матрица

$$\bar{\beta}(t)=\sum_{j=1}^{n}\beta^*(t-\tau_j)\,\beta(t-\tau_j)$$

будет неособой. Заменим в (21.15) t на $t-\tau_j(t)$ и аналогичную замену проведем в (21.10) и исключим затем из полученных соотношений вектор $\mathbf{x}$. Домножая слева полученное равенство на $\beta^*(t-\tau_j(t))$ и суммируя затем по j от 1 до n, найдем

$$\sum_{j=1}^{n}\beta^*(t-\tau_j(t))\,\xi(t-\tau_j(t))=$$
$$=-\bar{\beta}\mathbf{c}-\sum_{j=1}^{n}\beta^*(t-\tau_j(t))\,R(t-\tau_j(t))\,Y(t-\tau_j(t))\int\limits_{t-\tau_j(t)}^{T}(B\mathbf{V}-Y^{-1}\mathbf{f})\,dt. \tag{21.17}$$

Из (21.17) найдем постоянный вектор $\mathbf{c}$ и затем исключим его из управления (21.5). Тогда получим управление

$$\mathbf{u}=\sum_{j=1}^{n}M_j\mathbf{x}(t-\tau_j(t))+\bar{\mathbf{N}}. \tag{21.18}$$

Остается установить, что при управлении (21.18) и начальной функции (21.3), определяемой равенством (21.8), система (21.1) будет иметь решение, обладающее свойством (21.4).

Доказательство этого факта осуществляется тем же способом, что и в теореме 21.2, так как управление (21.18) может быть записано также через интеграл Стилтьеса.

Рассмотрим один пример применения развитой выше теории к задаче распределения капиталовложений по отраслям. Пусть имеется n отраслей, количественная характеристика которых определяется на текущий момент t величинами $x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)$. Если обозначить через $u_s(t)$ скорость прироста капиталовложений в отрасль s, отнесенную к моменту t, и если через $b_s(t)$ обозначить коэффициент, характеризующий прирост отрасли s на единицу капитала, тогда получим уравнения развития отраслей

$$dx_s/dt=b_s u_s,\quad s=1,\ \ldots,\ n. \tag{21.19}$$

Будем считать, что выделение капиталовложений в каждую из отраслей в текущий момент t осуществляется из общего количества

$$\sum_{s=1}^{n}u_s(t)=u(t). \tag{21.20}$$

Если обозначить объем капиталовложений к моменту t во все отрасли через $x(t)$, то будем иметь

$$\dot{x} = u(t). \tag{21.21}$$

Пусть задано начальное состояние отраслей $x_s = x_{s0}$ при $t = t_0$ и конечное состояние отраслей $x_s = x_{s1}$ при $t = t_0 + T$, $s = 1, \ldots, n$. Здесь t_0—начальный момент периода планирования, T—период, на который планируется распределение капиталовложений. Требуется распределить капиталовложение таким образом, чтобы все отрасли, развиваясь из начального состояния, достигли к концу планируемого периода заданных уровней.

Перейдем к решению поставленной задачи. Будем искать функции u_s в виде

$$u_s = b_s c_s + V_s, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{21.22}$$

где $\int\limits_{t_0}^{t_0+T} b_s V_s \, dt = 0$. Подставляя (21.22) в (21.19) и интегрируя в пределах от t_0 до $t_0 + T$, а также в пределах от t до $t + T$, найдем

$$\frac{x_{s1} - x_{s0}}{\int\limits_{t_0}^{t_0+T} b_s^2 \, dt} = c_s, \tag{21.23}$$

$$\frac{x_{s1} - x_s(t) - \int\limits_{t}^{t_0+T} b_s V_s \, dt}{\int\limits_{t}^{t_0+T} b_s^2 \, dt} = c_s. \tag{21.24}$$

Подставляя (21.23) и (21.24) в (21.22), найдем

$$u_s = \frac{b_s (x_{s1} - x_{s0})}{\int\limits_{t}^{t_0+T} b_s^2 \, dt} + V_s, \tag{21.25}$$

$$u_s = \frac{b_s (x_{s1} - x_s(t))}{\int\limits_{t}^{t_0+T} b_s^2 \, dt} + V_s. \tag{21.26}$$

Обозначим через $u_0(t)$ величину

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{b_s (x_{s1} - x_{s0})}{\int\limits_{t_0}^{t_0+T} b_s^2 \, dt} = u_0. \tag{21.27}$$

Если выделение капиталовложений осуществляется в соответствии с найденным законом (21.25), то цель, поставленная перед планом развития отраслей, может быть достигнута. При этом суммарные капиталовложения, необходимые и достаточные для такого развития, определяются формулой

$$x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_0+T} u_0\,dt. \tag{21.28}$$

Формула (21.28) получится после подстановки (21.27) в (21.21) и последующего интегрирования по промежутку $[t_0, t_0+T]$. Заметим, что выделения капиталовложений на самом деле могут осуществляться не по закону (21.27), а по закону $u(t)$. Обозначим тогда $V = u(t) - u_0$. Для того чтобы цель развития была осуществима, необходимо, чтобы суммарные капиталовложения определялись формулой (21.28). Следовательно, обязательно должно быть $\int_{t_0}^{t_0+T} V\,dt = 0$. Рассмотрим теперь значения функций V_s. Эти функции должны удовлетворять при любом плане распределения, решающем основную задачу развития, следующим условиям: 1) $\int_{t_0}^{t_0+T} b_s V_s = 0$; 2) функции (21.25) принимают неотрицательные значения; это означает, что каждая из отраслей имеет тенденцию лишь к возрастанию $V_s \geqslant -\frac{b_s(x_{s1}-x_{s0})}{\int_{t_0}^{t_0+T} b_s^2\,dt}$; 3) Из условий (21.20) и (21.27) получим

$$\sum_{s=1}^{n} V_s = V \quad \text{и} \quad \int_{t_0}^{t_0+T} V\,dt = 0.$$

Если в выражении (21.25) функции V_s выбраны при соблюдении этих трех условий, то эти выражения дают план распределения капиталовложений по всем отраслям. При выполнении этого плана все отрасли достигнут к концу периода планирования заданных состояний развития. Формулы (21.26) дают распределение капиталовложений по отраслям в зависимости от текущих состояний этих отраслей. Заметим, что на текущий момент t состояние отраслей известно, вообще говоря, вследствие запаздывания обработки информации, лишь с некоторым запаздыванием τ. Если в (21.23) заменить t на $t-\tau$ и затем, пользуясь этими выражениями, исключить величины c_s из (21.22), то

получим окончательно

$$u_s(t) = b_s(t) \frac{x_{s1} - x_s(t-\tau) - \int\limits_{t-\tau}^{t_0+T} b_s V_s\, dt}{\int\limits_{t-\tau}^{t_0+T} b_s^2\, dt} + V_s(t). \qquad (21.29)$$

В соответствии с этим планом распределения капитальных вложений развитие отраслей будет определяться уравнениями

$$\dot{x}_s(t) = b_s^2(t) \frac{x_{s1} - x_s(t-\tau) - \int\limits_{t-\tau}^{t_0+T} b_s V_s\, dt}{\int\limits_{t-\tau}^{t_0+T} b_s^2\, dt} + b_s(t) V_s(t). \quad (21.30)$$

Формулы (21.29) дают план распределения, и формулы (21.30) дают уравнения развития отраслей в зависимости от известного состояния отраслей на момент $t-\tau$. В первоначальный период развития $t \in [t_0, t_0+\tau]$ планирование капиталовложений должно осуществляться по формулам (21.23).

Выше были найдены всевозможные планы распределения капиталовложений, обеспечивающие выполнение основной цели развития отраслей. Было показано также, что таких планов существует целое множество, зависящее от всевозможного выбора функций $V_1, \ldots, V_n$, стесненных ограничениями 1), 2), 3).

Далее из множества вариантов этих планов с помощью выбора функций $V_1, \ldots, V_n$ можно выбирать план, наилучший в том или ином смысле.

Вопросы построения оптимальных управлений по отношению к тем или иным критериям будут рассмотрены ниже. Здесь укажем на возможность выбора функций $V_1, \ldots, V_n$ таким образом, чтобы обеспечить решение задачи развития отраслей при условии, когда задаются также количественные уровни развития внутри промежутка планирования.

Предположим, что задана последовательность чисел $t_1 > t_0$, $t_2 > t_1, \ldots, t_{l+1} > t_l$, $t_{l+1} = t_0 + T$, и пусть заданы состояния отраслей

$$x_s(t_j) = \xi_{sj}, \quad s = 1, \ldots, k; \quad j = 1, \ldots, l. \qquad (21.31)$$

Разумеется, что условия развития отраслей (21.31) можно реализовать, вообще говоря, путем выбора функций $V_1, \ldots, V_n$.

Предположим, что функции V_s, $s = 1, \ldots, k$, кусочно-постоянны. Подставим (21.22) в (21.19) и проинтегрируем полученные

выражения по t в пределах $[t_j, t_{j+1}]$. Тогда будем иметь

$$\xi_{sj+1}-\xi_{sj}=\int_{t_j}^{t_{j+1}} b_s^2\,dt\cdot c_s+\int_{t_j}^{t_{j+1}} b_s V_s\,dt,\quad s=1,\ \ldots,\ k. \tag{21.32}$$

Отсюда

$$V_s=\frac{\xi_{s_{j+1}}-\xi_{s_j}-\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} b_s^2\,dt\,(x_{s1}-x_{s0})\left(\int\limits_{t_0}^{t_0+T} b_s^2\,dt\right)^{-1}}{\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} b_s\,dt}. \tag{21.33}$$

Если значения функций V_s в (21.29) выбрать в соответствии с функцией (21.33), то получим план распределения капиталовложений, обеспечивающих выполнение условий (21.31).

§ 22. Построение управлений с запаздываниями в нелинейных системах

Рассмотрим сначала квазилинейную систему

$$\dot{\mathrm{x}}=P(t)\,\mathrm{x}+Q(t)\,\mathrm{u}+\mathrm{f}(t)+\mu\mathrm{G}(\mathrm{x},\ t,\ \mathrm{u}). \tag{22.1}$$

Будем считать, что компоненты векторной функции G заданы при $t\geqslant 0$, $\mathrm{u}\in E_r$, $\mathrm{x}\in E_n$, вещественны, непрерывны и имеют непрерывные производные относительно компонент векторов u и x. Матрицы P, Q и вектор f будем предполагать обладающими теми же свойствами, что и в § 21.

Предположим, что требуется найти условия, при которых существуют управление

$$\mathrm{u}=\mathrm{u}(t,\ \mathrm{x}(t-\tau)) \tag{22.2}$$

и начальная функция

$$\mathrm{x}=\varphi(t) \tag{22.3}$$

при $t\in[0,\ \tau]$ такие, что система (22.1) имеет решение $\mathrm{x}=\mathrm{x}(t,\ \mathrm{x}_0)$, обладающее свойством

$$\mathrm{x}=\mathrm{x}_0\ \text{ при }\ t=0,\qquad \mathrm{x}=0\ \text{ при }\ t=T. \tag{22.4}$$

Если управление (22.2) и начальная функция (22.3) существуют, то возникает естественный вопрос о фактическом отыскании векторной функции $\mathrm{u}(t,\ \mathrm{x}(t-\tau))$ и $\varphi(t)$.

Теорема 22.1. *Если выполнены условия теоремы* 21.2, *то существует управление* (22.2) *и начальная функция* (22.3) *такие, что система* (22.1) *при управлении* (22.2) *и начальной функции* (22.3) *будет иметь решение, обладающее свойством* (22.4).

Доказательство. Будем искать управление в форме

$$u = B^*c + V, \tag{22.5}$$

$B = Y^{-1}Q$, где Y — фундаментальная система решений для системы уравнений $\dot{x} = Px$, векторная функция V удовлетворяет условию ортогональности:

$$\int_0^T BV\,dt = 0.$$

Подставим управление (22.5) в систему (22.1), затем домножим эту систему на матрицу Y^{-1} слева и проинтегрируем один раз в пределах от 0 до T, а другой — от t до T. Тогда получим

$$-x_0 = A(0,\ T)c + \int_0^T Y^{-1}(f + \mu G)\,dt, \tag{22.6}$$

$$-Y^{-1}x = A(t,\ T)c + \int_t^T BV\,dt + \int_t^T Y^{-1}(f + \mu G)\,dt. \tag{22.7}$$

Предположим теперь, что начальное состояние x_0 и векторная функция V, входящая в управление (22.5), удовлетворяют условиям $x_0 \in \Omega_n$, $V \in \Omega_r$, где Ω_n и Ω_r — ограниченные области пространств E_n (соответственно E_r). Якобиан правых частей (22.6), вычисленный относительно компонент вектора c при $\mu = 0$, совпадает с определителем матрицы $A(0,\ T)$; следовательно, система (22.6) определяет неявную функцию

$$c = c(x_0,\ \mu) \tag{22.8}$$

при $x_0 \in \Omega_n$, $|\mu| < \mu_0$, где μ_0 — некоторая положительная постоянная.

Пользуясь (22.8), вектор c можно исключить из (22.7). Тогда из (22.7) можно определить векторную функцию

$$x = x(t,\ x_0,\ \mu), \tag{22.9}$$

и эта векторная функция будет обладать свойством (22.4). Доказательство существования функции (22.9) можно провести методом последовательных приближений, применяя этот метод к интегральному уравнению (22.7). Далее при достаточно малых μ формулу (22.9) можно обратить, а именно, выразить вектор x_0 через входящие в формулу (22.9) параметры

$$x_0 = \xi(t,\ x(t),\ \mu). \tag{22.10}$$

Обращение формулы (22.9) оказывается возможным, так как якобиан правой части, вычисленный относительно компонент по x_0 при

$\mu = 0$, совпадает с определителем матрицы $Y(t) A(t, T) A^{-1}(0, T)$ и, следовательно, отличен от нуля при $t \in [0, T]$. Заменим в (22.10) t на $t-\tau$ и затем исключим вектор $\mathbf{x}_0$, пользуясь (22.10), из (22.8), а затем исключим, пользуясь (22.8), вектор $\mathbf{c}$ в управлении (22.5). Тогда получим

$$\mathbf{u} = B^*(t)\, \mathbf{c}(\xi(t-\tau, \mathbf{x}(t-\tau), \mu), \mu) + \mathbf{V} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t-\tau)). \quad (22.11)$$

Если в систему (22.1) подставить управление (22.5) и исключить затем с помощью (22.8) вектор $\mathbf{c}$, то получим систему уравнений, которой будет тождественно удовлетворять функция (22.9). Если в получающемся тождестве вектор $\mathbf{x}_0$, входящий в управление $\mathbf{u}$, заменить на функцию ξ после замены в ней t на $t-\tau$, то получим, что (22.9) является также решением системы (22.1) при управлении (22.11). Естественно, что начальной функцией будет при этом $\varphi = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mu)$, $t \in [0, \tau]$. Так как (22.9) удовлетворяет свойству (22.4), то этим теорему 22.1 можно считать доказанной полностью.

Предположим теперь, что измеряются компоненты вектора $\mathbf{z}$, и пусть эти измерения определяются формулами

$$\mathbf{z} = \int_{-\tau}^{0} [dR(t, \vartheta)]\, \mathbf{x}(t+\vartheta) + \mu \int_{-\tau}^{0} [dR_1(t, \vartheta)]\, \mathbf{G}_1(t+\vartheta, \mathbf{x}(t+\vartheta), \mathbf{u}); \quad (22.12)$$

будем считать, что элементы матриц $R(t, \vartheta)$ и $R_1(t, \vartheta)$ являются непрерывными функциями относительно t, заданными при $t \geqslant 0$, и функциями ограниченной вариации относительно ϑ, заданными при $\vartheta \in [-\tau, 0]$. Интегрирование в формуле (22.12) понимается в смысле Стилтьеса и производится по параметру ϑ.

Теорема 22.2. *Если выполнены условия теоремы* 21.2, *то существуют управление*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{z}, \mu) \quad (22.13)$$

и начальная функция

$$\mathbf{x} = \varphi(t), \quad t \in [0, \tau] \quad (22.14)$$

такие, что система (22.1) *при управлении* (22.13) *и начальной функции* (22.14) *имеет решение, обладающее свойством* (22.4).

Доказательство. При доказательстве теоремы 22.2 будем предполагать, что компоненты векторной функции $\mathbf{G}_1$ непрерывно дифференцируемы относительно компонент вектора $\mathbf{x}$ и что в остальном обладают теми же свойствами, что и компоненты векторной функции $\mathbf{G}$. Подставим (22.9) в (22.12). Якобиан правых частей в полученной формуле, вычисленный относительно компонент вектора $\mathbf{x}_0$ при $\mu = 0$, отличен от нуля, так как условия теоремы 21.2 выполнены. Следовательно, можно выразить

вектор $\mathbf{x}_0$ из (22.12) и (22.9) по формуле

$$\mathbf{x}_0 = \eta(t, \mathbf{z}, \mu). \tag{22.15}$$

Пользуясь (22.15), исключим вектор $\mathbf{x}_0$ в (22.8) и затем исключим вектор $\mathbf{c}$, пользуясь (22.8), из управления (22.5). Тогда получим

$$\mathbf{u} = B^*\mathfrak{c}(\eta(t, \mathbf{z}, \mu), \mu) + \mathbf{V} = \mathbf{u}(t, \mathbf{z}, \mu). \tag{22.16}$$

Покажем, что система (22.1) при управлении (22.16) и начальной функции $\varphi = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$, $t \in [0, T]$, полученной из (22.9), имеет решение, обладающее свойством (22.4)

Действительно, подставляя (22.9), (22.5) и (22.8) в систему (22.1), получим тождество. Заменим в этом тождестве вектор $\mathbf{x}_0$, входящий в управление $\mathbf{u}$, по формуле (22.15). Тогда получим, что (22.9) есть решение системы (22.1) при управлении (22.15). Так как (22.9) обладает свойством (22.4), то теорему 22.2 можно считать доказанной полностью.

В данном и предыдущих параграфах производилось построение семейств управлений, зависящих от векторной функции $\mathbf{V}$, которая удовлетворяет условию

$$\int_0^T B\mathbf{V}\,dt = 0, \qquad B = Y^{-1}Q. \tag{22.17}$$

Дадим способы аналитического представления векторных функций, ортогональных строкам матрицы B. С этой целью введем в рассмотрение пространство $L^2_{[0, T]}$ векторных функций $\mathbf{u}$, суммируемых с квадратом

$$\int_0^T \mathbf{u}^2\,dt < +\infty.$$

Пусть векторные функции $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots$ образуют базис этого пространства в том смысле, что всевозможные линейные комбинации этих функций с вещественными постоянными коэффициентами, взятыми в конечном числе, образуют в $L^2_{[0, T]}$ всюду плотное множество функций. Каждую из функций базиса можно представить в форме

$$\mathbf{u}_j = B^*\mathbf{c}_j + \mathbf{V}_j.$$

Определим вектор $\mathbf{c}_j$ из условия ортогональности векторной функции $\mathbf{V}_j$ строкам матрицы B. Тогда получим

$$\mathbf{c}_j = A^{-1}(0, T)\int_0^T B\mathbf{u}_j\,dt,$$

где, как и выше,

$$A(0,\ T)=\int_0^T BB^* dt.$$

Здесь, разумеется, предполагается, что векторные функции, стоящие в столбцах матрицы B^*, линейно независимы на промежутке $[0,\ T]$. При таком выборе векторов $\mathbf{c}_j$ функции

$$\mathbf{V}_j=\mathbf{u}_j-B^*A^{-1}(0,\ T)\int_0^T B\mathbf{u}_j dt \qquad j=1,\ 2,\ \ldots$$

представляют собой базис в пространстве векторных функций $\mathbf{V}$, ортогональных строкам матрицы B. Линейные комбинации этих функций с вещественными постоянными коэффициентами, взятыми в конечном числе, будут образовывать всюду плотное множество в упомянутом пространстве векторных функций $\mathbf{V}$.

Предположим теперь, что задано дифференциальное уравнение

$$\mathbf{x}^{(n)}+P_1(t)\,\mathbf{x}^{(n-1)}+\ldots+P_n\mathbf{x}=0, \qquad (22.18)$$

где $P_1(t),\ \ldots,\ P_n(t)$ — вещественные, n раз непрерывно дифференцируемые и ограниченные функции, заданные при $t\geqslant 0$.

Пусть требуется найти аналитическое представление функций $\mathbf{V}$, обладающих свойством $\int_0^T \mathbf{x}\mathbf{V}\,dt=0$, где $\mathbf{x}$ — $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемое решение уравнения (22.18); под $\mathbf{x}\mathbf{V}$ понимается вектор с компонентами, равными произведениям соответствующих компонент $\mathbf{x}$ и $\mathbf{V}$. Пусть φ — некоторая n раз непрерывно дифференцируемая функция. Умножая уравнение (22.18) на функцию φ и затем интегрируя в пределах от 0 до T, получим

$$\int_0^T \varphi\mathbf{L}(\mathbf{x})\,dt=0, \qquad (22.19)$$

где $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ представляет собой левую часть (22.18). Интегрируя (22.19) по частям, найдем

$$\int_0^T \mathbf{x}\overline{\mathbf{L}}(\varphi)\,dt+\sum_{k=0}^{n-1}\{\varphi^{(k)}(0)\,A_k=\varphi^{(k)}(T)\,B_k\}=0, \qquad (22.20)$$

$$\overline{\mathbf{L}}(\varphi)=(-1)^n\varphi^{(n)}+(-1)^{n-1}(P_1\varphi)^{(n-1)}+\ \ldots+P_n\varphi=0.$$

Выберем функцию φ так, чтобы было

$$\varphi^{(k)}(0)=\varphi^{(k)}(T)=0, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \qquad (22.21)$$

Тогда из (22.20) получим

$$\int_0^T \mathbf{x}\mathbf{V}\,dt = 0, \quad \text{где} \quad \mathbf{V} = \bar{\mathbf{L}}(\varphi).$$

Из условия (22.21) найдем

$$\varphi = t^n (T - t)^n \psi, \quad \text{где} \quad \psi \in C^n_{[0, T]}. \tag{22.22}$$

В (22.22) ψ является произвольной n раз непрерывно дифференцируемой функцией на $[0, T]$. Таким образом, любая функция

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{L}}(t^n (T - t)^n \psi) \tag{22.23}$$

будет ортогональна функции $\mathbf{x}$, удовлетворяющей уравнению (22.18). Если положить

$$\mathbf{V}_j = \bar{\mathbf{L}}(t^{n+j} (T - t)^n), \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

то получим совокупность функций, конечные линейные комбинации которых будут всюду плотны среди всех функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^T \mathbf{x}\mathbf{V}\,dt = 0, \quad \mathbf{V} \in L^2_{[0, T]}.$$

Рассмотрим теперь систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = P\mathbf{x} + \mathbf{Q}u. \tag{22.24}$$

Предположим, что матрица P и вектор $\mathbf{Q}$ являются постоянными и такими, что векторы

$$\mathbf{Q}, \ P\mathbf{Q}, \ \ldots, \ P^{(n-1)}\mathbf{Q} \tag{22.25}$$

линейно независимы. Требуется дать аналитическое представление функциям $\mathbf{V}$, обладающим свойством

$$\int_0^T B\mathbf{V}\,dt = 0, \quad \mathbf{B} = e^{-Pt}\mathbf{Q}.$$

Из условия независимости векторов (22.25) имеем

$$P^n\mathbf{Q} = \mu_1 P^{n-1}\mathbf{Q} + \mu_2 P^{n-2}\mathbf{Q} + \ldots + \mu_n \mathbf{Q}. \tag{22.26}$$

Умножим равенство (22.26) слева на матрицу e^{-Pt}. Тогда получим

$$(-1)^n (e^{-Pt})^{(n)} \mathbf{Q} = \mu_1 (-1)^{n-1} (e^{-Pt})^{(n-1)} \mathbf{Q} + \\ + \mu_2 (-1)^{n-2} (e^{-Pt})^{(n-2)} \mathbf{Q} + \ldots + \mu_n e^{-Pt}\mathbf{Q}. \tag{22.27}$$

Умножим (22.27) на n раз непрерывно дифференцируемую функцию φ и проинтегрируем в пределах от 0 до T. Тогда получим

$$\int_0^T \varphi \mathbf{L}_1 \, dt = 0, \qquad (22.28)$$

где

$$\mathbf{L}_1 = \left[(-1)^n (e^{-Pt})^{(n)} - \sum_{j=1}^{n} \mu_j (-1)^{n-j} (e^{-Pt})^{(n-j)}\right] \mathbf{Q}.$$

Интегрируя в (22.28) по частям, найдем

$$\int_0^T B\mathbf{V} \, dt + \sum_{k=0}^{n-1} \{\varphi^{(k)}(0)\bar{\mathbf{A}}_k + \varphi^{(k)}(T)\bar{\mathbf{B}}_k\} = 0, \qquad (22.29)$$

где $\mathbf{V} = \bar{\mathbf{L}}_1(\varphi)$,

$$\bar{\mathbf{L}}_1(\varphi) = \varphi^{(n)} - \mu_1 \varphi^{(n-1)} - \ldots - \mu_n \varphi. \qquad (22.30)$$

Положим

$$\varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(T) = 0, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

Тогда будем иметь

$$\varphi = t^n (T-t)^n \psi, \qquad \text{где} \qquad \psi \in C^n_{[0, T]}.$$

Таким образом, функции

$$\bar{\mathbf{V}}_j = \bar{\mathbf{L}}_1 (t^{n+j} (T-t)^n), \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

будут давать базис в пространстве функций $\mathbf{V}$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^T B\mathbf{V} \, dt = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots$$

Только что приведенные примеры аналитического представления векторных функций, ортогональных строкам матрицы B, позволяют предложить прямые методы построения оптимальных в том или ином смысле управлений.

Предположим, что задана линейная система (21.1). И пусть требуется построить управление $\mathbf{u}$, переводящее ее из любого начального положения $\mathbf{x}_0$ в конечное положение $\mathbf{x} = 0$ за время $[0, T]$, причем так, чтобы это управление доставляло некоторому функционалу $J = J(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ наименьшее возможное значение. Если считать, что векторные функции, стоящие в столбцах матрицы B^*, линейно независимы на промежутке $[0, T]$, то искомое управление будет иметь вид

$$\mathbf{u} = B^* \mathbf{c} + \mathbf{V}, \qquad (22.31)$$

где c определяется соотношением $c = -A^{-1}(0, T) \cdot x_0$ и V удовлетворяет условию ортогональности $\int_0^T BV\,dt = 0$. Будем искать V в виде

$$V = \sum_{j=1}^{m} V_j \alpha_j. \tag{22.32}$$

Подставляя (22.32) в (22.31) и затем (22.31) в (21.1), получим решение (21.1), с помощью которого можно вычислить функционал $J = J(u, x)$. Выберем величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ так, чтобы этот функционал принимал наименьшее возможное значение. Эта задача является задачей отыскания экстремума функции многих переменных. Ее решение дает, вообще говоря, приближенное решение задачи построения оптимального управления. Величины α_j будут зависеть от вектора c нелинейным образом и, следовательно, исключение этого вектора из управления приведет к тому, что оптимальная система будет уже являться нелинейной.

Перейдем к выводу необходимых условий оптимальности и отысканию с помощью их оптимальных законов управления.

Положим

$$J = \int_0^T f_0(t, x, u)\,dt. \tag{22.33}$$

Пусть требуется найти управление

$$u = B^* c + V, \tag{22.34}$$

переводящее управляемую систему (21.1) из любого положения x_0 в положение $x = 0$ за время $[0, T]$ и доставляющее функционалу (22.33) наименьшее возможное значение. Будем считать, что подынтегральная функция в (22.33) непрерывна и непрерывно дифференцируема по отношению к компонентам векторов u, x, задана при $t > 0$, $u \in E_r$, $x \in E_n$ и вещественна. Пусть V_0 — то значение векторной функции v, при котором функционал (22.33) принимает наименьшее возможное значение. Будем считать v_0 кусочно-непрерывной вещественной векторной функцией, ортогональной строкам вектора B. Тогда положим $V = V_0 + \varepsilon \overline{V}$ в (22.34), где $\int_0^T B\overline{V}\,dt = 0$.

Подставляя (22.34) в (22.1), а затем вычисляя функционал (22.33), найдем

$$J(u^0, x^0) \leqslant J(u, x),$$

где через u^0 обозначено значение (22.34) при $\varepsilon = 0$, через x^0

[illegible] движение, соответствующее $\mathbf{u}^0$. Дифференцируя $J(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ по ε и полагая $\varepsilon=0$, находим $\partial J/\partial\varepsilon=0$ при $\varepsilon=0$.

Это равенство в развернутом виде может быть представлено в форме

$$\int_0^T \left[\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}}\xi+\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{u}}\overline{\mathbf{V}}\right] dt=0, \tag{22.35}$$

где $\xi=\partial \mathbf{x}/\partial\varepsilon$ при $\varepsilon=0$. Следовательно,

$$\xi=Y(t)\int_0^t B\overline{\mathbf{V}}\,dt=0. \tag{22.36}$$

Подставляя (22.36) в (22.35) и меняя затем порядок интегрирования, получим

$$\int_0^T \left\{\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{u}}+\int_0^T \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}}Y\,dt\cdot B(t)\right\}\overline{\mathbf{V}}\,dt=0.$$

Так как вектор $\overline{\mathbf{V}}$ является произвольным вектором, ортогональным строкам матрицы B, то будет существовать постоянный вектор λ такой, что

$$\lambda^* B=\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{u}}+\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}}Y\,dt\cdot B(t). \tag{22.37}$$

Условия (22.37) — необходимые условия оптимальности управления (22.34) при $\mathbf{V}=\mathbf{V}_0$.

Рассмотрим их несколько подробнее в ряде конкретных случаев.

1. Пусть $f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})=A_1^*\mathbf{x}+c_1^*\mathbf{u}+\mathbf{u}^*c_2\mathbf{u}$. Тогда необходимые условия оптимальности примут вид

$$\mathbf{c}_1^*+2\mathbf{u}^*c_2+\int_t^T A_1^*Y\,dt\cdot B=\lambda^* B. \tag{22.38}$$

Будем искать решение уравнения (22.38) в виде

$$\mathbf{V}_0=\mathbf{V}_1+V_2\mathbf{c}. \tag{22.39}$$

Тогда получим

$$\mathbf{V}_1^*=\frac{1}{2}\left(\lambda_1^*B-\mathbf{c}_1^*-\int_t^T A_1^*Y\,dt\cdot B\right)c_2^{-1}, \tag{22.40}$$

$$V_2^*=\frac{1}{2}(\lambda_2^*B-B)\,c_2^{-1}, \tag{22.41}$$

где полагаем $\lambda=\lambda_1+\lambda_2\mathbf{c}$.

Определим теперь из (22.40) и (22.41) λ_1 и λ_2, пользуясь условием $\int\limits_0^T B\mathrm{V}_0\,dt=0$. Умножая (22.40) и (22.41) справа на B^* и интегрируя в пределах от 0 до T, найдем

$$\lambda_1^* = \int\limits_0^T \left[\mathrm{c}_1^* c_2^{-1} B^* + \int\limits_0^T A_1^* Y\,dt \cdot B c_2^{-1} B^* \right] dt \cdot \overline{A}^{-1}(0,\ T), \tag{22.42}$$

$$\lambda_2^* = E, \tag{22.43}$$

где $\overline{A}^{-1}(0,\ T) = \int\limits_t^T B c_2^{-1} B^*\,dt$.

Таким образом, окончательно имеем

$$\mathrm{V}_1^* = \frac{1}{2}\left\{ \int\limits_0^T \left[\mathrm{c}_1^* c_2^{-1} B^* + \int\limits_t^T A_1^* Y\,dt \cdot B c_2^{-1} B^* \right] dt \cdot A^{-1}(0,\ T)\cdot B - \right.$$
$$\left. - \mathrm{c}_1^* - \int\limits_t^T A_1^* Y\,dt \cdot B \right\} c_2^{-1}, \tag{22.44}$$

$$V_2^* = 0. \tag{22.45}$$

Таким образом, управление

$$\mathrm{u} = B^*\mathrm{c} + \mathrm{V}_1, \tag{22.46}$$

где $\mathrm{c} = -A^{-1}(0,\ T)\cdot \mathrm{x}_0$, будет переводить систему (21.1) из любого начального состояния x_0 в конечное состояние $\mathrm{x}=0$ за время $[0,\ T]$ и будет доставлять функционалу (22.33) стационарное значение.

В ходе вычислений было использовано, что матрица $\overline{A}(0,\ T)$ является неособой. Будем предполагать, что, более того, матрица C_2 является положительно определенной при $t \in [0,\ T]$.

Тогда управление (22.46) будет являться оптимальным, именно, будет доставлять наименьшее возможное значение функционалу (22.33). Доказательство этого утверждения оставим пока в стороне. Заметим лишь только, что с помощью управления (22.46) можно решить также задачу синтеза оптимальных управлений. Действительно, подставляя (22.46) в (21.1), найдем

$$-Y^{-1}\cdot \mathrm{x} = A(t,\ T)\,\mathrm{c} + \int\limits_t^T [B\mathrm{V}_1 + Y^{-1}\mathrm{f}]\,dt. \tag{22.47}$$

Отсюда имеем

$$\mathbf{c} = -A^{-1}(t, T)\left[Y^{-1}\mathbf{x} + \int_t^T (B\mathbf{V}_1 + Y^{-1}\mathbf{f})\,dt\right],$$

и, следовательно, оптимальное управление будет иметь вид

$$\mathbf{u} = -B^* A^{-1}(t, T)\left\{Y^{-1}\mathbf{x} + \int_t^T [B\mathbf{V}_1 + Y^{-1}\mathbf{f}]\,dt\right\} + \mathbf{V}_1.$$

Если измерение компонент вектора $\mathbf{x}$ ведется с запаздыванием, то оптимальное управление будет иметь вид

$$\mathbf{u} = -B^*(t)A^{-1}(t-\tau, T)\left\{Y^{-1}(t-\tau)\mathbf{x}(t-\tau) + \int_{t-\tau}^T [B\mathbf{V}_1 + Y^{-1}\mathbf{f}]\,dt\right\} + \mathbf{V}_1(t). \qquad (22.48)$$

Управление (22.48) будет переводить систему (21.1) из любого начального положения $\mathbf{x}_0$ в положение $\mathbf{x} = 0$, если начальная функция $\mathbf{x} = \varphi(t)$, $t \in [0, \tau]$ выбрана в соответствии с (22.47). При этом (22.48) будет доставлять наименьшее возможное значение функционалу (22.33).

2. Пусть в (22.33)

$$\mathbf{f}_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x}^*A_2\mathbf{x} + \mathbf{u}^*B_1\mathbf{x} + \mathbf{x}^*B_1\mathbf{u} + A_1^*\mathbf{x} + \mathbf{c}_1^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*c_2\mathbf{u}. \qquad (22.49)$$

Тогда необходимое условие оптимальности будет иметь вид

$$\lambda^*B = \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{u}} + \int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} Y\,dt \cdot B =$$
$$= 2\mathbf{x}^*B_1^* + \mathbf{c}_1^* + 2\mathbf{u}^*c_2 + \int_t^T (2\mathbf{x}^*A_2 + 2\mathbf{u}^*B_1 + A_1^*)\cdot Y\,dt \cdot B. \qquad (22.50)$$

Здесь, как и выше, элементы матриц и векторов A_2, A_1, c_2, $\mathbf{c}_1$, B_1 считаются вещественными непрерывными функциями, заданными при $t \geqslant 0$. Будем искать решение системы (22.50) в форме

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2\mathbf{c}, \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_1 + V_2\mathbf{c}.$$

Тогда $\mathbf{x}(t)$ — решение системы (21.1) при управлении $\mathbf{u} = B^*\mathbf{c} + \mathbf{V}_0$

можно представить в форме $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+x_2\mathbf{c}$, где

$$\mathbf{x}_1=-Y(t)\int_t^T(B\mathbf{V}_1+Y^{-1}\mathbf{f})\,dt,\qquad x_2=-Y(t)\int_t^T(BB^*+BV_2)\,dt.$$

Тогда будем иметь

$$\mathbf{V}_1^*=\frac{1}{2}\left\{\lambda_1^*B-2\mathbf{x}_1^*B_1^*-\mathbf{c}_1^*-\int_t^T(2\mathbf{x}_1^*A_2+2\mathbf{V}_1^*B_1+A_1^*)\,Y\,dt\cdot B\right\}c_2^{-1}, \tag{22.51}$$

$$\mathbf{V}_2^*=\frac{1}{2}\left\{\lambda_2^*B-2x_2^*B_1^*-2Bc_2-\int_t^T[2x_2^*A_2+2(B+V_2^*)B_1]\,Y\,dt\cdot B\right\}c_2^{-1}. \tag{22.52}$$

Уравнения (22.51) и (22.52) можно рассматривать как линейные интегральные уравнения, которые служат для определения искомых величин $\mathbf{V}_1$ и V_2.

Покажем, что эти интегральные уравнения имеют единственное непрерывное решение при любом выборе величин λ_1 и λ_2. Действительно, уравнения (22.51), (22.52) могут быть записаны в общей форме

$$W=\psi(t)+\int_t^T W(\tau)\,\varkappa(t,\ \tau)\,d\tau, \tag{22.53}$$

где $\psi(t)$ и $\varkappa(t,\ \tau)$ — непрерывные функции, заданные при $t\in[0,\ T]$, $\tau\in[0,\ T]$.

Уравнение (22.53) получается из (22.51) и (22.52) после соответствующего изменения порядка интегрирования в двойных интегралах. Положим $W_0=0$ и определим последовательные приближения по формуле

$$W_{k+1}=\psi\int_t^T W_k\varkappa(t,\ \tau)\,d\tau. \tag{22.54}$$

Из (22.54) будем иметь

$$\|W_{k+1}-W_k\|\leqslant\int_t^T m\,\|W_k-W_{k-1}\|\,d\tau\leqslant\frac{m^k(t-T)^k}{k!}\,m_1, \tag{22.55}$$

где

$$m=\max_{\substack{t\in[0,\ T]\\ \tau\in[0,\ T]}}\|\varkappa(t,\ \tau)\|,\qquad m_1=\max_{t\in[0,\ T]}\|\psi(t)\|.$$

Из (22.55) вытекает, что последовательность W_k сходится равномерно при $t\in[0,\ T]$, и, следовательно, интегральное уравнение (22.53) имеет непрерывное решение $W(t)$. При этом это решение является единственным, так как при наличии двух

решений такого сорта будет иметь место неравенство

$$\|\overline{W}-\overline{\overline{W}}\| \leqslant m \int_{t}^{T} \|\overline{W}-\overline{\overline{W}}\| \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(T-t)^k m^k}{k!} \cdot \|\overline{W}-\overline{\overline{W}} \leqslant \frac{(T \cdot m)^k}{k!} \cdot \|\overline{W}-\overline{\overline{W}}\|. \quad (22.56)$$

Последнее неравенство должно иметь место при любом k, что возможно лишь при условии $\|\overline{W}-\overline{\overline{W}}\|=0$; следовательно, установленное выше непрерывное решение является единственным. Таким образом, существование решений (22.50) и (22.51) можно считать установленным.

Используя далее ортогональность вектора $\mathbf{V}_0$ строкам матрицы B, можно отыскать величины λ_1, λ_2 из линейных алгебраических систем, которые получаются из (22.51) и (22.52), если каждое из этих уравнений умножить слева на матрицу B^* и затем проинтегрировать в пределах от 0 до T.

Если полученная система разрешима, то система (21.1) может быть переведена из любого начального положения $\mathbf{x}_0$ в положение $\mathbf{x}=0$ за время $[0, T]$ с помощью управления

$$\mathbf{u}=B^*\mathbf{c}+\mathbf{V}_1+V_2\mathbf{c}, \quad (22.57)$$

$\mathbf{c}=-A^{-1}(0, T)\cdot\mathbf{x}_0$. При этом управление (22.57) будет доставлять функционалу (22.33) наименьшее возможное значение при условии, что матрица C_2 в (22.49) положительно определена и квадратичная форма (22.49) положительно определена.

Далее с помощью управления (22.57) можно решить задачу синтеза оптимальных управлений. Однако требуется, чтобы матрица $\int_{t}^{T} B(B^*+V_2)\,dt$ была неособой при $t \in [0, T]$. Если же компоненты вектора $\mathbf{x}$ измеряются с постоянным запаздыванием τ, то требуется, чтобы эта матрица была неособой при $t \in [0, T-\tau]$.

В этом случае, как и выше, начальную функцию $\mathbf{x}=\varphi(t)$ приходится выбирать специальным образом. Именно, должно быть $\varphi=\mathbf{x}_1+x_2\mathbf{c}$, $t \in [0, \tau]$.

§ 23. Определение элементов движения в линейных системах

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{\mathbf{x}}=P(t)\mathbf{x}+Q(t)\mathbf{u}+\mathbf{f}(t). \quad (23.1)$$

Предположим, что в процессе движения измеряются компоненты вектора

$$\mathbf{z}=P_1(t)\mathbf{x}+Q_1(t)\mathbf{u}+\mathbf{f}_1(t). \quad (23.2)$$

На основе этих измерений требуется определить компоненты векторной функции

$$\xi = P_2(t)\,x + Q_2(t)\,u + f_2(t) + Rz. \tag{23.3}$$

Будем считать, что элементы матриц, входящих в (23.1)—(23.3), а также компоненты векторов f_1, f_2 являются вещественными функциями, заданными при $t \geqslant 0$, непрерывными и ограниченными. Будем считать, что вектор фазового состояния x имеет размерность n, вектор управлений u имеет размерность r, вектор z имеет размерность l и ξ — размерность k. Обозначим через Y фундаментальную систему решений для системы $\dot{x} = P(t)\,x$, $Y = E$ при $t = 0$.

Предположим сначала, что управление u является известной функцией времени. Обозначим через B_1 матрицу

$$B_1 = P_1(t)\,Y(t).$$

Теорема 23.1. *Если существует число τ такое, что векторные функции, стоящие в столбцах матрицы B_1, линейно независимы на промежутке $[t-\tau,\ t]$, то векторная функция ξ определяется в момент t единственным образом через известные функции и наблюденные значения вектора z на промежутке $[t-\tau,\ t]$.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольное начальное состояние для системы (23.1). Тогда система (23.1) имеет решение

$$x = Yx_0 + Y\int_0^t Y^{-1}(Qu + f)\,dt. \tag{23.4}$$

Подставляя (23.4) в (23.2), находим

$$z = B_1x_0 + P_1Y\int_0^t Y^{-1}(Qu + f)\,dt + Q_1u + f_1. \tag{23.5}$$

Из условий теоремы вытекает, что матрица $A_1(t-\tau, t) = \int_{t-\tau}^{t} B_1^*B_1\,dt$ — неособая. Домножая обе части (23.5) на матрицу B_1^* слева и интегрируя по t в пределах от $t-\tau$ до t, найдем

$$\int_{t-\tau}^{t} B_1^*z\,dt = A_1(t-\tau,\ t)\,x_0 + \int_{t-\tau}^{t} B_1^*\left[Y^{-1}(Qu + f)\,dt + Q_1u + f_1\right]dt. \tag{23.6}$$

Исключая вектор $\mathbf{x}_0$ из (23.4) с помощью (23.6), а затем исключая вектор $\mathbf{x}$ из (23.3), найдем

$$\xi = R(t)\,\mathbf{z}(t) + P_2 Y A_1^{-1}(t-\tau,\ t)\int_{t-\tau}^{t} B_1^* \mathbf{z}\,dt + \xi_0(t), \qquad (23.7)$$

где $\xi_0(t)$ — известная функция, не зависящая от начального состояния системы (23.1) и наблюденных значений вектора $\mathbf{z}$.

Дадим теперь другое представление векторной функции ξ, отличное от (23.7).

Так как векторные функции, стоящие в столбцах матрицы B_1^*, линейно независимы в промежутке $[t-\tau,\ t]$, то, как было показано в § 14, можно указать n точек в этом промежутке $t-\tau_j$, $j=1, \ldots, n$, таких, что среди строк матрицы $B_1(t-\tau_j)$, $j=1, \ldots, n$, имеется ровно n линейно независимых.

Заменим в (23.5) t на $t-\tau_j$, затем домножим полученный результат на матрицу $B_1^*(t-\tau_j)$ и просуммируем результат по индексу j. Тогда получим

$$\sum_{j=1}^{n} B_1^*(t-\tau_j)\,\mathbf{z}(t-\tau_j) = H_1\mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^{n} B_1^*(t-\tau_j)\times$$
$$\times\left[P_1(t-\tau_j)\,Y(t-\tau_j)\int_0^{t-\tau_j} Y^{-1}(Q\mathbf{u}+\mathbf{f})\,dt + {} \right.$$
$$\left. + Q_1(t-\tau_j)\,\mathbf{u}(t-\tau_j) + \mathbf{f}(t-\tau_j)\right]. \qquad (23.8)$$

В формуле (23.8) через H_1 обозначена матрица

$$H_1 = \sum_{j=1}^{n} B_1^*(t-\tau_j)\,B_1(t-\tau_j).$$

Матрица H_1 — неособая. Поэтому из (23.8) и (23.4) можно исключить вектор $\mathbf{x}_0$, а затем исключить вектор $\mathbf{x}$ из (23.3). Тогда получим

$$\xi(t) = R(t)\,\mathbf{z}(t) + P_2(t)\,Y(t)\,H_1^{-1}(t)\sum_{j=1}^{n} B_1^*(t-\tau_j)\,\mathbf{z}(t-\tau_j) + \eta_0. \qquad (23.9)$$

В формуле (23.9) функция η_0 не зависит от начального состояния системы (23.1) и от наблюденных значений вектора $\mathbf{z}$.

Формулы (23.7) и (23.9) доказывают теорему 23.1 полностью.

Остановимся теперь на решении проблемы локализации движения управляемой системы.

Пусть задана линейная управляемая система

$$\dot{\mathbf{x}} = P(t)\,\mathbf{x} + Q(t)\,\mathbf{u} + \mathbf{f}(t).$$

Элементы матриц P, Q и компоненты вектора $\mathbf{f}$ будем считать заданными при $t \geqslant 0$, вещественными, непрерывными и ограниченными.

Пусть известно, что управление в этой системе стеснено ограничением

$$\int_0^T \mathbf{u}^2 dt \leqslant \alpha^2, \tag{23.11}$$

где $\mathbf{u}$ является, как и прежде, r-мерной векторной функцией, $\mathbf{x}$ — n-мерной векторной функцией, дающей фазовое состояние системы.

Предположим, что относительно некоторого управления

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \tag{23.12}$$

известно, что оно удовлетворяет ограничениям (23.11) и переводит систему из известного состояния $\mathbf{x}_0$ в конечное состояние $\mathbf{x} = 0$ за известное время $[0, T]$. В остальном управление (23.12) остается неизвестным. При этих условиях требуется указать ту область фазового пространства E_n, в которой может находиться движение системы (23.10) при управлении (23.12).

Дадим решение этой задачи локализации движений. Прежде всего управление (23.12) может быть представлено в форме

$$\mathbf{u} = B^*\mathbf{c} + \mathbf{V}, \tag{23.13}$$

где, как и выше, $B = Y^{-1}Q$ и $\mathbf{c}$ — постоянный вектор. Значения этого вектора можно определить из условий задачи единственным образом. А именно, домножая (23.10) слева на матрицу Y^{-1} и интегрируя в пределах 0, T найдем

$$-\mathbf{x}_0 = A(0, T)\mathbf{c} + \int_0^T Y^{-1}\mathbf{f}\, dt.$$

Отсюда имеем

$$\mathbf{c} = -A^{-1}(0, T)\left(\mathbf{x}_0 + \int_0^T Y^{-1}\mathbf{f}\, dt\right). \tag{23.13*}$$

Здесь

$$A(0, T) = \int_0^T BB^*\, dt.$$

В этих выкладках было использовано условие ортогональности векторной функции $\mathbf{V}$ строкам матрицы B

$$\int_0^T B\mathbf{V}\, dt = 0.$$

...авим (23.13) в (23.11). Тогда получим

$$\ldots dt \leqslant \alpha^2 - \left(x_0 + \int_0^T Y^{-1} f\, dt\right)^* A^{-1}(0,\ T)\left(x_0 + \int_0^T Y^{-1} f\, dt\right). \tag{23.14}$$

...и (23.10) после умножения слева на Y^{-1} проинтегрировать ...до T, то получим

$$-Y^{-1}(t)\, x(t) - A(t,\ T)\, c - \int_t^T Y^{-1} f\, dt = \int_t^T BV\, dt. \tag{23.15}$$

...ставим теперь векторную функцию V на промежутке $[t,\ T]$ ...ой

$$V(\tau) = B^*(\tau)\, \gamma(\tau)\, W(\tau), \tag{23.16}$$

...где W удовлетворяет условию ортогональности

$$\int_t^T B(\tau)\, W(\tau)\, d\tau = 0.$$

...ким образом, вектор $\gamma(t)$ в формуле (23.16) может быть ...опелен единственным образом:

$$\gamma(t) = A^{-1}(t,\ T) \int_t^T B(\tau)\, V(\tau)\, d\tau.$$

...одставляя (23.16) в (23.14), находим

$$\gamma^* A(t,\ T)\, \gamma(t) \leqslant$$
$$\ldots^2 - \left(x_0 + \int_0^T Y^{-1} f\, dt\right)^* A^{-1}(0,\ T)\left(x_0 + \int_0^T Y^{-1} f\, dt\right) - \int_t^T W^2\, dt. \tag{23.17}$$

...спользуя (23.15) и (23.17), находим далее

$$\eta^*\ldots(t,\ T)\, \eta \leqslant$$
$$\leqslant - \left(x_0 + \int_0^T Y^{-1} f\, dt\right)^* A^{-1}(0,\ T)\left(x_0 + \int_0^T Y^{-1} f\, dt\right) - \int_0^T W^2\, dt, \tag{23.18}$$

гд— левая часть (23.15).

...еравенство (23.18) в фазовом пространстве E_n задает семей... ...эллипсоидов. Если положить в (23.18) $W = 0$, то получается

эллипсоид, охватывающий это семейство:

$$(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^* (Y^{-1})^* A^{-1}(t, T) Y^{-1}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^2 - \left(\mathbf{x}_0 + \int_0^T Y^{-1}\mathbf{f}\,dt\right)^* A^{-1}(0, T)\left(\mathbf{x}_0 + \int_0^T Y^{-1}\mathbf{f}\,dt\right). \quad (23.19)$$

В неравенстве (23.19) положено

$$\bar{\mathbf{x}} = -Y\left[A(t, T)\mathbf{c} + \int_t^T Y^{-1}\mathbf{f}\,dt\right]. \quad (23.20)$$

Легко видеть, что (23.20) дает решение системы (23.10) при управлении (23.13) при условии, что $\mathbf{V}=0$. Таким образом, установлена

Теорема 23.2. *Если управляемая система* (23.10) *под действием управления* (23.12), *удовлетворяющая условию* (23.11), *переводится из некоторого известного начального состояния* $\mathbf{x}_0$ *за известное время* $[0, T]$, *то при условии линейной независимости векторных функций, стоящих в столбцах матрицы* B^*, *на любом из промежутков* $[t, T]$ *движение системы* (23.10) *может располагаться при любом фиксированном* $t \in [0, T]$ *лишь в области, определяемой* (23.19).

Перейдем теперь к решению проблемы локализации движения управляемой системы на основе использования некоторых измерений.

Пусть вновь рассматривается система (23.10) при наличии ограничений (23.11), и пусть известно, что измеряется величина

$$\mathbf{z} = R(t)\mathbf{x}(t). \quad (23.21)$$

И пусть также известно, что система (23.10) находится под действием управления (23.12), переводящего систему (23.10) из неизвестного начального состояния $\mathbf{x}_0$ в конечное состояние $\mathbf{x}=0$ за известное время $[0, T]$.

Требуется по измерениям величин $\mathbf{z}$ найти ту область фазового пространства E_n, где могут располагаться движения системы (23.10).

Будем искать управление (23.12) вновь в форме (23.13). Однако вектор $\mathbf{c}$ будет теперь неизвестным. Векторная функция $\mathbf{V}$ по-прежнему удовлетворяет условию ортогональности

$$\int_0^T B\mathbf{V}\,dt = 0.$$

Вектор c можно выразить по формуле (23.15) через неизвестное начальное состояние

$$\mathbf{c} = -A^{-1}(0,\ T)\left(\mathbf{x}_0 + \int_0^T Y^{-1}\mathbf{f}\,dt\right). \tag{23.22}$$

Подставляя управление (23.13) в (23.10), умножая слева на матрицу Y^{-1} и интегрируя затем в пределах от t до T, находим

$$\mathbf{x} = -Y\left[A(t,\ T)\mathbf{c} + \int_t^T B\mathbf{V}\,dt + \int_t^T Y^{-1}\mathbf{f}\,dt\right]. \tag{23.23}$$

Подставляя (23.23) в (23.21), получим

$$\mathbf{z} = -RYA(t,\ T)\mathbf{c} - RY\int_t^T B\mathbf{V}\,dt - \int_t^T Y^{-1}\mathbf{f}\,dt. \tag{23.24}$$

Заменим в (23.24) $\int_t^T B\mathbf{V}\,dt$ через $-\int_0^t B\mathbf{V}\,dt$. Домножая обе части (23.24) на матрицу R_1^* и интегрируя в пределах $[0,\ T]$, получим

$$\int_0^T R_1^*\mathbf{z}\,dt = \int_0^T R_1^*R_1\,dt\cdot\mathbf{c} + \int_0^T R_1^*Y\int_0^t B\mathbf{V}\,dt - \int_0^T R_1^*Y\int_t^T Y^{-1}\mathbf{f}\,dt. \tag{23.25}$$

Здесь положено $R_1 = RYA(t,\ T)$. Изменяя в среднем члене, входящем в правую часть (23.25), порядок интегрирования, получаем

$$\int_0^T R_1^*Y\int_0^t B\mathbf{V}\,dt = \int_0^T B_1\mathbf{V}\,dt,$$

где

$$B_1 = \int_t^T R_1^*(\tau)\,Y(\tau)\,B(\tau)\,d\tau.$$

Положим $B_1 = \lambda^* B + B_2$, где $\int_0^T B_2B^*\,dt = 0$. Тогда

$$\lambda^* = \int_0^T B_1B^*\,dt\cdot A^{-1}(0,\ T),$$

и, следовательно, (23.25) можно представить в форме

$$\int_0^T R_1^*\mathbf{z}\,dt = \int_0^T R_1^*R_1\,dt\cdot\mathbf{c} + \int_0^T B_2\mathbf{V}\,dt - \int_0^T R_1^*Y\int_t^T Y^{-1}\mathbf{f}\,dt. \tag{23.26}$$

Будем искать векторную функцию $\mathbf{V}$ в форме

$$\mathbf{V} = B_2^*\gamma + \mathbf{W}. \tag{23.27}$$

Тогда из ограничений (23.11) будем иметь

$$\mathbf{c}^*A(0, T)\mathbf{c} + \gamma^*A_2(0, T)\gamma \leqslant \alpha^2 - \int_0^T \mathbf{W}^2\,dt, \tag{23.28}$$

где

$$A_2(0, T) = \int_0^T B_2B_2^*\,dt.$$

Подставляя (23.27) в (23.26), найдем также

$$\int_0^T R_1^*\mathbf{z}\,dt = \int_0^T R_1^*R_1\,dt\cdot\mathbf{c} + A_2(0, T)\gamma - \int_0^T R_1^*Y\int_t^T Y^{-1}\mathbf{f}\,dt. \tag{23.29}$$

Предположим, что матрица $A_2(0, T)$ неособая. Тогда при любом векторе $\mathbf{c}$ вектор γ определяется из (23.29) единственным образом.

Исключим, пользуясь (23.29), вектор γ из (23.28). Тогда для определения вектора $\mathbf{x}_0$ получим семейство эллипсоидов. Эллипсоид, получаемый при $\mathbf{W}=0$, будет охватывать это семейство. Обозначим этот эллипсоид через S.

Теорема 23.3. *Если в процессе управления системой* (23.10) *измеряется величина* (23.21), *где* $R(t)$ — *матрица, заданная при* $t \geqslant 0$, *вещественная, непрерывная и ограниченная, если векторные функции, стоящие в столбцах матрицы* B_2^*, *линейно независимы на промежутке* $[0, T]$ *и векторные функции, стоящие в столбцах матрицы* B^*, *линейно независимы на каждом из промежутков* $[t, T]$, *то система* (23.10) *может переходить в конечное состояние* $\mathbf{x}=0$ *за заданное время* $[0, T]$ *лишь из начальных состояний, расположенных в области* S_0. *При этом движение системы* (23.10) *в любой момент* $t \in [0, T]$ *может располагаться в множестве состояний* $\mathbf{x}_0 \in S_0$ *и* $\mathbf{x} \in \Sigma$, *где* Σ — *область, определяемая* (23.19).

Доказательство теоремы вытекает из предыдущего анализа.

Замечание. Теорема 23.3 дает конструкцию того множества, содержащегося в фазовом пространстве системы (23.10), в котором может находиться управляемая точка. Однако конструкция этого множества осуществляется в зависимости от наблюдений, на всем промежутке движения $[0, T]$, хотя для некоторых случаев локализации движений конструкцию этого множества полезно выражать через измерения, предшествующие моменту t.

Покажем, как можно сконструировать упомянутое множество фазового пространства через такие измерения. Умножим обе части (23.24) на R_1^*, но проинтегрируем лишь в пределах $[0, T]$; тогда,

...я порядок интегрирования в том же члене, найдем

$$\int_0^t R_1^* Y\,dt \int_0^t B\mathbf{V}\,dt = \int_0^t \int_\tau^t R_1^*(\tau)\,Y(\tau)\,B(t)\,d\tau\,\mathbf{V}(t)\,dt = \int_0^T B_1\mathbf{V}\,dt,$$

где

$$B_1(\tau) = \int_\tau^t R_1^*(\tau)\,Y(\tau)\,B(t)\,d\tau$$

при $\tau \in [0, t]$ и $B_1 = 0$ при $\tau \in (t, T]$. Как и выше, представим

$$B_1 = \lambda^* B + B_2 \quad \text{и} \quad \mathbf{V} = B_2^* \gamma.$$

Если окажется, что матрица $B_2(0, t)$ неособая, начиная с некоторых значений t, то для таких значений возможно решение задачи локализации через измерения величины (23.21), предшествующие значению t:

$$\xi = \eta, \qquad \eta = \mathbf{z}.$$

§ 24. Определение элементов движения в нелинейных системах

Рассмотрим сначала квазилинейную управляемую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = P\mathbf{x} + Q\mathbf{u} + \mathbf{f} + \mu\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{24.1}$$

Предположим, что в процессе движения измеряются компоненты вектора $\mathbf{z}$

$$\mathbf{z} = P_1\mathbf{x} + Q_1\mathbf{u} + \mathbf{f}_1 + \mu\mathbf{G}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{24.2}$$

Предположим, что с помощью этих измерений требуется определить компоненты векторной функции

$$\xi = P_2\mathbf{x} + Q_2\mathbf{u} + \mathbf{f}_2 + \mu\mathbf{G}_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + R\cdot\mathbf{z}. \tag{24.3}$$

Будем считать, что векторные функции $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ заданы при $t > 0$, $\mathbf{x} \in E_n$ и $\mathbf{u} \in E_r$, вещественны, непрерывны и непрерывно дифференцируемы относительно компонент векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$. Будем считать далее, что если в (24.1)—(24.3) положить $\mu = 0$, то получим соответственно (23.1)—(23.3).

Пусть Ω_n — некоторая конечная область фазового пространства E_n, и пусть известно, что начальное состояние системы (24.1) $\mathbf{x}_0$ располагается в этой области. Обозначим через B_1 матрицу $B_1 = P_1 Y$ и будем сначала считать управление $\mathbf{u}$ известной непрерывной векторной функцией.

Теорема 24.1. *Если существует число $\tau > 0$ такое, что векторные функции, стоящие в столбцах матрицы B_1, линейно*

независимы в промежутке $[t-\tau, t]$, *то существует* $\mu_0 > 0$ *такое, что при всех* $|\mu| < \mu_0$ *векторная функция* ξ *определяется в момент* t *единственным образом через известные функции и наблюденные значения вектора* z *на промежутке* $[t-\tau, t]$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in \Omega_n$. Тогда система (24.1) имеет при всех достаточно малых μ, $|\mu| < \mu_1$, решение

$$x = x(t, x_0, \mu), \tag{24.4}$$

$x = x_0$ при $t = 0$.

Подставляя это решение в (24.2), найдем

$$z = z(t, x_0, \mu). \tag{24.5}$$

Домножая (24.5) на матрицу B_1^* слева и интегрируя в пределах от $t-\tau$ до t, найдем

$$\int_{t-\tau}^{t} B_1^* z\, dt = \int_{t-\tau}^{t} B_1^*(t)\cdot z(t, x_0, \mu)\, dt. \tag{24.6}$$

Правая часть (24.6) имеет якобиан, вычисленный по компонентам вектора x_0, отличный от 0 при $\mu = 0$, так как он совпадает с определителем матрицы $A_1(t-\tau, t)$, где $A_1(t-\tau, t) = \int_{t-\tau}^{t} B_1^* B_1\, dt$. Следовательно, (24.6) определяет неявную функцию

$$x_0 = \varphi(\xi, \zeta_1, t, \mu), \tag{24.7}$$

где $\zeta_1 = \int_{t-\tau}^{t} B_1^* z\, dt$.

Пользуясь (24.7), исключим из (24.4) вектор x_0, а затем исключим вектор x из (24.3). Тогда получим, что вектор будет определяться единственным образом через известные функции и наблюденные значения вектора z на промежутке $[t-\tau, t]$. Как и в § 23, можно дать представление функции ξ через дискретные наблюдения вектора z. Для этого в формуле (24.5) заменим t на $t-\tau_j$, домножим после этого слева на матрицу $B_1^*(t-\tau_j)$ и просуммируем по индексу j. Тогда получим

$$\sum_{j=1}^{n} B_1^*(t-\tau_j)\, z(t-\tau_j) = \sum_{j=1}^{n} B_1^*(t-\tau_j)\, z(t-\tau_j, x_0, \mu). \tag{24.8}$$

Якобиан правых частей (24.8), вычисленный по компонентам вектора x_0 при $\mu = 0$, отличен от нуля, так как совпадает с определителем матрицы

$$\sum_{j=1}^{n} B_1^*(t-\tau_j)\, B_1(t-\tau_j) = H_1.$$

Точки $t-\tau_j$ считаются выбранными на промежутке $[t-\tau_j, t]$ так же, как в предыдущем параграфе. Поэтому можно считать, что существует $\mu_0 > 0$ такое, что при всех μ, для которых $|\mu| < \mu_0$, система (24.8) может быть разрешена относительно компонент вектора

$$\mathrm{x} = \psi(\zeta_2, t, \mu), \tag{24.9}$$

где $\zeta_2 = \sum_{j=1}^{n} B_1^*(t-\tau_j)$.

Пользуясь (24.9), исключаем x_0 из (24.4) и затем x из (24.3). Тогда получим выражение вектора ξ через известные функции и дискретные наблюденные значения вектора z, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь систему нелинейных уравнений

$$\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{f}(t, \mathrm{x}). \tag{24.10}$$

Предположим, что измеряется величина

$$\mathrm{z} = \mathrm{G}(t, \mathrm{x}) \tag{24.11}$$

и требуется определить элементы движения, определяемые величиной

$$\xi = \mathrm{H}(t, \mathrm{x}). \tag{24.12}$$

Будем считать, что векторные функции f, G, H заданы при $t \geqslant 0$, $\mathrm{x} \in E_n$, вещественны, непрерывны, и, кроме того, функции f и G непрерывно дифференцируемы по отношению к компонентам вектора x. Пусть далее система (24.10) имеет положение равновесия

$$\mathrm{x} = 0, \quad \mathrm{f}(t, 0) = 0.$$

Пусть также $\mathrm{G}(t, 0) = 0$. Положим $p = \partial\mathrm{f}/\partial\mathrm{x}$ при $\mathrm{x} = 0$, $p_1 = \partial\mathrm{G}/\partial\mathrm{x}$ при $\mathrm{x} = 0$. Обозначим, как и выше, в теореме 24.1 $B = P_1 Y$, где Y — фундаментальная система решений линейной системы

$$\dot{\mathrm{x}} = P(t)\,\mathrm{x}, \quad Y(0) = E.$$

Теорема 24.2. *Если для $T > 0$ можно указать число $\tau > 0$ такое, что существует промежуток $[t-\tau, t]$, в котором векторные функции, стоящие в столбцах матрицы B, линейно независимы $t \in [\tau, T]$, то можно указать $\delta = \delta(T) > 0$ такое, что для любого движения системы* (24.10), *начинающегося в области $\|\mathrm{x}_0\| < \delta$ при $t = 0$, можно вычислить единственным образом элементы $\xi(\vartheta)$ по измерениям z для любого $\vartheta \in [0, T]$. При этом измерения должны осуществляться в промежутке $[t-\tau, t]$.*

Доказательство. Выберем число ε так, чтобы любое решение

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}(t, \mathrm{x}_0) \tag{24.13}$$

системы (24.10), начинающееся при $\|x_0\| < \varepsilon$, $t=0$, было определено на промежутке $t \in [0, T]$. Подставим (24.13) в (24.11), затем умножим обе части на матрицу B^* и проинтегрируем в пределах $[t-\tau, t]$. Тогда получим

$$\int_{t-\tau}^{t} B^* z\, dt = \int_{t-\tau}^{t} B^*(t)\, G(t, x(t, x_0))\, dt. \tag{24.14}$$

Легко видеть, что правая часть (24.14) обращается в нуль при $x_0 = 0$. Якобиан правых частей (24.14) по отношению к компонентам вектора x_0, вычисленный при $x_0 = 0$, совпадает с определителем матрицы $\int_{t-\tau}^{t} B^* B\, dt$, и, следовательно, отличен от нуля. Тогда существует столь малое $\delta = \delta(T)$, что при $\|x_0\| < \delta$ вектор x_0 можно единственным образом определить из системы (24.14) при любом $t \in [\tau, T]$. Выберем δ к тому же так, чтобы было $\delta < \varepsilon$. Тогда существует единственное решение системы (24.10), удовлетворяющее найденному значению x_0. Вычисляя на этом решении функцию ξ, получаем искомый результат.

§ 25. Построение управлений в линейной задаче преследования

Пусть заданы две управляемые линейные системы

$$\dot{x}_1 = P_1 x_1 + Q_1 u_1 + f_1, \tag{25.1}$$
$$\dot{x}_2 = P_2 x_2 + Q_2 u_2 + f_2. \tag{25.2}$$

Будем считать, что элементы матриц P_i, Q_i и компоненты векторов f_i заданы при $t > 0$, вещественны, непрерывны и ограничены. Обозначим через n_i размерность векторов f_i, x_i, через r_i — размерность векторов u_i.

Рассмотрим сначала простейший случай встречи. Именно, будем считать, что произошла встреча управляемых систем, если выполнено соотношение

$$H_1 x_1 = H_2 x_2 \quad \text{при} \quad t = T. \tag{25.3}$$

Здесь H_i — постоянные матрицы соответственно размерностей $l \times n_1$, $l \times n_2$. Предположим, что в системе (25.2) задано начальное состояние и управление. Требуется найти условия, при которых из любого начального состояния система (25.1) может произвести встречу при помощи надлежащего выбора управления u_1.

Пусть Y_i есть фундаментальная система решений для системы

$$\dot{x}_i = P_i x_i, \quad i = 1,2 \tag{25.4}$$

с начальным условием $Y_i=E_i$ при $t=0$. Положим $B_i^*=Y_i^{-1}Q_i$ и $A_i(t, T)=\int\limits_t^T B_iB_i^*\,dt$. Рассмотрим множество управлений

$$\mathbf{u}_i=B_i^*\mathbf{c}_i+\mathbf{V}_i,\quad i=1, 2, \tag{25.5}$$

где $\mathbf{c}_i$—постоянные векторы и $\mathbf{V}_i$—векторные функции, удовлетворяющие условиям ортогональности $\int\limits_0^T B_i\mathbf{V}_i\,dt=0$.

Подставим (25.5) в (25.1) и (25.2). Тогда по формуле Коши будем иметь

$$\mathbf{x}_i=Y_i\mathbf{x}_{i0}+Y_iA(0, T)\mathbf{c}_i+Y_i\int\limits_0^t Y_i^{-1}\mathbf{f}\,dt+Y_i\int\limits_0^t B_i\mathbf{V}_i\,dt. \tag{25.6}$$

Подставим (25.6) в (25.3). Тогда получим

$$H_1Y_1(T)A_1(0, T)\mathbf{c}_1+H_1\left[Y_1(T)\mathbf{x}_{10}+Y_1(T)\int\limits_0^T Y_1^{-1}\mathbf{f}_1\,dt\right]=$$
$$=H_2Y_2(T)A_2(0, T)\mathbf{c}_2+H_2\left[Y_2(T)\mathbf{x}_{20}+Y_2(T)\int\limits_0^T V_2^{-1}\mathbf{f}_2\,dt\right]. \tag{25.7}$$

Систему (25.7) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений для определения вектора $\mathbf{c}_1$.

Теорема 25.1. *Если матрица $H_1Y_1(T)A_1(0, T)$ является квадратной и неособой, или если строки этой матрицы линейно независимы, то задача встречи разрешима при любом выборе начального состояния $\mathbf{x}_{i0}$ и любом выборе управления $\mathbf{u}_2$.*

Замечание 1. Если условия теоремы 25.1 не выполняются, то условие (25.3), вообще говоря, не будет иметь места. Однако можно указать такие управления $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ и начальное состояние $\mathbf{x}_{i0}$, при которых условие (25.3) будем выполняться.

Если условия теоремы 25.1 не выполнены, то (25.3) удовлетворяется тогда и только тогда, когда ранг матрицы $H_1Y_1(T)\times\times A_1(0, T)$ будет совпадать с рангом расширенной матрицы, полученной из нее добавлением столбца свободных членов, которые не зависят от вектора $\mathbf{c}_1$ в (25.7).

Замечание 2. Задача встречи разрешима при любом выборе $\mathbf{u}_2$ тогда и только тогда, когда столбцы матрицы $S_2=$ $=H_2Y_2(T)A_2(0, T)$ и вектор $\mathbf{S}=H_2\left[Y_2(T)\mathbf{x}_{20}+Y_2(T)\int\limits_0^T Y_2^{-1}\mathbf{f}_2\,dt\right]-$ $-H_1\left[Y_1(T)\mathbf{x}_{10}+Y_1(T)\int\limits_0^T Y_1^{-1}\mathbf{f}_1\,dt\right]$ являются линейными комби-

нациями столбцов матрицы $S_1 = H_1Y_1(T)A_1(0, T)$. Иначе говоря,

$$S_2 = S_1\lambda_2, \quad (25.8)$$

$$\mathbf{S} = S_1\lambda. \quad (25.9)$$

Действительно, если существует управление $\mathbf{u}_1$, разрешающее задачу встречи при любом выборе $\mathbf{u}_2$, тогда, полагая $\mathbf{c}_2 = 0$, получим $S_1\mathbf{c}_1 = \mathbf{S}$. Далее, полагая $\mathbf{c}_2 = \mathbf{e}_i$, где $\mathbf{e}_i$ — единичный орт пространства E_{n_2}, находим также $S_1\mathbf{c}_1 = \mathbf{S}_{2i}$, где $\mathbf{S}_{2i}$ — i-й столбец матрицы S_2, и это означает, что (25.8) и (25.9) выполнены. И наоборот, если начальные состояния $\mathbf{x}_{i0}$ и матрицы S_2 таковы, что (25.9) и (25.8) выполнены, то из (25.7) будем иметь

$$S_1(\mathbf{c}_1 - \lambda_2\mathbf{c}_2 - \lambda) = 0. \quad (25.10)$$

Из (25.10) вытекает общий вид вектора $\mathbf{c}_1$, при котором задача встречи разрешима:

$$\mathbf{c}_1 = \lambda_2\mathbf{c}_2 + \lambda + \sigma_1\gamma, \quad (25.11)$$

где σ_1 — матрица, удовлетворяющая условию $S_1\sigma_1 = 0$. При этом считаем, что столбцы матрицы σ_1 образуют базис в ортогональном дополнении подпространства, натянутого на векторы, стоящие в строках матрицы S_1, γ — произвольный постоянный вектор, размерность которого равна рангу матрицы σ_1.

Предположим теперь, что управления $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ стеснены ограничениями вида

$$\int_0^T \mathbf{u}_i^2\,dt \leqslant \alpha_i^2. \quad (25.12)$$

Возникает вопрос, при каких условиях, наложенных на начальные состояния $\mathbf{x}_{i0}$, задача встречи будет разрешима при любом выборе управления $\mathbf{u}_2$, удовлетворяющем (25.12). Иначе говоря, когда существует управление $\mathbf{u}_1$, удовлетворяющее (25.12), при котором уравнения (25.7) имеют решение при любом выборе вектора $\mathbf{c}_2$, согласованном с (25.12).

Вычислим $\int_0^T \mathbf{u}_1^2\,dt$ при условии (25.11) и найдем минимальное значение этого интеграла по отношению к вектору γ. Дифференцируя этот интеграл по компонентам вектора γ и приравнивая частные производные нулю, найдем

$$\sigma_1^* A_1(0, T)\,\mathbf{c}_1 = 0, \quad (25.13)$$

откуда находим

$$\gamma = S_3^{-1}\sigma_1^* A_1(0, T)(\lambda_2\mathbf{c}_2 + \lambda), \quad (25.14)$$

где $S_3 = \sigma_1^* A_1(0, T)\,\sigma_1$.

Подставляя (25.14) в (25.11), найдем

$$c_{10} = \lambda_2 c_2 + \lambda - \sigma_1 S_3^{-1} \sigma_1^* A_1(0, T)(\lambda_2 c_2 + \lambda). \tag{25.15}$$

Легко видеть, что

$$\min_{\gamma} \int_0^T u_1^2\, dt = c_{10}^* A_1(0, T)\, c_{10} + \int_0^T V_1^2\, dt. \tag{25.16}$$

Теорема 25.2. *Для того, чтобы задача встречи при ограничениях* (25.12) *была разрешима при любом выборе управления* u_2 *при начальных* x_{10}, x_{20}, *необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия*:

1) *выполняются условия* (25.8), (25.9),

2) *при любом выборе вектора* c_2 *из условия*

$$c_2 A_2^*(0, T)\, c_2 \leqslant \alpha_2^2 \tag{25.17}$$

вытекает

$$c_{10}^* A_1(0, T)\, c_{10} \leqslant \alpha_1^2. \tag{25.18}$$

Доказательство. Так как при выполнении условия (25.17) можно выбирать вектор c_2 коллинеарным любому из ортов пространства E_{n_2}, то условия разрешимости (25.7) при условии (25.17) совпадают с условиями разрешимости этой системы при отсутствии каких-либо ограничений на вектор c_2.

Отсюда вытекает необходимость и достаточность условия 1) теоремы 25.2.

Пусть теперь выполнено условие 2) теоремы 25.2. Покажем тогда, что задача встречи разрешима.

Действительно, существует вектор γ такой, что, с одной стороны, условие (25.12) для управления u_1 будет выполнено по крайней мере для $V_1 = 0$ (в качестве γ можно взять нулевой вектор). Управление u_1, соответствующее вектору (25.11) при таком γ, будет удовлетворять ограничению (25.12) и разрешать задачу встречи. И, наоборот, если задача встречи разрешима при любом векторе c_2, удовлетворяющем (25.17), то необходимо будет иметь место (25.18), так как левая часть (25.18) дает наименьшее значение (25.16), получающееся при $V_1 = 0$. Если это минимальное значение не будет удовлетворять условию (25.18), то не существует управления u_1, удовлетворяющего условиям (25.11) и (25.12).

Таким образом, условие 2) теоремы 25.1 является совместным с условием 1), необходимым и достаточным для разрешимости задачи встречи при условии (25.12).

Рассмотрим теперь дифференциальную игру. Пару управлений u_1, u_2 назовем «допустимой ситуацией» в этой игре, если при управлениях u_1 и u_2 задача встречи разрешима.

Выше была установлена общая конструкция множества допустимых ситуаций. Именно,

$$\mathbf{u}_1 = B_1^* (\lambda_2 \mathbf{c}_2 + \sigma_1 \gamma + \lambda) + \mathbf{V}_1 \qquad (25.19)$$

и

$$\mathbf{u}_2 = B_2^* \mathbf{c}_2 + \mathbf{V}_2. \qquad (25.20)$$

Предположим теперь, что задан некоторый функционал $J = J(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2)$. Допустимую ситуацию $\mathbf{u}_1^0$; $\mathbf{u}_2^0$ будем называть *ситуацией равновесия по отношению к этому функционалу*, если имеет место равенство

$$\min_{\mathbf{u}_1} \max_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \max_{\mathbf{u}_2} \min_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = J(\mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0).$$

Управление $\mathbf{u}_1^0$, $\mathbf{u}_2^0$, входящее в ситуацию равновесия, называют также *оптимальными стратегиями игроков*.

Положим

$$J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \int_0^T \mathbf{f}_0(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\, dt, \qquad (25.21)$$

где $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_0^{(1)} + \mathbf{f}_0^{(2)}$, $\mathbf{f}_0^{(1)}$ — линейная форма, $\mathbf{f}_0^{(2)}$ — квадратичная форма относительно компонент векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$. Будем считать, что в квадратичную форму $\mathbf{f}_0^{(2)}$ в качестве слагаемых входят квадратичные формы $\mathbf{u}_i^* H_i \mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$. Элементы матриц H_i, как коэффициенты форм $\mathbf{f}_0^{(1)}$, $\mathbf{f}_0^{(2)}$, являются вещественными, непрерывными функциями, заданными при $t \geqslant 0$.

Будем считать, что матрица H_1 является положительно определенной, матрица H_2 — отрицательно определенной.

Предположим, что существует ситуация равновесия $\mathbf{u}_1^0$, $\mathbf{u}_2^0$ и что эта ситуация получается из (25.19) и (25.20) при $\mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_{20}$, $\gamma = \gamma_0$, $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{10}$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{20}$. Легко установить, что для ситуаций $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ имеют место формулы

$$\mathbf{u}_1 = B_1^* [\lambda_2 (\mathbf{c}_{20} + \varepsilon_2 \bar{\mathbf{c}}_2) + \sigma_1 (\gamma_0 + \varepsilon_1 \bar{\gamma}) + \lambda] + \mathbf{V}_{10} + \varepsilon_1 \bar{\mathbf{V}}_1, \qquad (25.22)$$

$$\mathbf{u}_2 = B_2^* (\mathbf{c}_{20} + \varepsilon_2 \bar{\mathbf{c}}_2) + \mathbf{V}_{20} + \varepsilon_2 \bar{\mathbf{V}}_2, \qquad (25.23)$$

где $\bar{\mathbf{c}}_2$, $\bar{\gamma}$ — произвольные постоянные векторы, $\bar{\mathbf{V}}_i$ — произвольные векторные функции, ортогональные строкам матриц B_i; ε_1, ε_2 — вещественные параметры. Подставляя (25.22) и (25.23) в (25.1), (25.2), найдем затем решение этих уравнений и вычислим функционал (25.21). Тогда из условий равновесия будем иметь

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_2} = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0. \qquad (25.24)$$

Условия (25.24) являются необходимыми для того, чтобы ситуация $\mathbf{u}_1^{(0)}$, $\mathbf{u}_2^{(0)}$ была ситуацией равновесия.

Представим эти условия в развернутом виде. Тогда будем иметь

$$\int_0^T \left[\frac{\partial f_0}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial f_0}{\partial u_1}(B_1^*\sigma_1\bar{\gamma} + \bar{V}_1)\right] dt = 0,$$

$$\int_0^T \left[\frac{\partial f_0}{\partial x_1}\eta_1 + \frac{\partial f_0}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial f_0}{\partial u_1}B_1^*\lambda_2\bar{c}_2 + \frac{\partial f_0}{\partial u_2}(B_2^*\bar{c}_2 + \bar{V}_2)\right] dt = 0,$$

где $\xi_1 = \partial x_1/\partial\varepsilon_1$ при $\varepsilon_1 = 0$, $\eta_1 = \partial x_1/\partial\varepsilon_2$ при $\varepsilon_2 = 0$, $\xi_2 = \partial x_1/\partial\varepsilon_2$ при $\varepsilon_2 = 0$.

Таким образом, имеем

$$\xi_1 = Y_1\int_0^t B_1B_1^*\sigma_1\, dt\cdot\bar{\gamma} + Y_1\int_0^t B_1\bar{V}_1\, dt, \tag{25.25}$$

$$\eta_1 = Y_1\int_0^t B_1B_1^*\lambda_2\, dt\cdot\bar{c}_2, \tag{25.26}$$

$$\xi_2 = Y_2\int_0^t B_2B_2^*\, dt\cdot\bar{c}_2 + Y_2\int_0^t B_2\bar{V}_2\, dt. \tag{25.27}$$

Подставляя (25.25)—(25.27) в необходимые условия оптимальности и производя перестановку порядков интегрирования, получим

$$\int_0^T \left\{\left[\frac{\partial f_0}{\partial x_1}Y_1\int_0^t B_1B_1^*\sigma_1\, dt + \frac{\partial f_0}{\partial u_1}B_1^*\sigma_1\right]\bar{\gamma} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial f_0}{\partial u_1} + \int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x_1}Y_1\, dt\cdot B_1(t)\right]\bar{V}_1\right\} dt = 0, \tag{25.28}$$

$$\int_0^T \left\{\left[\frac{\partial f_0}{\partial x_1}Y_1\int_0^t B_1B_1^*\lambda_2\, dt + \frac{\partial f_0}{\partial x_2}Y_2\int_0^t B_2B_2^*\, dt + \frac{\partial f_0}{\partial u_1}B_1^*\lambda_2 + \frac{\partial f_0}{\partial u_2}B_2^*\right]\bar{c}_2 + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial f_0}{\partial u_2} + \int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x_2}Y_2\, d\tau B_2(t)\right]\bar{V}_2\right\} dt = 0. \tag{25.29}$$

Так как векторы $\bar{c}_2$ и $\bar{\gamma}$ являются произвольными, то из условий

(25.28), (25.29) получим необходимые условия следующего вида:

$$\int_0^T \left[\frac{\partial \mathfrak{f}_0}{\partial \mathfrak{x}_1} Y_1 \int_0^t B_1 B_1^* \sigma_1 \, dt + \frac{\partial \mathfrak{f}_0}{\partial \mathfrak{u}_1} B_1^* \sigma_1 \right] dt = 0, \qquad (25.30)$$

$$\int_0^T \left[\frac{\partial \mathfrak{f}_0}{\partial \mathfrak{x}_1} Y_1 \int_0^t B_1 B_1^* \lambda_2 \, dt + \frac{\partial \mathfrak{f}_0}{\partial \mathfrak{x}_2} Y_2 \int_0^t B_2 B_2^* \, dt + \frac{\partial \mathfrak{f}_0}{\partial \mathfrak{u}_1} B_1^* \lambda_2 + \frac{\partial \mathfrak{f}_0}{\partial \mathfrak{u}_2} B_2^* \right] dt = 0. \qquad (25.31)$$

Так как векторные функции $\bar{\mathbf{V}}_i$ ортогональны строкам матриц, то из условий (25.28) и (25.29) получим также

$$\frac{\partial \mathfrak{f}_0}{\partial \mathfrak{u}_1} + \int_t^T \frac{\partial \mathfrak{f}_0}{\partial \mathfrak{x}_1} Y_1 \, dt \, B_1(t) = \mu_1 B_1(t), \qquad (25.32)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{f}_0}{\partial \mathfrak{u}_2} + \int_t^T \frac{\partial \mathfrak{f}_0}{\partial \mathfrak{x}_2} Y_2 \, dt \, B_2(t) = \mu_2 B_2(t). \qquad (25.33)$$

Необходимые условия оптимальности (25.32), (25.33) можно рассматривать как линейные интегральные уравнения, служащие для определения функций $\mathbf{V}_{10}$, $\mathbf{V}_{20}$. Как было показано ранее, такие интегральные уравнения имеют единственное решение, так как матрицы H_1 и H_2, по предположению, являются неособыми. Далее постоянные матрицы μ_1 и μ_2 можно выбрать так, чтобы функции $\mathbf{V}_{i0}$ удовлетворяли условиям ортогональности строкам матриц B_i. После отыскания функций $\mathbf{V}_{i0}$ их можно исключить из уравнений (25.30), (25.31), которые будут являться линейными алгебраическими уравнениями, служащими для определения компонент векторов $\mathbf{c}_{20}$ и γ_0.

Естественно, что эти уравнения будут разрешимыми, если определитель системы будет отличен от нуля.

Предположим, что квадратичная форма

$$\int_0^T \mathfrak{f}_0^{(2)}(t, \bar{\xi}_1\gamma, 0, \bar{u}_1\gamma, 0) \, dt \qquad (25.34)$$

положительно определена, причем $\bar{\xi}_1 = Y_1 \int_0^t B_1 B_1^* \bar{\sigma}_1 \, dt$, а также предположим, что квадратичная форма

$$\int_0^T \mathfrak{f}_0^{(2)}(t, \bar{\eta}_1 \mathbf{c}_2, \bar{\eta}_2 \mathbf{c}_2, \bar{\bar{u}}_1 \mathbf{c}_2, \bar{\bar{u}}_2 \mathbf{c}_2) \, dt \qquad (25.35)$$

отрицательно определена, причем

$$\bar{\eta}_1 = Y_1 \int_0^t B_1 B_1^* \lambda_2 \, dt, \qquad \bar{\xi}_2 = Y_2 \int_0^t B_2 B_2^* \, dt,$$

$$\bar{\bar{u}}_1 = B_1^* \lambda_2, \qquad \bar{\bar{u}}_2 = B_2^*.$$

Тогда определитель системы (25.30), (25.31) будет отличен от нуля, и будет существовать, следовательно, единственное решение этой системы.

Итак, установлено, что необходимые условия оптимальности дают единственную ситуацию равновесия, удовлетворяющую этим условиям.

Теперь можно показать, что найденные здесь условия будут являться также достаточными.

Теорема 25.3. *Если квадратичные формы* $\mathbf{u}_1^* H_1 \mathbf{u}_1$ *и* $-\mathbf{u}_2^* H_2 \mathbf{u}_2$ *положительно определены и если квадратичная форма* (25.34) *положительно определена, а квадратичная форма* (25.35) *отрицательно определена, то при условии разрешимости задачи встречи существует ситуация равновесия в дифференциальной игре, определяемой функционалом* (25.21).

§ 26. Построение управлений в нелинейной задаче преследования

Рассмотрим сначала две квазилинейные управляемые системы

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = P_1 \mathbf{x}_1 + Q_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{f}_1 + \mu \mathbf{G}_1, \tag{26.1}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = P_2 \mathbf{x}_2 + Q_2 \mathbf{u}_2 + \mathbf{f}_2 + \mu \mathbf{G}_2. \tag{26.2}$$

В системах (26.1) и (26.2) векторные функции $\mathbf{G}_i$ заданы при $t \geqslant 0$, $\mathbf{x}_i \in E_{n_i}$, $\mathbf{u}_i \in E_{r_i}$, вещественны, непрерывны и непрерывно дифференцируемы относительно компонент векторов $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{u}_i$. Матрицы P_i, Q_i и векторы f_i обладают теми же свойствами, что и в системах (25.1), (25.2).

Пусть условие встречи имеет вид

$$H_1 \mathbf{x}_1 + \mu \varphi_1 = H_2 \mathbf{x}_2 + \mu \varphi_2 \quad \text{при} \quad t = T. \tag{26.3}$$

Здесь H_i — постоянные матрицы соответственно порядков $l \times n_i$, φ_i — векторные функции размерности l, обладающие теми же свойствами, что и векторные функции $\mathbf{G}_i$.

Предположим теперь, что начальные состояния $\mathbf{x}_{i0}$ располагаются в ограниченных областях Ω_{ni}, $i = 1, 2$, и управления имеют вид

$$\mathbf{u}_i = B_i^* \mathbf{c}_i + \mathbf{V}_i, \tag{26.4}$$

где c_i — постоянные векторы и V_i — непрерывные функции, удовлетворяющие условию ортогональности, и, кроме того, множеств векторов c_i и векторных функций V_i ограничено в совокупности.

Теорема 26.1. *Если выполнено условие теоремы 25.1 предыдущего параграфа, то существует число $\mu_0 > 0$ такое, что при всех $|\mu| < \mu_0$ будет существовать управление u_1, удовлетворяющие условию* (26.3).

Доказательство. Для начальных состояний x_{i0} и управлений (26.4) построим решение системы (26.1) и (26.2):

$$x_i = x_i(t, x_{i0}, c_i, \mu). \tag{26.5}$$

Заметим, что можно выбрать столь малое μ_1, что при $|\mu| < \mu_1$ решения (26.5) будут существовать при $t \in [0, T]$. Подставим (26.5) в (26.3). Будем искать решение (26.3) в форме

$$c_1 = [H_1 Y_1(T) A_1(0, T)]^* \gamma, \tag{26.6}$$

где γ — искомый постоянный вектор. Подставим (26.6) в (26.3). Легко видеть, что тогда (26.3) имеет единственное решение для вектора γ при $\mu = 0$. Далее якобиан, вычисленный от левой части по компонентам вектора γ при $\mu = 0$, отличен от нуля, так как он совпадает с определителем матрицы

$$H_1 Y_1(T) A_1(0, T) [H_1 Y_1(T) A_1(0, T)]^*.$$

Отсюда следует, что можно указать $\mu_0 > 0$ такое, что при $|\mu| < \mu_0$ (26.3) будет определять единственным образом векторную функцию γ. Эта векторная функция определяет управление

$$u_1 = B_1^* [H_1 Y_1(T) A_1(0, T)]^* \cdot \gamma + V_1, \tag{26.7}$$

которое и будет осуществлять решение задачи встречи, что и требовалось доказать.

Замечание. При доказательстве теоремы 26.1 указан способ построения одного из управлений u_1, разрешающих задачу встречи.

Покажем, что существует, вообще говоря, целое семейство таких управлений, а именно, это семейство будет зависеть от $n - l$ произвольных постоянных, где l — число строк матрицы

$$S_1 = H_1 Y_1(T) A_1(0, T).$$

Действительно, будем искать решение системы (26.3) в форме

$$c_1 = S_1^* \gamma + \sigma_1 \delta, \tag{26.8}$$

где σ_1 — матрица, столбцы которой ортогональны строкам матрицы S_1, $S_1 \sigma_1 = 0$.

При этом считаем, что σ_1 имеет $n - l$ линейно независимых столбцов. δ — постоянный вектор размерности $n - l$. Подставляя

(26.8) в (26.3), найдем, что (26.3) имеет решение при $\mu=0$ относительно γ, и якобиан, вычисленный по отношению к компонентам вектора γ при $\mu=0$, отличен от нуля для любого вектора δ. Следовательно, (26.3) будет иметь решение в форме (26.8), причем γ будет функцией векторов c_2, δ и параметра μ.

Рассмотрим теперь дифференциальную игру.

Пару управлений u_1, u_2, удовлетворяющую (26.3), будем называть *допустимой ситуацией*. Таким образом, допустимая ситуация определяется формулами

$$u_1=B_1^*[S_1^*\gamma+\sigma_1\delta]+V_1, \qquad u_2=B_2^*c_2+V_2. \tag{26.9}$$

Допустимая ситуация u_1^0, u_2^0 называется *ситуацией равновесия по отношению к функционалу* $J(u_1, u_2)$, если имеет место

$$\min_{u_1}\max_{u_2} J(u_1, u_2)=\max_{u_2}\min_{u_1} J(u_1, u_2)=J(u_1^0, u_2^0). \tag{26.10}$$

Заметим, что в (26.10) min max и max min берется по множеству допустимых ситуаций.

Положим далее

$$J(u_1, u_2)=\int_0^T(f_0+\mu G_0)\,dt, \tag{26.11}$$

где f_0 — функция, рассматриваемая в § 25, G — вещественная, непрерывная, заданная при $t\geqslant 0$, $u_i\in E_{r_i}$, $x_i\in E_{n_i}$ функция, непрерывно дифференцируемая по отношению к компонентам этих векторов, μ — малый параметр.

Теорема 26.2. *Если выполнено условие теоремы* 25.3, *то существует число* $\mu_0>0$ *такое, что при любом* $|\mu|<\mu_0$ *существует ситуация равновесия* u_1^0, u_2^0 *по отношению к функционалу* (26.11).

Доказательство. Выведем сначала необходимое условие существования ситуации равновесия. Для этого предположим, что эта ситуация определяется формулой (26.9) при $c_2=c_{20}$, $\delta=\delta_0$, $V_1=V_{10}$. Положим в (26.4) $V_i=V_{i0}+\varepsilon_i\overline{V}_i$, $V_2=V_{20}+\varepsilon_2\overline{V}_2$, где $\overline{V}_i$ — непрерывные функции, ортогональные строкам матрицы B_i.

Подставляя (26.4) в систему (26.1) и (26.2), а затем разыскивая решение и подставляя в (26.3), найдем, что вектор γ, входящий в (26.8), будет не только функцией векторов c_2 и δ, но и функцией параметров ε_i.

Вычислим функционал (26.11) при управлениях, определяемых формулами (26.9). Тогда будем иметь

$$J=J(c_2, \delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Из условий равновесия ситуаций u_1^0, u_2^0 имеем

$$\frac{\partial J}{\partial c_2}=0, \quad \frac{\partial J}{\partial \delta}=0, \quad \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_1}=0, \quad \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_2}=0$$

при

$$c_2=c_{20}, \quad \delta=\delta_0, \quad \varepsilon_1=0, \quad \varepsilon_2=0.$$

Эти необходимые условия приводят к нелинейным интегральным уравнениям для определения функций V_{i0}. При достаточно малых значениях параметра μ эти интегральные уравнения имеют единственное непрерывное решение, причем будут соблюдены условия ортогональности этих решений строкам соответствующих матриц B_i.

Далее из этих же необходимых условий определяются векторы c_2 и δ как неявные функции параметра μ, так как соответствующий якобиан, по предположениям теоремы 25.3, при $\mu=0$ будет отличным от нуля.

Таким образом, необходимые условия дают при достаточно малых значениях μ единственную допустимую ситуацию вида (26.9), в которой будет $c_2=c_2(\mu)$, $\delta=\delta(\mu)$, $V_{i0}=V_{i0}(\mu)$.

При условиях теоремы 25.3 можно показать также, что эта допустимая ситуация будет обязательно ситуацией равновесия.

Глава V

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

§ 27. Метод последовательных приближений для отыскания оптимальных программных движений

Предположим, что задан некоторый управляемый объект, движение которого описывается некоторой системой дифференциальных уравнений

$$dx/dt = f(x, u, t). \tag{27.1}$$

Пусть фазовые координаты $x_1, \ldots, x_n$ и управления $u_1, \ldots, u_r$ этого объекта стеснены некоторыми ограничениями вида

$$g_i(x, u, t) \leqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, k). \tag{27.2}$$

В качестве допустимых управлений можно рассматривать всевозможные кусочно-непрерывные функции $u(t)$, которым отвечают движения $x(t)$, удовлетворяющие совместно с $u(t)$ системе (27.1) и ограничению (27.2). Требуется найти управление $u_0(t)$ и соответствующее ему движение $x_0(t)$, $t \in [0, T]$, $x_0(t) = x_0$ при $t = 0$, где x_0—заданная точка фазового пространства, которые удовлетворяли бы на всем движении системе (27.1) и ограничениям (27.2) и чтобы управление u_0 доставляло функционалу

$$J = p(x(T)) + \int_0^T f_0(x, u, t)\,dt \tag{27.3}$$

наименьшее возможное значение, т. е. чтобы было

$$J(u) \geqslant J(u_0). \tag{27.4}$$

Определение 27.1. *Всякую последовательность допустимых управлений $u_1(t)$, $u_2(t)$, ... будем называть минимизирующей, если последовательность чисел $J(u_1)$, $J(u_2)$, ... не возрастает.*

Предложенный ниже метод последовательных приближений заключается в последовательном построении членов минимизирующих последовательностей.

Пусть $u_1(t)$—некоторое допустимое управление и $x_1(t)$—соответствующее ему движение. Система уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_1(t), t), \tag{27.5}$$

вообще говоря, для каждого начального вектора $\mathbf{x}_0$ определяет решение

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\ \mathbf{x}_0). \tag{27.6}$$

Рассмотрим систему (27.5) совместно с уравнением

$$dV_1/dt=-f_0(\mathbf{x},\ \mathbf{u}_1(t),\ t). \tag{27.7}$$

Построим интеграл системы (27.5)—(27.7) следующим образом: подставим (27.6) в правую часть (27.7) и найдем функцию V_1 с начальным условием

$$V_1=p(\mathbf{x}(T,\ \mathbf{x}_0)) \quad \text{при} \quad t=T.$$

Тогда получим

$$V_1=\overline{V}_1(t,\ \mathbf{x}_0)=p(\mathbf{x}(T,\ \mathbf{x}_0))+\int_t^T f_0(\mathbf{x}(\tau,\ \mathbf{x}_0),\ \mathbf{u}_1(\tau),\ \tau)\,d\tau. \tag{27.8}$$

Найдем вектор $\mathbf{x}_0$ из (27.6):

$$\mathbf{x}_0=\Phi(\mathbf{x},\ t) \tag{27.9}$$

и затем, пользуясь (27.9), исключим вектор $\mathbf{x}_0$ из (27.8). Получим

$$V_1(\mathbf{x},\ t)=\overline{V}_1(t,\Phi(\mathbf{x},\ t))=p(\mathbf{x}(T,\ \Phi(\mathbf{x},\ t)))+\\+\int_t^T f_0(\mathbf{x}(\tau,\ \Phi(\mathbf{x},\ t)),\ \mathbf{u}_1(\tau),\ \tau)\,d\tau. \tag{27.10}$$

В формуле (27.10) вектор $\mathbf{x}$ рассматривается как параметр. Покажем, что величина

$$z=V_1-V_1(x,\ t),$$

рассматриваемая как функция $n+2$ переменных $V_1,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t$, является интегралом системы (27.5)—(27.7), т. е. она сохраняет на движениях этой системы постоянное значение. Если взять решение системы (27.5)—(27.7) в форме

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,x_0),\qquad V_1=V_1^{(0)}-\int_0^t f_0(\mathbf{x}(\tau,\ \mathbf{x}_0),\ \mathbf{u}_1(\tau),\ \tau)\,d\tau, \tag{27.11}$$

то

$$z=V_1^{(0)}-J(\mathbf{u}_1).$$

Следовательно, величина z сохраняет постоянное значение. При этом она принимает значение „нуль“ на всех движениях, для которых

$$V_1=p(\mathbf{x}(T,\ \mathbf{x}_0)) \quad \text{при} \quad t=T.$$

Следовательно, будем иметь, с одной стороны,

$$V_1^{(0)} - V_1(0, \mathbf{x}^{(0)}) = 0,$$

и с другой —

$$V_1^{(0)} = J(\mathbf{u}_1).$$

Тогда построенная выше функция $V_1(\mathbf{x}, t)$ будет обладать свойством

$$V_1(\mathbf{x}^{(0)}, 0) = J(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}). \tag{27.12}$$

Аргумент $\mathbf{x}$ в формуле (27.12) означает, что функционал J вычисляется при управлении $\mathbf{u}_1$ вдоль движения (27.6).

Если правые части системы (27.1) непрерывно дифференцируемы по $x_1, \ldots, x_n$, то функция $V_1(\mathbf{x}, t)$ также будет непрерывно дифференцируема, во всяком случае, в некоторой окрестности движения $\mathbf{x}_1(t)$. Это, разумеется, имеет место, когда также непрерывно дифференцируемы функции p и f_0, что будет установлено далее. Из того, что величина z является интегралом системы (27.5)—(27.7), будет вытекать тождество

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial x_s} f_s(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, t) + f_0 \equiv 0. \tag{27.13}$$

При этом, если функция $V_1(\mathbf{x}, t)$ определена всюду, то тождество (27.13) имеет место также всюду, а не только вдоль интегральных кривых системы уравнений. Действительно, пусть $\bar{t} \in [0, T]$ — некоторый момент времени и $\bar{\mathbf{x}}$ — некоторая точка фазового пространства. Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$ — решение системы (27.5) с начальным условием $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ при $t = \bar{t}$. Положим $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$. Тогда решение (27.6) будет проходить через точку $\bar{\mathbf{x}}$ при $t = \bar{t}$. Следовательно, (27.13) будет иметь место при $t = \bar{t}$, $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$.

Установим теперь дифференциальные свойства функции $V_1(\mathbf{x}, t)$. Пусть компоненты вектора $\mathbf{f}$ и функций p и f_0 непрерывно дифференцируемы q раз всюду по переменным $x_1, \ldots, x_n$, причем эти производные являются также непрерывными функциями относительно $\mathbf{u}$ и t. Пусть также $\mathbf{u}_1(t)$ — допустимое управление, $\mathbf{x}_1(t)$ — соответствующее ему движение. Положим

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1(0) + \mathbf{c},$$

где $\mathbf{c}$ — вектор $(c_1, \ldots, c_n)$ с вещественными компонентами. При достаточно малых $c_1, \ldots, c_n$ решение (27.6) будет определено при $t \in [0, T]$ и q раз непрерывно дифференцируемо по $c_1, \ldots, c_n$. Якобиан функций (27.6) по $c_1, \ldots, c_n$ при $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ обращается в единицу при $t = 0$, поэтому функция $\Phi(\mathbf{x}, t)$ существует и q раз непрерывно дифференцируема по $x_1, \ldots, x_n$ в неко-

торой достаточно малой окрестности решения $x_1(t)$. Из вида функции $V_1(x, t)$, определяемой из (27.10), вытекает тогда, что $V_1(x, t)$ дифференцируема q раз относительно $x_1, \ldots, x_n$.

Перейдем теперь к построению последовательных приближений. Найдем управление $\bar{u}_2(x, t)$, оптимальное по отношению к демпфированию функции

$$V_1(x, t)+\int_0^t f_0\,d\tau.$$

Это управление будет доставлять наименьшее возможное значение функции

$$W_1(x, u, t)=\frac{\partial V_1}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V_1}{\partial x_s}f_s(x, u, t)+f_0(u, x, t) \tag{27.14}$$

при условии выполнения ограничений (27.2). Положим в системе (27.1) $u=\bar{u}_2(x, t)$. Предположим, что полученная система имеет решение

$$x=x_2(t), \qquad x_2(0)=x_0, \tag{27.15}$$

заданное при $t\in[0, T]$, и пусть

$$u_2(t)=\bar{u}_2(x_2(t), t). \tag{27.16}$$

Будем считать, что управление (27.16) и соответствующее ему движение $x_2(t)$ являются допустимыми. С помощью управления $u_2(t)$ построим функцию $V_2(x, t)$ точно так же, как была построена функция $V_1(x, t)$ с помощью управления $u_1(t)$. Найдем управление $\bar{u}_3(x, t)$, доставляющее наименьшее возможное значение функции

$$W_2(x, u, t)=\frac{\partial V_2}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V_2}{\partial x_s}f_s(u, x, t)+f_0(x, u, t). \tag{27.17}$$

Подставим управление $\bar{u}_3$ в систему (27.1). Построим решение полученной системы:

$$x_3(t),\ t\in[0, T], \qquad x_3(0)=x_0 \tag{27.18}$$

и положим

$$u_3(t)=\bar{u}_3(x_3(t), t).$$

Продолжая этот процесс далее, получим две последовательности: последовательность управлений $u_1(t), u_2(t), \ldots$ и последовательность соответствующих им решений

$$x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots$$

Получим также последовательность функций

$$V_1(\mathbf{x},\ t),\ V_2(\mathbf{x},\ t),\ \ldots$$

Эти последовательности связаны между собой: $\mathbf{x}_l(t)$ является решением системы (27.1) при $\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}_l(\mathbf{x},\ t)$, где $\bar{\mathbf{u}}_l(\mathbf{x},\ t)$ доставляет наименьшее возможное значение функции

$$W_{l-1}=\frac{\partial V_{l-1}}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V_{l-1}}{\partial x_s}f_s(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t)+f_0(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t)$$

при ограничении (27.2), $\mathbf{u}_l(t)=\bar{\mathbf{u}}_l(\mathbf{x}_l(t),\ t)$.

Теорема 27.1. *Если проведенное выше построение оказывается возможным при любом $l=1,\ 2,\ \ldots$, то возникающая в результате этого построения последовательность управлений $\mathbf{u}_1(t)$, $\mathbf{u}_2(t)$, ... является минимизирующей.*

Доказательство. Функция $W_l(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$ тождественно обращается в нуль при $\mathbf{u}=\mathbf{u}_l(t)$, поэтому при $\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}_{l+1}(\mathbf{x},\ t)$ будет $W_l\leqslant 0$. Следовательно, также будет

$$W_l(\mathbf{x}_{l+1}(t),\quad \mathbf{u}_{l+1}(t),\ t)\leqslant 0.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по $t\in[0,\ T]$ и получим

$$\int_0^T W_l(\mathbf{x}_{l+1},\ \mathbf{u}_{l+1},\ t)\,dt=V_l(\mathbf{x}_{l+1}(T),\ T)-V_l(\mathbf{x}_0,\ 0)+$$
$$+\int_0^T f_0(\mathbf{x}_{l+1},\mathbf{u}_{l+1},\ t)\,dt=p(\mathbf{x}_{l+1}(T))+$$
$$+\int_0^T f(\mathbf{x}_{l+1},\mathbf{u}_{l+1},\ t)\,dt-V_l(\mathbf{x}_1,\ 0)\leqslant 0. \quad (27.19)$$

Из (27.19) имеем

$$V_l(\mathbf{x}_1,\ 0)\geqslant J(\mathbf{u}_{l+1},\ \mathbf{x}_{l+1}).$$

С другой стороны,

$$V_l(\mathbf{x}_1,\ 0)=J(\mathbf{u}_l,\ \mathbf{x}_l).$$

Следовательно, последовательность чисел

$$J(\mathbf{u}_l,\ \mathbf{x}_l),\quad l=1,\ 2,\ \ldots,$$

будет невозрастающей; и поэтому последовательность управлений $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ... будет минимизирующей. Рассмотрим теперь несколько подробнее тот случай, когда система (27.1) является линейной:

$$\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u}+\mathbf{f}(t), \qquad (27.20)$$

а функции p и f_0 являются полиномами относительно $x_1, \ldots, x_n$ порядка s, причем коэффициенты полинома f_0 будем считать непрерывными функциями переменных $u_1, \ldots, u_r, t$.

Пусть ограничения (27.2) имеют вид

$$|u_i| \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{27.21}$$

Если $\mathbf{u}_1(t)$ — кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая (27,21), то система (27.20) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1(t)$ имеет решение (27.6), которое будет являться линейной функцией вектора $\mathbf{x}_0$.

Построим функцию $V_1(\mathbf{x}, t)$, соответствующую управлению $\mathbf{u}_1(t)$. Эта функция является полиномом относительно величин $x_1, \ldots, x_n$ порядка s с непрерывными относительно t коэффициентами. Действительно, функция $\overline{V}_1(t, \mathbf{x}_0)$ является полиномом порядка s относительно величин $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$, вектор $\mathbf{x}_0$ является линейной функцией относительно $\mathbf{x}$, так как функция $\Phi(t, \mathbf{x})$ линейна относительно $\mathbf{x}$. Отсюда вытекает, что функция

$$V_1(\mathbf{x}, t) = \overline{V}_1(t, \Phi(\mathbf{x}, t))$$

является полиномом порядка s. Итак, положим

$$V_1(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=0}^{s} V_1^{(m)}, \tag{27.22}$$

где $V_1^{(m)}$ — однородные формы порядка m относительно $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами, непрерывными относительно t и подлежащими определению из условий

$$V_1 = p(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = T$$

и

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial x_s}(A\mathbf{x} + B\mathbf{u}_1 + \mathbf{f}(t))_s + f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1(t), t) = 0. \tag{27.23}$$

Подставляя (27.22) в (27.23) и приравнивая формы одинаковой степени относительно величин $x_1, \ldots, x_n$, найдем систему линейных уравнений

$$\frac{\partial V_1^{(m)}}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial V_1^{(m)}}{\partial x_s}(A\mathbf{x})_s + \frac{\partial V_1^{(m)}}{\partial x_s}(B\mathbf{u}_1 + \mathbf{f}(t))_s \right] + f_0^{(m)} = 0,$$

$$m = 0, \ldots, s-1, \tag{27.24}$$

$$\frac{\partial V_1^{(s)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_1^{(s)}}{\partial x_i}(A\mathbf{x})_i + f_0^{(s)} = 0. \tag{27.25}$$

Пусть $p(\mathrm{x})=\sum_{m=0}^{s} p^{(m)}$, $p^{(m)}$ и $f_0^{(m)}$ — однородные формы степени m относительно $x_1, \ldots, x_n$. Начальные условия определяются из равенства

$$V_1^{(m)}=p^{(m)} \quad \text{при} \quad t=T.$$

Уравнения (27.24) и (27.25) служат для определения коэффициентов форм $V_1^{(m)}$ и являются линейными. Следовательно, они имеют единственное решение, заданное при $t \in [0, T]$. Этим функция $V_1(\mathrm{x}, t)$ определяется полностью. Если форма $f_0^{(s)}$ не зависит от управлений, то и форма $V_1^{(s)}$ не будет зависеть от управлений и для всех приближений будет иметь место равенство

$$V_1^{(s)}=V_l^{(s)}.$$

Линейные уравнения, служащие для определения коэффициентов форм $V_1^{(m)}$, будем далее обозначать символом (*) и считать в них $\mathrm{u}_1(t)$ некоторым управлением.

Выберем управление $\bar{\mathrm{u}}_2(\mathrm{x}, t)$ так, чтобы оно доставляло функции $W_1(\mathrm{x}, \mathrm{u}, t)$ наименьшее возможное значение и удовлетворяло (27.21). Подставим управление $\mathrm{u}_2(\mathrm{x}, t)$ в систему (27.20). Предположим, что полученная нелинейная система имеет решение

$$\mathrm{x}_2(t), \quad t \in [0, T].$$

Положим

$$\mathrm{u}_2(t)=\bar{\mathrm{u}}_2(\mathrm{x}_2(t), t). \tag{27.26}$$

Пользуясь $\mathrm{u}_2(t)$, с помощью линейной системы (*) можно построить функцию $V_2(\mathrm{x}, t)$. Продолжая этот процесс далее, построим минимизирующую последовательность управлений. В этом случае, когда функция f_0 не зависит от управлений, управление $\bar{\mathrm{u}}_{l+1}(\mathrm{x}, t)$ определяется в явном виде с помощью формул

$$(\bar{\mathrm{u}}_{l+1}(\mathrm{x}, t))_j=-\operatorname{sign}\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_l}{\partial x_s} b_{sj}\right). \tag{27.27}$$

Положим далее

$$\sigma_j=\sigma_j(\mathrm{x})=\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_l}{\partial x_s} b_{sj}, \quad j=1, \ldots, n. \tag{27.28}$$

Рассмотрим тот случай, когда f_0 не зависит от управлений. Пусть построение последовательностей $\mathrm{u}_l(t)$, $\mathrm{x}_l(t)$ оказывается возможным. Тогда ввиду равномерной ограниченности множества функций $\mathrm{u}_l(t)$, $l=1, 2, \ldots$, функции x_l и коэффициенты полиномов V_l будут равномерно ограничены и равностепенно непрерывны при $t \in [0, T]$. Следовательно, из них можно выбрать подпоследовательности, сходящиеся равномерно при $t \in [0, T]$. Пусть именно $\mathrm{x}_l(t)$, $Y_l(t)$, $l=1, 2, \ldots$, и есть эти последовательности.

Тогда

$$\mathbf{x}_l \to \mathbf{x}_0(t) \text{ при } l \to +\infty, \quad V_l \to V_0(\mathbf{x}, t) \quad \text{при} \quad l \to +\infty$$

равномерно для $t \in [0, T]$. Обозначим через $u_j^{(0)}$ функции

$$u_j^{(0)} = -\operatorname{sign} \sigma_j(\mathbf{x}_0(t)), \tag{27.29}$$

причем будем считать $\operatorname{sign} \alpha = 0$ при $\alpha = 0$.

Пусть E_δ — множество всех точек $t \in [0, T]$, для которых

$$|\sigma_j(\mathbf{x}_0(t))| \geqslant \delta, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Тогда оказывается, что можно указать число l_δ, обладающее свойством $\mathbf{u}_l(t) = \mathbf{u}_0(t)$ при $t \in E_\delta$ для любого $l > l_\delta$, иначе говоря, на множестве E_δ при любом $\delta > 0$ последовательность управлений $\mathbf{u}_l$ при $l \geqslant l_\delta$ не меняется и становится равной $\mathbf{u}_0(t)$. Действительно, из равномерной сходимости $\mathbf{x}_l(t)$ к $\mathbf{x}_0(t)$ будет вытекать равномерная сходимость последовательностей

$$\sigma_j(\mathbf{x}_l) \quad \text{к} \quad \sigma_j(\mathbf{x}_0), \quad j = 1, \ldots, r.$$

Следовательно, по числу δ можно указать $l_\delta > 0$ такое, что

$$\sigma_j(\mathbf{x}_l) - \sigma_j(\mathbf{x}_0) \leqslant \frac{1}{2}\delta \quad \text{при} \quad l \geqslant l_\delta.$$

Но тогда при $t \in E_\delta$ будет

$$\operatorname{sign} \sigma_j(\mathbf{x}_l) = \operatorname{sign} \sigma_j(\mathbf{x}_0).$$

Следовательно,

$$\mathbf{u}_l(t) = \mathbf{u}_0(t), \quad t \in E_\delta, \quad l \geqslant l_\delta.$$

Далее, если множество F нулей функций $\sigma_j(\mathbf{x}_0(t))$, $j = 1, \ldots, r$, имеет меру нуль, то оказывается, что $\mathbf{u}_l(t) \to \mathbf{u}_0(t)$ по мере. Иначе говоря, по $\varepsilon > 0$ и $\delta_1 > 0$ можно указать l_1 такое, что мера множества всех t, для которых

$$\|\mathbf{u}_l(t) - \mathbf{u}_0(t)\| \geqslant \varepsilon,$$

не будет превосходить δ_1 при $l \geqslant l_1$. Действительно, множество F располагается в дополнении E_δ ко всему промежутку $[0, T]$ при любом $\delta \geqslant 0$.

Обозначим это дополнение через $\bar{E}_\delta$. Ввиду того, что $\operatorname{mes} F = 0$, $\operatorname{mes} \bar{E}_\delta$ сколь угодно мала, если δ достаточно мало. При $t \in E_\delta$ имеет место равенство

$$\mathbf{u}_l(t) - \mathbf{u}_0(t) = 0 \quad \text{при} \quad l \geqslant l_0(\delta).$$

Следовательно, неравенство

$$\|\mathbf{u}_l(t) - \mathbf{u}_0(t)\| > \varepsilon$$

может иметь место лишь во множестве $\bar{E}_\delta$, меру которого можно сделать за счет выбора δ меньше наперед заданного числа. Этим сходимость по мере $\mathrm{u}_l(t)$ к $\mathrm{u}_0(t)$ доказана полностью.

Отметим тот случай, когда $\operatorname{mes} F=0$. Этот случай бывает, например, когда элементы матриц A, B и компоненты $\mathrm{f}(t)$, а также коэффициенты функции являются аналитическими функциями при $t \in [0, T]$ и f_0 линейна относительно $x_1, \ldots, x_n$. Более того, в этом случае множество F будет конечным. Действительно, обозначим через λ_{sl} функции

$$\partial V_l/\partial x_s, \quad s=1, \ldots, n.$$

Тогда эти функции вдоль кривых $\mathrm{x}_l(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d}{dt}\lambda_{sl}=-\sum_{j=1}^{n} a_{js}\lambda_{js}-\frac{\partial f_0}{\partial x_s}, \quad s=1, \ldots, n. \tag{27.30}$$

Функции λ_{s0}, следовательно, удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d}{dt}\lambda_{s0}=-\sum_{j=1}^{n} a_{js}\lambda_{j0}-\frac{\partial f_0}{\partial x_s}, \quad s=1, \ldots, n. \tag{27.31}$$

Из (27.31) вытекает, что функции λ_{s0} являются аналитическими при $t \in [0, T]$ и, следовательно, аналитическими будут функции

$$\sigma_j(\mathrm{x}_0)=\sum_{s=1}^{n}\lambda_{s0}b_{sj}.$$

Известно, что аналитические функции на конечном промежутке имеют разве лишь конечное число нулей, если они не тождественно равны нулю. Итак, вообще говоря, множество F будет конечным.

Перейдем теперь к изучению управления $\mathrm{u}_0(t)$. Введем в рассмотрение функцию

$$W_0(\mathrm{x}, \mathrm{u}, t)=\frac{\partial V_0}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V_0}{\partial x_s}(A\mathrm{x}+B\mathrm{u}+\mathrm{f}(t))_s+f_0.$$

Вектор $\mathrm{u}_0(t)$ доставляет $W_0(\mathrm{x}_0(t), \mathrm{u}, t)$ наименьшее возможное значение при любом фиксированном $t \in [0, T]$, причем этим наименьшим возможным значением является нуль. Иначе говоря, может иметь место соотношение

$$\inf_{\mathrm{u}} W_0(\mathrm{x}_0, \mathrm{u}, t)=W_0(\mathrm{x}_0, \mathrm{u}_0, t)\equiv 0, \; t \in [0, T]. \tag{27.32}$$

Покажем, что (27.32) действительно имеет место. Если $u_{0j} \neq 0$, то и $u_{lj}(t) \neq 0$, во всяком случае, начиная с $l \geqslant l_0$. Выберем вектор $u_0(t)$ так, что

$$\inf_{\mathbf{u}} W(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = W(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t).$$

Остается показать, что

$$W_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t) \equiv 0.$$

При $l \to +\infty$ предел $W_l(\mathbf{x}_l, \mathbf{u}_l, t)$ равен $W_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)$ при любом таком t, что $u_{j0} \neq 0$ по крайней мере для одного значения $j = 1, \ldots, r$. С другой стороны,

$$W_l(\mathbf{x}_l, \mathbf{u}_l, t) \equiv 0,$$

следовательно,

$$W_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t) \equiv 0.$$

Этим (27.32) доказано.

Покажем теперь, что управление $\mathbf{u}_0$ доставляет функционалу J наименьшее значение по сравнению со всеми другими управлениями, достаточно мало отличающимися от управления $\mathbf{u}_0$ на множестве E_δ. Компоненты вектора являются суммируемыми функциями на $[0, T]$, ибо они ограничены и измеримы, так как функции $\sigma_j(\mathbf{x}_0)$ непрерывны. Следовательно, $\operatorname{sign} \sigma_j(\mathbf{x}_0)$ — измеримая функция.

Пусть $\bar{\mathbf{u}}(t)$ — произвольная суммируемая функция, отличающаяся от функции $\mathbf{u}_0$ разве лишь на множестве E_δ. Пусть также

$$|\bar{u}_j| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad |\mathbf{u}_0 - \bar{\mathbf{u}}| < \varepsilon.$$

при $t \in E_\delta$. Покажем, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ будет

$$J(\mathbf{u}_0, \mathbf{x}_0) \leqslant J(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{x}}).$$

Действительно, введем в рассмотрение функцию

$$\alpha(t) = W_0(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}(t), t). \tag{27.33}$$

Утверждение будет доказано, если при достаточно малом $\varepsilon > 0$ будет

$$\int_0^T \alpha(t)\,dt \geqslant 0.$$

Это обстоятельство вытекает из следующего рассуждения. Проинтегрируем (27.33). Тогда будем иметь

$$\int_0^T W_0(\bar{x}, \bar{u}, t)\,dt = \int_0^T \frac{dV_0(\bar{x}(t), t)}{dt} + \int_0^T f_0(\bar{x}(t), t)\,dt =$$

$$= p(\bar{x}(T)) - V_0(x, 0) + \int_0^T f_0(\bar{x}, t)\,dt = J(\bar{u}, \bar{x}) - J(u_0, x_0).$$

Итак, если

$$\int_0^T \alpha(t)\,dt \geqslant 0,$$

то

$$J(\bar{u}, \bar{x}) \geqslant J(u_0, x_0).$$

Оценим величину интеграла $\int_0^T \alpha(t)\,dt$. Ясно, что

$$W_0(\bar{x}, \bar{u}, t) = W_0(\bar{x}, u_0, t) + \sum_{j=1}^{r} \sigma_j(\bar{x})(\bar{u}_j - u_j^{(0)}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sigma_j(\bar{x})(\bar{u}_j - u_j^{(0)}).$$

Последнее имеет место, так как $W_0(\bar{x}, \bar{u}_0, t) = 0$ при любом x и $t \in [0, T]$. Далее имеем

$$W_0(\bar{x}, \bar{u}, t) = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j(x_0)(\bar{u}_j - u_j^{(0)}) + \sum_{j=1}^{r} (\sigma_j(\bar{x}) - \sigma_j(x_0))(\bar{u}_j - u_j^{(0)}). \tag{27.34}$$

Первое слагаемое в (27.34) может быть оценено следующим образом:

$$\int_0^T \sum_{j=1}^{r} \sigma_j(x_0)(\bar{u}_j - u_j^{(0)})\,dt \geqslant \delta \int_{E_\delta} \sum_{j=1}^{r} |\bar{u}_j - u_j^{(0)}|\,dt.$$

Эта оценка имеет место потому, что при любом j

$$\sigma_j(x_0)(\bar{u}_j - u_j^{(0)}) \geqslant 0,$$

т. е.

$$\operatorname{sign} \sigma_j(x_0) = \operatorname{sign} \sigma_j(x_0)(\bar{u}_j - u_j^{(0)}),$$

откуда

$$\sigma_j(x_0)(\bar{u}_j - u_j^{(0)}) = |\sigma_j(x_0)|\,|\bar{u}_j - u^{(0)}|.$$

Легко видеть, что

$$|\sigma_j(\bar{x})-\sigma_j(x_0)|<a\varepsilon \quad \text{при} \quad t\in[0,\ T].$$

Выбрав $\varepsilon<\delta/a$, найдем, что при таких ε

$$J(\bar{u},\ \bar{x})\geqslant J(u_0,\ x_0),$$

что и требовалось доказать.

Аналогичные результаты могут быть получены путем соответствующих рассмотрений, когда элементы матрицы B являются линейными функциями относительно $x_1,\ \ldots,\ x_n$. Действительно, в этом случае величины b_{sj} будут линейно зависеть от $x_1,\ \ldots,\ x_n$, однако функции V_l по-прежнему будут оставаться полиномами; и все сделанные выше выводы, за исключением свойств старших форм, входящих в функции V_l, будут оставаться в силе. Эти формы будут также в таком случае зависеть от управлений, если даже старшие формы, входящие в функции f_0, не зависят от управлений.

Приведенные выше рассуждения в полной мере относятся и к нелинейным системам, правые части которых линейно зависят от управлений. Если правые части таких систем являются аналитическими функциями относительно $x_1,\ \ldots,\ x_n$, то функции V_l также будут являться аналитическими относительно $x_1,\ \ldots,\ x_n$. Для их построения будет требоваться решение счетного числа линейных дифференциальных уравнений возрастающего порядка. Это обстоятельство является весьма затруднительным при практическом использовании предлагаемого способа последовательных приближений в нелинейном случае.

Перейдем к рассмотрению другой задачи. Пусть заданы система

$$\dot{x}=f(u,\ x,\ t), \tag{27.35}$$

где $f\equiv 0$ при $x=0$, и система ограничений

$$g_j(x,\ u,\ t)\leqslant 0, \quad j=1,\ \ldots,\ k. \tag{27.36}$$

Требуется при заданном начальном условии x_1 построить управление $u_0(t)$ и отвечающее ему движение $x_0(t)$ так, чтобы были выполнены ограничения (27.36), x_0, u_0 удовлетворяли системе (27.35), нулевое решение системы (27.35) было асимптотически устойчиво при $u=u_0(t)$ и чтобы среди всех таких управлений $u_0(t)$ и соответствующее ему движение $x_0(t)$ доставляли наименьшее возможное значение функционалу

$$J=\int_0^{+\infty} f_0(x,\ u,\ t)\,dt. \tag{27.37}$$

Построение минимизирующей последовательности в общих чертах остается таким же, как и ранее. Если управление $\mathbf{u}_l(t)$ и соответствующее ему движение $\mathbf{x}_l(t)$ уже построены, то строится функция $V_l(\mathbf{x}, t)$, которая вдоль интегральных кривых системы (27.34) при $\mathbf{u}=\mathbf{u}_l(t)$ удовлетворяет уравнению

$$V_l(\mathbf{x}, t)=\int_t^\infty f_0\,dt.$$

Функция $\overline{\mathbf{u}}_{l+1}(\mathbf{x}, t)$ выбирается из условия, что при

$$\mathbf{u}=\overline{\mathbf{u}}_{l+1}(\mathbf{x}, t)$$

функция $W(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ принимает наименьшее возможное значение с учетом ограничений (27.36). Далее рассматривается система уравнений (27.35) при управлении $\mathbf{u}=\mathbf{u}_{l+1}(\mathbf{x}, t)$, строится решение этой системы $\mathbf{x}=\mathbf{x}_{l+1}(t)$, проходящее через точку $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1$ при $t=0$.

Полагаем

$$\mathbf{u}_{l+1}(t)=\overline{\mathbf{u}}_{l+1}(\mathbf{x}_{l+1}(t), t).$$

Управление $\mathbf{u}_{l+1}(t)$ и соответствующее ему движение $\mathbf{x}_{l+1}(t)$, если они допустимы, образуют новое приближение. Если подобное построение оказывается возможным при любом l, то последовательность $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_l, \ldots$ будет минимизирующей. Наиболее трудным местом в этом алгоритме является построение функции V_l, и даже вопрос о ее существовании требуется рассматривать особо.

Покажем, что в широком классе случаев функция $V_l(\mathbf{x}, t)$ существует. Подставим в систему (27.35) вместо $\mathbf{u}$ управление $\mathbf{u}_l(t)$ и сделаем в полученной системе замену искомых функций по формулам

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_l(t).$$

Для $\mathbf{y}$ получается система

$$d\mathbf{y}/dt=A(t)\mathbf{y}+\mathbf{g}(\mathbf{y}, t). \qquad (27.38)$$

Пусть, например, компоненты $\mathbf{g}$ дважды непрерывно дифференцируемы и являются ограниченными функциями t. Тогда, если линейное приближение системы (27.38) образует правильную систему с положительными характеристичными числами, то существует семейство решений

$$\mathbf{y}=\mathbf{y}(t, c_1, \ldots, c_n)$$

системы (27.38), зависящее от n произвольных постоянных,

которое удовлетворяет неравенствам

$$\|\mathbf{y}\| \leqslant a\|\mathbf{C}\| l^{-bt}$$

при $t \geqslant 0$, где $a > 0$, $b > 0$ — постоянные; $\mathbf{C} = (c_1, \ldots, c_n)$, причем

$$D\mathbf{y}/D\mathbf{C} \neq 0 \quad \text{при} \quad c_1 = \ldots = c_n = 0.$$

Следовательно, можно найти функцию $\varphi(\mathbf{y}, t)$ такую, что

$$\mathbf{C} = \varphi(\mathbf{y}, t).$$

При известных предположениях относительно f_0 интеграл

$$\int\limits_{t}^{+\infty} f_0(\mathbf{x}_t(t) + \mathbf{y}(t, \mathbf{C}), \mathbf{u}_t(t), t)\, dt$$

будет существовать и равняться функции $V_t(t, \mathbf{C})$. Исключая произвольные постоянные, находим

$$V_t(\mathbf{x}_t(t) + \mathbf{y}, t) = \overline{V}_t(t, \varphi(\mathbf{y}, t)).$$

Следовательно, функция $\overline{V}_t(\mathbf{x}, t)$ определена, во всяком случае, в некоторой окрестности кривой $\mathbf{x}_t(t)$.

Остановимся несколько подробнее на том случае, когда система (27.35) является линейной и ее коэффициенты являются линейными функциями управлений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(A(t) + \sum_{j=1}^{r} A_j(t) u_j\right)\mathbf{x}, \tag{27.39}$$

где A и A_j, $j = 1, \ldots, r$, — матрицы размерности n, элементы которых суть вещественные, непрерывные, ограниченные функции при $t \geqslant 0$. Предположим, что управления таковы, что $|u_j| \leqslant 1$ при $t \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, r$. Положим

$$f_0 = \sum_{m=2}^{\infty} f_0^{(m)},$$

где $f_0^{(m)}$ — однородные формы степени m относительно $x_1, \ldots, x_n$ с вещественными, непрерывными, ограниченными коэффициентами относительно $t, u_1, \ldots, u_r$. Будем считать, что $f_0^{(2)}$ — положительно определенная квадратичная форма, так что

$$f_0^{(2)} \geqslant c\|\mathbf{x}\|^2,$$

где c — положительная постоянная. Будем считать также, что ряд, представляющий f_0, сходится в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ равномерно по отношению к $t \geqslant 0$ и $(u_1, \ldots, u_r)$

$|u_j| \leq 1$. Требуется найти такое управление, при котором: 1) нулевое решение системы (27.39) равномерно асимптотически устойчиво; 2) справедливо неравенство

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \leqslant a\|x_0\| e^{-b(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0; \tag{27.40}$$

3) среди всех допустимых управлений функционал

$$J = \int_0^{+\infty} f_0\, dt$$

принимает наименьшее возможное значение. Здесь $x(t, x_0, t_0)$ — решение системы (27.39), $x(t_0, x_0, t_0) = x_0$; $a > 0$, $b > 0$ — постоянные.

Пусть $u_1(t)$ — допустимое управление. Тогда функция

$$V_1(x, t) = \int_t^{+\infty} f_0\, dt$$

существует, является однозначной, аналитической и представима в форме сходящегося ряда

$$V_1(x, t) = \sum_{m=2}^{\infty} V_1^{(m)}(x, t),$$

где $V_1^{(m)}(x, t)$ — однородная форма степени m относительно $x_1, \ldots, x_n$ с непрерывными ограниченными коэффициентами, заданными при $t \geqslant 0$, причем $V_1^{(2)}$ — положительно определенная квадратичная форма. Определим последовательные приближения, как и ранее. Тогда $\bar{u}_2(x_1, t)$ — управление, при котором

$$W_1 = \frac{\partial V_1}{\partial t} + \sum \frac{\partial V_1}{\partial x_s} \dot{x}_s + f_0$$

имеет наименьшее возможное значение. Ясно, что

$$\bar{u}_j^{(2)} = -\operatorname{sign}\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial x_s} (A_j x)_s\right), \quad j = 1, \ldots, r. \tag{27.41}$$

Подставляя (27.41) в систему (27.39) вместо управлений $u_1, \ldots, u_r$, получим нелинейную систему. Предположим, что она имеет решение $x_2(t)$, $x_2(0) = x_1$. Подставляя это решение в (27.41), найдем управление $\bar{u}_j^{(2)}(t)$, $j = 1, \ldots, r$. Пусть это управление допустимо. Если это построение окажется возможным при любом l, то получим минимизирующую последовательность $u_1, \ldots, u_l, \ldots$, которой можно пользоваться для отыскания оптимального управления.

Остановимся теперь на построении метода последовательных приближений для отыскания оптимального программного движения в том случае, когда первый конец траектории остается на некоторой поверхности. Пусть вновь заданы система (27.1) при ограничениях (27.2) и функционал

$$P(\mathbf{x}(T), T)+\int_0^T f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\,dt,$$

где $(\mathbf{x}(T), T)\in S$, S—некоторая поверхность в пространстве $(x_1, \ldots, x_n, T)$. Ясно, что число T в такой постановке может быть как закрепленным, так и незакрепленным. Требуется найти управление $\mathbf{u}_0(t)$ и соответствующее ему движение

$$\mathbf{x}_0(0)=\mathbf{x}_1, \quad (\mathbf{x}_0(T), T)\in S$$

так, чтобы управление $\mathbf{u}_0$ и движение $\mathbf{x}_0$ удовлетворяли ограничениям (27.2) и доставляли среди всех таких управлений и движений наименьшее возможное значение функционалу J.

Введем дополнительную координату $x_{n+1}=t$. Тогда размерность системы (27.1) станет равной $n+1$ и система запишется в виде

$$d\mathbf{x}/dt=f(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Здесь $\mathbf{x}$—$(n+1)$-мерный вектор; $f_{n+1}=1$; $(n+1)$-я координата вектора $\mathbf{x}_1$ есть нуль. Предложенную выше задачу можно решить следующим образом.

Зададим число $\tau_1>0$ и обозначим через $\mathbf{y}$ точку поверхности S, такую, что

$$(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2=\rho^2(\mathbf{x}, S),$$

где $\rho(\mathbf{x}, S)$—расстояние от точки $\mathbf{x}$ до поверхности S. Будем минимизировать функционал

$$J_1=(\mathbf{x}(\tau_1)-\mathbf{y})^2.$$

Этот функционал соответствует тому случаю, когда $f_0=0$ и

$$P=(\mathbf{x}(\tau_1)-\mathbf{y})^2.$$

Действительно, вектор $\mathbf{y}$ можно рассматривать как непрерывную функцию вектора $\mathbf{x}$. Следовательно,

$$(\mathbf{x}(\tau_1)-\mathbf{y})^2=\rho(\mathbf{x}(\tau_1)).$$

Будем считать, что минимизация функционала J_1 проводится способом, указанным в начале этого параграфа. Пусть в результате этого получается оптимальное управление, которое даст

точку $\bar{x}_2 = x_0(\tau_1)$, где x_0 — движение, соответствующее этому оптимальному управлению. Выберем $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы

$$0 < \varepsilon_1 < \frac{\|x_1 - \bar{x}_2\|}{2}.$$

Будем минимизировать далее функционал J до тех пор, пока $x_l(\tau_1)$ будет удовлетворять условию $\|\bar{x}_2 - x_l(\tau_1)\| \leqslant \varepsilon_1$. В результате этой минимизации получается точка $x_2 = x_l(\tau_1)$, причем $\|x_2 - \bar{x}_2\| \leqslant \varepsilon_1$. С точкой x_2 поступим, как с начальной, а именно, зададим число τ_2 и начнем минимизировать функционал

$$J_1 = (x(\tau_2 + \tau_1) - y)^2,$$

где x — решение исходной системы с начальным условием $x(0) = x_1$.

Остается теперь указать способ построения последовательности чисел $\tau_1, \tau_2, \ldots$; τ_1 — время, за которое движущаяся точка достигает поверхности S, двигаясь из x_1 по кратчайшему пути с максимальной скоростью, допускаемой исходной системой дифференциальных уравнений; τ_2 — соответственно время, за которое движущаяся точка достигает S, если она движется из точки x_2 по кратчайшему пути с максимальной скоростью, допускаемой системой дифференциальных уравнений.

Рассмотрим для примера линейную систему.

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(t). \tag{27.42}$$

Пусть задана точка x_1 и требуется построить управление, переводящее эту точку в начало координат, причем так, чтобы функционал J:

$$J = P(T) + \int_0^T f_0(x, u, t)\,dt$$

принимал наименьшее возможное значение. Здесь аргумент $x(T)$ функции P не указывается, так как $x(T) = 0$.

Пусть

$$V_1^2 = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant \|x_1\| \\ |u_j| \leqslant 1}} (Ax + Bu + f)^2$$

и пусть τ_1 — то значение t, при котором впервые

$$\int_0^t V_1(\tau)\,d\tau = \|x_1\|;$$

τ_1 есть то время, которое нужно для перехода из точки x_1 в начало координат по прямой с максимальной скоростью, допускаемой

исходной системой управлений. В рассматриваемом случае

$$J_1 = x^2(\tau_1).$$

Произведя при построении минимизирующей последовательности для функционала J_1, например, одно приближение, найдем точку $\bar{x}_2 = x(\tau_1)$.

Выберем некоторое число ε и будем минимизировать функционал J при $T = \tau_1$ с тем, чтобы

$$\| x(\tau_1) - \bar{x}_2 \| < \varepsilon.$$

Выполнив, например, одно приближение, получим точку x_2. Для нее определяем величину τ_2 как такое значение t, при котором впервые будет

$$\int_{\tau_1}^{\tau_1+t} V_1(\tau)\, d\tau = \| x_2 \|.$$

Далее процесс повторяется для $T = \tau_1 + \tau_2$.

Величины $\tau_1, \tau_2, \ldots$ можно определять также и другими способами, например из нижней оценки нормы вектора x. Действительно, умножая обе части уравнения (27.42) на x^* слева, получаем

$$\frac{d}{dt} x^2 = x^* (A^* + A) x + 2x^* B u + 2x^* f.$$

Положим $\| x \| = z$. Тогда имеем

$$\lambda_1 z - \| B \| - \| f \| \leqslant \frac{dz}{dt} \leqslant \lambda_2 z + \| B \| + \| f \|,$$

где λ_1 и λ_2 — наибольшее и наименьшее собственные числа квадратичной формы

$$\frac{1}{2} x^* (A^* + A) x.$$

Пусть

$$\| B \| + \| f \| = b = \text{const}.$$

Тогда, интегрируя последнее неравенство, найдем

$$\| z \| \geqslant e^{\lambda_1 t} \left(\| x_1 \| - \frac{b}{\lambda_1} \right) + \frac{b}{\lambda_1}.$$

Правая часть полученного неравенства обращается в нуль при

$$\tau_1 = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{b}{b - \lambda_1 \| x_1 \|}.$$

При любом управлении u движущаяся точка, исходящая из x_1, не может достичь положения равновесия за время, меньшее τ_1. Из последней формулы вытекает также, что при $\lambda_1 < 0$, вообще говоря, при любом x_1 интегральные кривые могут достигать начала координат. Если $\lambda_1 > 0$, то интегральные кривые, начинающиеся в области $\|x_1\| > b/\lambda_1$, не могут достичь начала координат ни при каком выборе управления.

Замечание. В развитом выше методе последовательных приближений управление $\bar{u}_l(x, t)$ является, вообще говоря, разрывным, поэтому система (27.1) при этом управлении может не иметь движения $x_l(t)$, $x_l(0) = x_1$, определенного при всех $t \in [0, T]$, ввиду невозможности продолжения решения через поверхность разрыва. В этом случае будем поступать так: вместо $\bar{u}_l(x, t)$ будем брать многозначную функцию. Уточним ее вид для линейной системы. Положим $f_j(\sigma) = -1$ при $\sigma \geqslant -l_j$ и $f_j(\sigma) = +1$ при $\sigma \leqslant l_j$, $j = 1, \ldots, r$, $l_j > 0$. Положим также $u_j(x, t) = f_j(\sigma_j(x))$, где функции $\sigma_j(x)$ введены выше. Тогда числа $l_1, \ldots, l_r$ можно выбрать столь малыми, чтобы получающаяся последовательность была минимизирующей. Это показывает, что с таким видоизменением применение метода последовательных приближений всегда оказывается возможным.

§ 28. Метод последовательных приближений для решения задачи синтеза оптимальных управлений

Пусть задана система

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{28.1}$$

причем фазовые координаты $x_1, \ldots, x_n$ и управления $u_1, \ldots, u_r$ подчинены ограничениям вида

$$g_j(x, u, t) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{28.2}$$

и задан функционал

$$P(x(T)) + \int_0^T f_0(x, u, t)\,dt, \tag{28.3}$$

где $T > 0$ — фиксированный момент времени. Возьмем управление $u(x, t)$. Подставим его в (28.1) и построим решение полученной системы:

$$x = x(t, x_1); \quad x(0, x_1) = x_1, \tag{28.4}$$

где x_1 — некоторая точка фазового пространства. Вычислим значение функционала (28.3) при управлении $u = u(x, t)$. Тогда

получим некоторую величину $J(\mathrm{u}, \mathrm{x}_1)$. Управление $\mathrm{u}_0(\mathrm{x}, t)$ называется *оптимальным*, если оно доставляет величине $J(\mathrm{u}, \mathrm{x}_1)$ наименьшее возможное значение в каждой точке x_1 и притом удовлетворяет ограничениям (28.2).

Дадим метод последовательных приближений для отыскания оптимального управления $\mathrm{u}_0(\mathrm{x}, t)$. Пусть $\mathrm{u}_1(\mathrm{x}, t)$ — некоторое допустимое управление. Подставим это управление в систему (28.1) и найдем решение получившихся уравнений $\mathrm{x}=\mathrm{x}(t, \mathrm{x}_1)$. Далее рассмотрим уравнение

$$dV_1/dt = -f_0(\mathrm{x}, \mathrm{u}_1(\mathrm{x}, t), t), \tag{28.5}$$

где V_1 — искомая функция.

Величина x в правой части уравнения (28.5) есть решение $\mathrm{x}(t, \mathrm{x}_1)$ упомянутой системы. Найдем решение уравнения (28.5) с начальным условием

$$V_1 = P(\mathrm{x}(T, \mathrm{x}_1)) \quad \text{при} \quad t=T. \tag{28.6}$$

В результате получим функцию $\overline{V}_1(t, \mathrm{x}_1)$. Пользуясь решением системы, исключим вектор x_1 из функции $\overline{V}_1$. Тогда получим функцию $V_1(\mathrm{x}, t)$. Величина

$$Z = V_1 - V(\mathrm{x}, t)$$

является интегралом системы

$$\begin{aligned} d\mathrm{x}/dt &= \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{u}_1(\mathrm{x}, t), t), \\ dV_1/dt &= -\mathrm{f}_0(\mathrm{x}, \mathrm{u}_1(\mathrm{x}, t), t). \end{aligned} \tag{28.7}$$

При этом интеграл принимает нулевое значение на любом движении вида $\mathrm{x}=\mathrm{x}(t, \mathrm{x}_1)$, $V_1=\overline{V}_1(t, \mathrm{x}_1)$. Пользуясь функцией V_1, построим управление $\mathrm{u}_2(\mathrm{x}, t)$ так, чтобы оно удовлетворяло ограничению (28.2) и доставляло функции

$$W_1(\mathrm{x}, \mathrm{u}, t) = \frac{\partial V_1}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial x_s} \mathrm{f}_s(\mathrm{x}, \mathrm{u}, t) + \mathrm{f}_0(\mathrm{x}, \mathrm{u}, t).$$

наименьшее возможное значение. Разумеется, что наименьшее возможное значение функции $W_1(\mathrm{x}, \mathrm{u}_1(\mathrm{x}, t), t)$ не положительно, так как $W_1(\mathrm{x}, \mathrm{u}_1(\mathrm{x}, t), t) \equiv 0$.

С функцией $\mathrm{u}_2(\mathrm{x}, t)$ поступим точно так же, как и с $\mathrm{u}_1(\mathrm{x}, t)$. В результате этого получаются последовательности $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots$, $V_1(\mathrm{x}, t)$, $V_2(\mathrm{x}, t)$, ...

Если процесс построения этих последовательностей оказывается возможным, то для любой точки x_1 последовательность $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots$ будет минимизирующей:

$$J(\mathrm{u}_k, \mathrm{x}_1) = V_k(\mathrm{x}_1, 0),$$

и что

$$V_1(x_1, 0) \geqslant V_2(x_1, 0) \geqslant \ldots$$

Внешне процесс последовательных приближений мало отличается от рассмотренного в предыдущем параграфе. Однако здесь функции V_1, V_2, ... строятся более сложным образом, что связано с интегрированием системы (28.1) при управлениях, зависящих от фазовых координат. Напомним, что в предыдущей главе были даны теоремы о сходимости такого метода последовательных приближений для специального вида функционала J. В общем случае этот метод остается методом минимизации функционала и сходимость его к оптимальному управлению имеет место, вообще говоря, лишь при выполнении ограничительных условий на правые части системы (28.1), на функции g_j, входящие в (28.2), и на P и f_0 из (28.3). Построение последовательных приближений для систем с неограниченным временем еще более затруднительно. Действительно, пусть дан функционал

$$J = \int_0^\infty f_0(x, u, t)\,dt. \tag{28.8}$$

Допустимыми управлениями $u(x, t)$ будем считать такие, при которых система (28.1) имеет асимптотически устойчивое нулевое решение и выполняются условия (28.2). Пусть $u_1(x, t)$ — некоторое допустимое управление. Построим семейство решений $x = x(t, x_1)$ и функцию

$$\overline{V}_1(t, x_1) = \int_t^\infty f_0(x(\tau, x_1), u(\tau, x_1), \tau)\,d\tau. \tag{28.9}$$

Пользуясь семейством решений, исключим из (28.9) вектор x_1; тогда получим функцию $V_1(x, t)$. Затруднительным является построение семейства решений и, следовательно, самой функции $V_1(x, t)$. С помощью функции $V_1(x, t)$ строим управление $u_2(x, t)$ так, чтобы оно доставляло функции

$$W_1(x, u, t) = \frac{\partial V_1}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial x_s} f_s(x, u, t) + f(x, u, t)$$

наименьшее возможное значение при условии выполнения ограничений (28.2), причем минимум ищется среди всех таких управлений, которые доставляют системе (28.1) нулевое асимптотически устойчивое решение. Если $u_2(x, t)$ построено, то, поступая с ним как с $V_1(x, t)$, найдем функцию $V_2(x, t)$ и т. д. Если процесс построения оказывается возможным, то в результате получим

минимизирующую последовательность $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t)$, ... такую, что

$$V_1(\mathbf{x}_1, 0) \geqslant V_2(\mathbf{x}_1, 0) \geqslant \ldots, \qquad (28.10)$$

где $V_k(\mathbf{x}_1, 0) = J(\mathbf{u}_k, \mathbf{x}_1)$.

Следовательно, u_1, u_2, ... — минимизирующая последовательность для любой $\mathbf{x}_1$. Напомним, что подобный метод последовательных приближений был использован в предыдущей главе. Там была дана сходимость этого метода в ряде случаев.

Пусть система регулирования некоторым заданным объектом описывается с помощью дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1, \ldots, x_n, t) + \sum_{i=1}^{r} u_i b_{si}(x_1, \ldots, x_n, t), \quad s = 1, \ldots, n. \qquad (28.11)$$

Предположим, что управления u_1, ..., u_r удовлетворяют некоторым ограничениям. Именно, пусть

$$|u_i| \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, r. \qquad (28.12)$$

Будем рассматривать движения системы, определенные на промежутке $[0, T]$. Следовательно, управления будем считать кусочно-непрерывными функциями, заданными на $[0, T]$.

Предположим, что качество управления определяется с помощью функционала J

$$J = \int_0^T \left(f_0(x_1, \ldots, x_n, t) + \sum_{i=1}^{r} u_i c_i(x_1, \ldots, x_n, t)\right) dt \qquad (28.13)$$

и что задано начальное состояние системы

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Требуется среди указанных выше управлений найти такое, которое доставляет функционалу J наименьшее возможное значение. Такое управление будем обозначать через $u_1^{(0)}$, ..., $u_r^{(0)}$ и называть оптимальным. Для решения этой задачи введем в рассмотрение функцию $V(x_1, \ldots, x_n, t)$, являющуюся решением уравнения в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s = f_0(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (28.14)$$

с граничными условиями

$$V = 0 \quad \text{при} \quad t = T. \qquad (28.15)$$

Существование функции V может быть легко установлено с помощью следующего рассуждения. Рассмотрим левую часть урав-

нения (28.14) как полную производную функции V, вычисленную в силу системы уравнений

$$dx_s/dt = f_s(x_1, \ldots, x_n, t), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{28.16}$$

Тогда уравнение (28.14) может быть записано в виде

$$dV/dt = f_0(x_1, \ldots, x_n, t). \tag{28.16'}$$

Найдем решение уравнения (28.16) с начальными условиями

$$x_s = x_s^{(0)} + \xi_s \quad \text{при} \quad t = 0, \quad s = 1, \ldots, n.$$

Обозначим это решение через

$$x_s = x_s(t, \xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{28.17}$$

Подставляя (28.17) в (28.16′) и интегрируя с учетом условия (28.15), находим

$$V = -\int_t^T f_0\, dt = \bar{V}(t, \xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{28.18}$$

Разрешая равенство (28.17) относительно $\xi_1, \ldots, \xi_n$, получим

$$\xi_s = \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n). \tag{28.19}$$

Подставляя (28.19) в (28.18), получим функцию $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, которая будет удовлетворять уравнению (28.14) при условии (28.15). Итак, будем считать, что такая функция построена.

Перейдем к решению задачи. Рассмотрим функционал

$$\bar{J} = J - \int_0^T \frac{dV}{dt}\, dt. \tag{28.20}$$

В функционале (28.20) полная производная от функции V берется в силу системы (28.11), следовательно,

$$\bar{J} = J + V(0, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}),$$

откуда вытекает, что управления, оптимальные по отношению к функционалу J, будут оптимальными по отношению к функционалу $\bar{J}$ и наоборот.

Проведем преобразования над функционалом $\bar{J}$:

$$\bar{J}=\int_0^T\left[f_0(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)+\sum_{i=1}^r u_i c_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial V}{\partial t}-\sum_{s=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s-\sum_{i=1}^r u_i \gamma_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)\right]dt, \qquad (28.21)$$

где $\gamma_i=\sum_{s=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} b_{si}$.

Из уравнений (28.14) следует, что первый, третий и четвертый члены под интегралом в формуле (28.21) исчезают, следовательно, окончательно имеем

$$\bar{J}=\int_0^T\left[\sum_{i=1}^r u_i(c_i-\gamma_i)\right]dt. \qquad (28.22)$$

Из (28.22) непосредственно вытекает, что оптимальное управление приближенно определяется формулами

$$u_i^0=\operatorname{sign}(\gamma_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)-c_i(x_1,\ \ldots,x_n,\ t)),\quad i=1,\ \ldots,r. \qquad (28.23)$$

Эти формулы содержат в себе приближенное решение проблемы синтеза оптимального управления для того случая, когда правый конец траектории остается свободным.

Ниже будет также предложен метод последовательных приближений для решения проблемы синтеза оптимальных управлений в случае наличия краевых условий на правом конце траектории, а также при наличии ограничений на фазовые координаты системы (28.11).

Рассмотрим теперь проблему синтеза асимптотически устойчивых оптимальных управлений. Предположим, что система (28.11) при любом выборе кусочно-непрерывных управлений, удовлетворяющих условиям (28.12), имеет положение равновесия:

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0,$$
$$f_s(0,\ \ldots,\ 0,\ t)=b_{si}(0,\ \ldots,\ 0,\ t)=0,\quad s=1,\ \ldots,\ n.$$

Будем считать это положение равновесия асимптотически устойчивым при $u_1=\ldots=u_r=0$. Требуется выбрать управления $u_1,\ \ldots,\ u_r$ так, чтобы положение равновесия системы (28.11) было по-прежнему равномерно асимптотически устойчивым и чтобы функционал

$$K=\int_0^\infty f_0(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)\,dt \qquad (28.24)$$

имела наименьшее возможное значение, где $f_0(x_1, \ldots, x_n, t)$ есть положительно определенная функция $x_1, \ldots, x_n$. Для решения поставленной задачи рассмотрим функцию V, являющуюся решением уравнения (28.24) и удовлетворяющую условию

$$V=0 \quad \text{при} \quad x_1=\ldots=x_n=0. \qquad (28.25)$$

Известно, что решение уравнения (28.14) с начальным условием (28.25) существует, причем V является отрицательно определенной функцией.

Рассмотрим функционал

$$\overline{K}=K-\int_0^{+\infty}\frac{dV}{dt}\,dt. \qquad (28.26)$$

Полная производная функции V в функционале (28.26) берется в силу системы (28.11). Если управления $u_1, \ldots, u_r$ делают положение равновесия равномерно асимптотически устойчивым, то функционал K вполне определен и может быть представлен в виде

$$\overline{K}=K+V(0, x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

так как $V \to 0$ при $t \to +\infty$.

Произведя преобразования над функционалом $\overline{K}$, получим

$$\overline{K}=\int_0^{+\infty}\left[-\sum_{i=1}^{r}u_i\gamma_i(x_1, \ldots, x_n, t)\right]dt, \qquad (28.27)$$

откуда находим, что оптимальное управление будет приближенно определяться формулами

$$u_i^0=\operatorname{sign}\gamma_i(x_1, \ldots, x_n, t), \quad i=1, \ldots, r, \qquad (28.28)$$

где, как и выше,

$$\gamma_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}b_{si}, \quad i=1, \ldots, r.$$

При управлении (28.28) положение равновесия системы (28.11) действительно будет равномерно асимптотически устойчивым, так как для этого управления будет

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}f_s+\sum_{i=1}^{r}u_i^0\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}b_{si}=$$

$$=f_0(x_1, \ldots, x_n, t)+\sum_{i=1}^{r}|\gamma_i(x_1, \ldots, x_n, t)|.$$

Следовательно,

$$\frac{dV}{dt}=f_0(x_1, \ldots, x_n, t)+\sum_{i=1}^{r}|\gamma_i(x_1, \ldots, x_n, t)|. \qquad (28.29)$$

Функция V является отрицательно определенной, имеет бесконечно малый высший предел, ее полная производная в силу системы (28.11) положительно определена. Следовательно, нулевое решение системы (28.11) равномерно асимптотически устойчиво при управлении (28.28). Управления (28.23) и (28.28) могут быть построены лишь в том случае, когда известна функция V. Эту функцию можно строить путем последовательных приближений. Это обстоятельство приводит к методу последовательных приближений для отыскания управлений (28.23) и (28.28).

Остановимся сначала на случае конечного интервала. Пусть f_0 является полиномом степени l относительно $x_1, \ldots, x_n$, а f_s — линейные функции:

$$f_s=\sum_{i=1}^{n}d_{si}x_i+r_s(t). \qquad (28.30)$$

При этих условиях оказывается, что уравнение (28.14) имеет единственное решение V в виде полинома степени l, удовлетворяющее условию (28.15), причем определение функции V сведется к интегрированию линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если же в (28.30) r_s заменить рядом относительно $x_1, \ldots, x_n$, в котором разложение начинается с членов второго порядка, то функция V также определится единственным образом в виде ряда.

Остановимся подробнее на случае (28.30). Будем искать решение уравнения (28.14) в виде

$$V=\sum_{m=0}^{l}V^{(m)}. \qquad (28.31)$$

Полагая в (28.14)

$$f_0=\sum_{m=0}^{l}f_0^{(m)}, \qquad (28.32)$$

найдем

$$\frac{\partial V^{(m)}}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V^{(m)}}{\partial x_s}\left(\sum_{t=1}^{n}d_{st}x_t+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V^{(m+1)}}{\partial x_s}r_s\right)=f_0^{(m)}, \quad m=0, 1, \ldots, l-1. \qquad (28.33)$$

Для $m=l$ имеем

$$\frac{\partial V^{(l)}}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V^{(l)}}{\partial x_s}\sum_{t=1}^{n}a_{st}x_t=f_0^{(l)}. \qquad (28.34)$$

Формы $V^{(m)}$ удовлетворяют условиям

$$V^{(m)}=0 \quad \text{при} \quad t=T.$$

Уравнения (28.33) и (28.34) получены путем подстановки в (28.14) выражений (28.31) и (28.32) и приравнивания слева и справа форм одинакового измерения. При этом частная производная заменена на полную, так как она относится только к коэффициентам форм. Из уравнений (28.33) и (28.34) вытекает, что коэффициенты искомых форм являются решениями линейных неоднородных дифференциальных уравнений с начальными условиями, заданными на правом конце при $t=T$, и, следовательно, определяются единственным образом.

Приведенные выше рассуждения позволяют дать простой метод последовательных приближений для определения функции V. Предположим, что задан полином V_1, например $V_1=0$. Построим последовательные приближения V_N как решения уравнений

$$\frac{dV_N}{dt}=f_0-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V_{N-1}}{\partial x_s}\left(\sum_{l=1}^{n}a_{sl}x_l+r_s\right)$$

с начальными условиями

$$V_N=0 \quad \text{при} \quad t=T.$$

Следовательно,

$$V_N=\int_t^T\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V_{N-1}}{\partial x_s}\left(\sum_{l=1}^{n}a_{sl}x_l+r_s\right)-f_0(x_1, \ldots, x_n, t)\right]dt,$$
$$N=2, 3, \ldots \qquad (28.35)$$

Переменные $x_1, \ldots, x_n$ под интегралом в формуле (28.35) рассматриваются как параметры, следовательно, интегрирование относится лишь к функциям времени. Легко видеть, что $V_N \xrightarrow[N\to\infty]{} V$, $\frac{\partial V_N}{\partial x_s} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\partial V}{\partial x_s}$ равномерно по отношению к $t\in[0, T]$ в любой ограниченной области изменения переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Положим

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{iN}&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V_N}{\partial x_s}b_{si},\\ u_{iN}&=\operatorname{sign}(\gamma_{iN}-c_i), \quad i=1, \ldots, r.\end{aligned}\right\} \qquad (28.36)$$

Ясно, что управления u_{iN} ($i=1, \ldots, r$) сходятся при $N\to\infty$ к управлению $u_i^{(0)}$ ($i=1, \ldots, r$). Аналогичный метод последовательных приближений можно сформулировать для того случая, когда (28.31), (28.32) заменяются рядами относительно $x_1, \ldots, x_n$,

разложение которых начинается с членов не ниже второго порядка.

Рассмотрим теперь случай полубесконечного промежутка. Пусть

$$f_0 = \sum_{m=r}^{\infty} f_0^{(m)},$$

$$f_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i + \sum_{m=r}^{\infty} g_s^{(m)},$$

где $f_0^{(m)}$, $g_s^{(m)}$ — однородные формы степени m относительно $x_1, \ldots, x_n$. Будем считать, что $f_0^{(r)}$ является положительно определенной квадратичной формой.

Предположим, что нулевое решение системы

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{28.37}$$

равномерно асимптотически устойчиво. Тогда существует квадратичная форма $V^{(r)}$, являющаяся отрицательно определенной и удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial V^{(r)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{28.38}$$

Положим $V_1 = V^{(r)}$, а приближение V_N определим как ограниченное решение уравнения

$$\frac{\partial V_N}{\partial t} + \frac{\partial V_N}{\partial x_s} \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i = f_0 - \sum \frac{\partial V_{N-1}}{\partial x_s} g_s, \quad N = 2, 3, \ldots$$

Здесь $x_1, \ldots, x_n$ следует рассматривать как параметры. При известных предположениях относительно сходимости рядов f_0 и g_s можно утверждать, что

$$V_N \to V, \quad \frac{\partial V_N}{\partial x_s} \to \frac{\partial V}{\partial x_s} \quad \text{при} \quad N \to \infty$$

равномерно на всяком конечном интервале $[0, T]$ в некоторой фиксированной окрестности положения равновесия, причем функция V здесь является отрицательно определенным решением уравнения (28.14). Отсюда вытекает, что последовательность управлений

$$u_{iN} = \operatorname{sign} \gamma_{iN},$$

где $\gamma_{iN} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_N}{\partial x_s} b_{si}$, можно рассматривать как последовательность приближений для управлений (28.28).

Обратимся теперь к учету краевых условий и ограничений. Пусть требуется найти оптимальное управление по отношению к функционалу J среди всех тех управлений, для которых выполняются граничные и краевые условия

$$\psi_j(T,\ x_1(T),\ \ldots,\ x_n(T))=0,\quad j=1,\ \ldots,\ k,$$

и которые удовлетворяют ограничениям

$$\varphi_\sigma(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)\leqslant 0,\quad \sigma=1,\ \ldots,\ \mu.$$

Способ учета краевых условий и ограничений сводится к введению нового функционала

$$L=J+\sum_{j=1}^{k} L_j\psi_j^2+\int_0^T\sum_{\sigma=1}^{\mu} K_\sigma(1+\operatorname{sign}\varphi_\sigma), \tag{28.39}$$

где L_j и K_σ ($j=1,\ \ldots,\ k;\ \ \sigma=1,\ \ldots,\ \mu$) — положительные величины, подлежащие определению. Функционал (28.39) можно представить в форме

$$L=\sum_{j=1}^{k} L_j\psi_j^2(0,\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)+$$
$$+\int_0^T\left[f_0+\sum_{i=1}^{r}u_ic_i+\sum_{j=1}^{k}L_j\frac{d}{dt}(\psi_j^2)+\sum_{\sigma=1}^{\mu}K_\sigma(1+\operatorname{sign}\varphi_\sigma)\right]dt. \tag{28.40}$$

Полная производная функции ψ_j^2 может быть представлена в виде

$$\frac{d}{dt}(\psi_j^2)=g_j^0+\sum_{i=1}^{r}c_{ij}u_i.$$

Рассмотрим функцию V, удовлетворяющую уравнению вида

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}f_s=f_0+\sum_{j=1}^{k}L_jg_j^0+\sum_{\sigma=1}^{\mu}K_\sigma(1+\operatorname{sign}\varphi_\sigma) \tag{28.41}$$

и условию

$$V=0\quad \text{при}\quad t=T. \tag{28.42}$$

Решение уравнений (28.41) при условии (28.42) можно искать в форме

$$V=V_0+\sum_{j=1}^{k}L_jV_{1j}+\sum_{\sigma=1}^{\mu}K_\sigma V_{2\sigma},$$

где функция V_0 удовлетворяет уравнению (28.14) и условию

(28.5), а функции V_{1j} и $V_{2\sigma}$ удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\frac{\partial V_{1j}}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V_{1j}}{\partial x_s}f_s=g_j^0,\quad j=1,\ \ldots,\ k,$$

$$\frac{\partial V_{2\sigma}}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V_{2\sigma}}{\partial x_s}f_s=1+\operatorname{sign}\varphi_\sigma$$

и краевым условиям

$$V_{1j}=V_{2\sigma}=0\quad\text{при}\quad t=T,\quad j=1,\ \ldots,\ k;\quad \sigma=1,\ \ldots,\ \mu.$$

Предположим, что решение уравнения (28.41) при условии (28.42) найдено. Обозначим через $u_i^0(t,\ L_1,\ \ldots,\ L_k,\ K_1,\ \ldots,\ K_\mu)$, $i=1,\ \ldots,\ r$, управления, доставляющие функционалу L наименьшее возможное значение при условии, что правый конец свободен и ограничения не учитываются. Тогда это управление также будет оптимальным и по отношению к функционалу

$$\overline{L}=L-\int_0^T\frac{dV}{dt}\,dt. \tag{28.43}$$

Произведя преобразования над функционалом (28.43), получаем

$$\overline{L}=\sum_{j=1}^{k}L_j\psi_j^0(0,\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)+V(0,\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)+ \\ +\int_0^T\sum_{i=1}^{r}u_i\left(c_i+\sum_{j=1}^{k}c_{ij}L_j-\gamma_i\right)dt,$$

откуда вытекает, что

$$u_i^0(L_1,\ \ldots,\ L_k,\ K_1,\ \ldots,\ K_\mu)=\operatorname{sign}\left(\gamma_i-c_i-\sum_{j=1}^{k}c_{ij}L_j\right), \tag{28.44}$$

где

$$\gamma_i=\sum_{j=1}^{k}L_j\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V_{1j}}{\partial x_s}b_{si}\right)+\sum_{\sigma=1}^{\mu}K_\sigma\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V_{2\sigma}}{\partial x_s}b_{si}\right).$$

Подставим управление (28.34) в функционал L и будем выбирать величины $L_1,\ \ldots,\ L_k,\ K_1\ \ldots,\ K_\mu$ так, чтобы функционал L минимизировать. При этом в ряде случаев можно установить, что существуют такие последовательности величин $L_1,\ \ldots,\ L_k$, $K_1,\ \ldots,\ K_\mu$, которые позволяют сколь угодно точно аппроксимировать решение задачи с учетом краевых условий и ограничений, если такое решение существует.

В приведенных рассуждениях величина T считалась закрепленной, однако предлагаемый метод последовательных приближений пригоден также для решения задачи и в случае незакрепленного T.

Заметим, что выше нигде не были оговорены свойства функций, входящих в дифференциальные уравнения. Можно считать, что эти функции удовлетворяют условиям, при которых существует решение дифференциальных уравнений, и их даже можно считать для простоты дифференцируемыми, принимающими вещественные значения и заданными при всех значениях аргументов, входящих в них. Из формул (28.23), (28.28), (28.44) вытекает, что управления разрывны по отношению к фазовым координатам. Это обстоятельство может привести к тому, что движения не будут определены в классическом смысле на всем рассматриваемом промежутке. Для того чтобы избежать этого, необходимо либо принять соглашение о скользящих режимах, либо в окрестности поверхностей разрыва ввести гистерезисные петли, которые позволят однозначно определить движения на всем рассматриваемом промежутке. Управления с петлями гистерезиса будут весьма мало отличаться от построенных оптимальных.

Заметим, что в некоторых случаях формулы (28.23) и (28.28) определяют оптимальные управления. Например, это всегда имеет место для линейных задач с линейным функционалом. В общем случае рассмотренное построение служит для определения второго приближения, если в качестве первого взято нулевое управление.

§ 29. Метод направленного поиска коэффициентов усиления в системах управления

Задача построения оптимальной в том или ином смысле системы управления часто упрощается путем сведения ее к задаче отыскания коэффициентов усиления в некотором законе управления. Это отыскание проводится с тем, чтобы минимизировать заданный критерий. Итак, пусть дана система

$$\begin{aligned} \dot{\mathrm{x}} &= f(\mathrm{x}, \mathrm{z}, t), \\ \dot{\mathrm{z}} &= g(\mathrm{x}, \mathrm{z}, t, \alpha), \end{aligned} \qquad (29.1)$$

где $\mathrm{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ — фазовые координаты объекта, $\mathrm{z}=(z_1, \ldots, z_r)$ — координаты рулевых органов, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ — коэффициенты усиления в законе регулирования g. Пусть на движениях системы (29.1) заданы функционалы $J_0, J_1, \ldots, J_l$. В общем случае коэффициенты усиления $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ требуется выбрать так, чтобы функционал J_0 имел наименьшее возможное значение при условии,

что функционалы

$$J_j \leqslant 0, \quad j=1, \ldots, l. \tag{29.2}$$

Предположим, что заданы конкретные начальные значения для (29.1):

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}, \qquad \mathbf{z}=\mathbf{z}^{(0)} \text{ при } t=0$$

и что удалось найти решение системы (29.1) при всех значениях коэффициентов усиления $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t, \alpha)$, $\mathbf{z}=\mathbf{z}(t, \alpha)$. Подставляя эти функции в функционалы $J_1, \ldots, J_l$, получим функции переменных

$$J_0=f_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \ \ldots, \ J_l=f_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_m).$$

Задача отыскания оптимальных коэффициентов усиления сведется тогда к отысканию наименьшего возможного значения функции переменных $f_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ при наличии ограничений

$$f_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \leqslant 0, \quad j=1, \ldots, l.$$

Разумеется, что разыскание решений системы (29.1) и построение функций $f_0, f_1, \ldots, f_l$ в явном виде возможно лишь в очень ограниченном числе случаев. Однако идея сведения задачи отыскания оптимальных коэффициентов к задаче отыскания наименьшего возможного значения функции многих переменных является основной в вычислительных методах направленного поиска оптимальных коэффициентов усиления. Для того чтобы отыскать приближенное значение градиента функции $f_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ в заданной точке $\alpha^{(0)}$, требуется $m+1$ раз интегрировать систему (29.1) при начальных данных $\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{z}^{(0)}$ и коэффициентах усиления

$$\alpha^{(0)}, \ \alpha^{(0)}+hl_j, \quad j=1, \ldots, m,$$

где l_j — единичный вектор, все компоненты которого нули, за исключением j-й компоненты, равной единице. Частные производные функции f_0 приближенно даются формулами

$$\frac{\partial f_0}{\partial \alpha_j}(\alpha^{(0)}) \approx \frac{1}{h}\left[f_0(\alpha^{(0)}+hl_j)-f_0(\alpha^{(0)})\right], \quad j=1, \ldots, m.$$

Обозначим через $\mathbf{k}_0$ вектор размерности m с компонентами

$$\frac{1}{h}\left[f_0(\alpha^{(0)}+hl_j)-f_0(\alpha^{(0)})\right], \quad j=1, \ldots, m.$$

Тогда $\operatorname{grad} f_0(\alpha^{(0)}) \approx \mathbf{k}_0$.

Метод направленного поиска, основанный на использовании градиента, может быть либо чисто градиентным, либо методом наискорейшего спуска. В первом случае в пространстве коэффициентов усиления находим точку $\alpha^{(1)}=\alpha^{(0)}-\varepsilon\mathbf{k}_0$, где $\varepsilon>0$ —

шаг. Если оказалось

$$f_0(\alpha^{(1)}) < f_0(\alpha^{(0)}),$$

то с $\alpha^{(1)}$ поступаем, как с $\alpha^{(0)}$. Если же

$$f_0(\alpha^{(1)}) \geqslant f_0(\alpha^{(0)}),$$

то шаг ε уменьшается вдвое. В результате применения этого алгоритма получаем вычислительный метод направленного поиска коэффициентов усиления. На каждом шагу в этом алгоритме требуется $m+1$ раз интегрировать систему (29.1).

Метод наискорейшего спуска можно получить, если рассмотреть последовательность точек

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)} - \varepsilon \mathbf{k}_0, \qquad \alpha^{(2)} = \alpha^{(0)} - 2\varepsilon \mathbf{k}_0, \quad \ldots$$

Вычисление останавливается тогда, когда будет иметь место

$$f_0(\alpha^{(k)}) \geqslant f_0(\alpha^{(k-1)}), \quad f_0(\alpha^{(k-1)}) < f_0(\alpha^{(k-2)}).$$

Точку $\alpha^{(k-1)}$ берем за начальную и поступаем с ней, как с $\alpha^{(0)}$. В этом методе на каждом шагу необходимо также определять новое направление градиента, что требует снова нахождения $m+1$ решений системы (29.1). Большой объем вычислений может получиться из-за значительных затрат машинного времени на интегрирование системы (29.1), хотя это интегрирование прямо не связано с минимизацией функционала. Особую роль в связи с этим обстоятельством для отыскания коэффициентов усиления играют итеративные методы, не требующие отыскания градиента функции f_0. Эти методы были сформулированы во второй главе, и потому здесь мы их касаться подробно не будем, заметим лишь, что основная черта этих методов — минимизация функции m переменных заменяется на каждом шагу минимизацией функции k переменных, $k < m$, например $k = 1, 2$.

При проектировании систем управления практически возникают три задачи: задача точности, состоящая в том, чтобы коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ выбрать так, чтобы функционал J_0 имел наименьшее возможное значение; задача устойчивости, состоящая в том, чтобы коэффициенты усиления $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ выбрать так, чтобы выполнялись ограничения

$$J_j \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, l,$$

и, наконец, общая задача, состоящая в том, чтобы отыскать коэффициенты усиления, доставляющие J_0 наименьшее возможное значение среди всех, удовлетворяющих ограничениям $J_j \leqslant 0$. Предыдущие алгоритмы и те, которые содержатся в главе II, можно рассматривать как вычислительные методы последовательных приближений для решения задачи точности.

Покажем способ решения задачи устойчивости. Пусть ограничения $J_j \leqslant 0$ должны удовлетворяться при $t \in [0, T]$. Построим функционал U_0:

$$U_0 = t(\alpha),$$

где $t(\alpha)$—тот момент, в который впервые выполняется по крайней мере одно из равенств $J_j = 0$ $(j = 1, \ldots, l)$ на интегральной кривой

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}(t, \alpha), \quad \mathrm{z} = \mathrm{z}(t, \alpha).$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$—фиксированный набор коэффициентов усиления. Для каждого значения коэффициентов усиления определена функция $U_0(\alpha) = U_0$. Будем решать задачу точности для функционала U_0 и максимизировать его значение до тех пор, пока не окажется $t(\alpha) = T$. Таких коэффициентов усиления может оказаться целое множество U. Это множество обладает тем свойством, что при $\alpha \in \mathsf{U}$ будет $J_j \leqslant 0$, $j = 1, \ldots, l$, при всех $t \in [0, T]$. Далее можно предложить алгоритм обхода границы множества U. Этот алгоритм основан на том свойстве границы множества U, что в сколь угодно малой окрестности любой граничной точки имеются такие точки, при которых $U_0(\alpha) < T$, и такие, что $U_0(\alpha) > T$.

Алгоритм решения задачи устойчивости пригоден для любых нелинейных систем вида (29.1), однако в ряде конкретных случаев, например при решении задачи об устойчивости по первому линейному приближению, можно предложить более совершенные алгоритмы решения задачи устойчивости.

Дадим теперь общее описание метода направленного поиска коэффициентов усиления для решения общей задачи, когда при сохранении устойчивости требуется достичь оптимальной точности. Известно, что, как правило, свойство точности противоположно свойству устойчивости в том смысле, что системы с большим запасом устойчивости оказываются менее точными, и наоборот, системы с высокой точностью оказываются на границе устойчивости. Это имеет место в связи с тем, что сильно устойчивые системы «плохо» управляемы, поэтому естественно считать, что искомые коэффициенты усиления $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ будут давать траекторию, лежащую в окрестности границы множества, определяемого ограничениями $J_j \leqslant 0$ $(j = 1, \ldots, l)$. Разумеется, что можно найти область устойчивости и в ней минимизировать функционал J_0, однако алгоритмы такого рода являются громоздкими. Дадим способ одновременного решения задачи устойчивости и точности. Будем осуществлять направленный поиск коэффициентов усиления таким образом, чтобы функционал J_0 минимизировать, а функционал U_0 максимизировать. Функция $U_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ возрастает в точке $\alpha^{(0)}$ вдоль всякого направления, составляющего

с вектором $\operatorname{grad} U_0(\alpha^{(0)})$ угол, не превосходящий $\pi/2$. Функция $f_0(\alpha) = J_0$ убывает вдоль всякого направления, составляющего с $-\operatorname{grad} f_0(\alpha^{(0)})$ угол, меньший $\pi/2$. Таким образом, если векторы $\operatorname{grad} U_0(\alpha^{(0)})$ и $-\operatorname{grad} f_0(\alpha^{(0)})$ не составляют угол π, то всегда существует такое направление k_0, вдоль которого, исходя из точки $\alpha^{(0)}$, функционал U_0 возрастает, функционал J_0 убывает. В качестве точки $\alpha^{(1)}$ возьмем $\alpha^{(0)} + \varepsilon k_0$ такую, что

$$U_0(\alpha^{(1)}) > U_0(\alpha^{(0)}),$$

а

$$f_0(\alpha^{(1)}) < f_0(\alpha^{(0)}),$$

и с ней поступим, как с $\alpha^{(0)}$. Этот алгоритм даст аналог метода градиента. Чтобы получить аналог метода наискорейшего спуска в этом случае, построим последовательность

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)} + \varepsilon k_0, \quad \ldots, \quad \alpha^{(k)} = \alpha^{(0)} + k\varepsilon k_0, \quad \ldots$$

Процесс вычисления останавливается тогда, когда будет

$$U_0(\alpha^{(k)}) \leqslant U_0(\alpha^{(k-1)}) > U_0(\alpha^{(k-2)}),$$

или

$$f_0(\alpha^{(k)}) \geqslant f_0(\alpha^{(k-1)}) < f_0(\alpha^{(k-2)}).$$

Точку $\alpha^{(k-1)}$ возьмем за исходную. В результате этого получим последовательность коэффициентов усиления, на которой значения функционала J_0 будут убывать, значения функционала U_0 возрастать.

§ 30. Движения нелинейных систем, определяемые краевыми условиями

Пусть в фазовом пространстве системы заданы два многообразия. Требуется построить интегральную кривую системы дифференциальных уравнений, которая, начинаясь в некоторый момент t_1 на одном из этих многообразий, достигает другого многообразия в момент t_2. Легко показать, что отыскание такой интегральной кривой может быть сведено к отысканию периодического движения вспомогательной системы дифференциальных уравнений, построенной на основании исходной системы уравнений движения. Это обстоятельство позволяет использовать развитые в [12] методы построения периодических решений для решения упомянутой задачи. Однако целесообразно изложить также прямой метод решения таких задач, называемый методом прогонки. Ниже дается развитие этого метода решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Оно состоит в распространении метода прогонки на случай нелинейных задач.

Обратимся сначала к краевой задаче с одной степенью свободы. Пусть задано уравнение

$$\ddot{y}=f(t,\ y,\ \dot{y}), \tag{30.1}$$

и пусть известно, что это уравнение имеет решение

$$y=y(t), \qquad t\in[0,\ T], \tag{30.2}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\varphi(y(0),\ \dot{y}(0))=0, \tag{30.3}$$

$$\psi(y(T),\ \dot{y}(T))=0. \tag{30.4}$$

Требуется дать способ построения решения (30.2) уравнения (30.1), удовлетворяющего краевым условиям (30.3) и (30.4). Для решения поставленной задачи введем в рассмотрение общее решение уравнения (30.1)

$$y=y(t,\ C_1,\ C_2). \tag{30.5}$$

Предположим, что (30.5) и соотношение

$$\dot{y}=\frac{\partial}{\partial t}y(t,\ C_1,\ C_2) \tag{30.6}$$

разрешимы относительно величин C_1 и C_2, так что

$$\left.\begin{aligned} C_1&=g_1(t,\ y,\ \dot{y}),\\ C_2&=g_2(t,\ y,\ \dot{y}). \end{aligned}\right\} \tag{30.7}$$

Известно, что в этом случае функции $g_i(t,\ y,\ \dot{y})\ (i=1,\ 2)$ будут являться первыми интегралами уравнения (30.1). Покажем, что существуют два интеграла уравнения (30.1)

$$\xi=\xi(t,\ y,\ \dot{y}), \tag{30.8}$$

$$\eta=\eta(t,\ y,\ \dot{y}), \tag{30.9}$$

обладающие свойствами

$$\xi(0,\ y,\ \dot{y})=\varphi(y,\ \dot{y}), \tag{30.10}$$

$$\eta(T,\ y,\ \dot{y})=\psi(y,\ \dot{y}). \tag{30.11}$$

Действительно, пользуясь (30.5) и (30.6), исключим величины $y(0)$, $\dot{y}(0)$ из выражения для функции φ. Тогда получим

$$\varphi=\varphi\left(y(0,\ C_1,\ C_2),\ \frac{\partial y(0,C_1,C_2)}{\partial t}\right).$$

Далее исключим из найденного выражения величины C_1 и C_2, пользуясь формулами (30.7). Результат этого исключения

обозначим через

$$\xi = \xi(t, y, \dot{y}).$$

Эта функция обязательно является интегралом уравнения (30.1), так как она является функцией первых интегралов (30.7) по построению. Если положить $t = 0$, то получим $\xi(0, y, \dot{y}) = \varphi(y, \dot{y})$. Аналогично, подставляя (30.5) и (30.6) при $t = T$ в функцию $\psi(y(T), \dot{y}(T))$, а затем исключая C_1 и C_2 с помощью формулы (30.7) и обозначая результат исключения через $\eta(t, y, \dot{y})$, найдем, что функция $\eta(t, y, \dot{y})$ является интегралом уравнения (30.1) и удовлетворяет условию (30.11).

Из проведенных рассуждений вытекает, что ξ и η являются решениями уравнения

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \xi}{\partial \dot{y}} f(t, y, \dot{y}) = 0. \qquad (30.12)$$

Заметим, что на любой интегральной кривой уравнения (30.1), удовлетворяющей лишь условию (30.3), интеграл $\xi(t, y, \dot{y})$ сохраняет постоянное значение, равное в этом случае нулю:

$$\xi(t, y, \dot{y}) = 0 \qquad (30.13)$$

И далее, на любой интегральной кривой, удовлетворяющей лишь условию (30.4), интеграл $\eta(t, y, \dot{y})$ также сохраняет постоянное значение, при этом также

$$\eta(t, y, \dot{y}) = 0. \qquad (30.14)$$

Это позволяет предложить несколько способов решения поставленных выше задач отыскания решения (30.2) уравнения (30.1), удовлетворяющего краевым условиям (30.3) и (30.4).

I. Решение (30.2) при $t = T$ обязательно будет удовлетворять системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} \xi(T, y, \dot{y}) &= 0, \\ \psi(y, \dot{y}) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (30.15)$$

Пусть (30.15) имеет решение $(\bar{y}, \bar{\dot{y}})$. Тогда, чтобы получить решение (30.2), надо проинтегрировать уравнение (30.1) в обратном направлении по времени t при начальных условиях

$$\left.\begin{aligned} y(T) &= \bar{y}, \\ \dot{y}(T) &= \bar{\dot{y}} \end{aligned}\right\}$$

или проинтегрировать уравнение

$$\xi(t, y, \dot{y}) = 0$$

при начальном условии

$$y(T)=\bar{y}.$$

II. Решение (30.2) при $t=0$ обязательно удовлетворяет системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}\varphi(y,\ \dot{y})=0,\\ \eta(0,\ y,\ \dot{y})=0.\end{aligned}\right\}\qquad(30.16)$$

Обозначим через $\tilde{y}$ и $\dot{\tilde{y}}$ решение системы (30.16). Чтобы построить решение (30.2) уравнения (30.1), надо проинтегрировать теперь уравнение (30.1) при начальных условиях

$$\left.\begin{aligned}y(0)=\tilde{y},\\ \dot{y}(0)=\dot{\tilde{y}}\end{aligned}\right\}$$

или уравнение

$$\eta(t,\ y,\ \dot{y})=0$$

при начальном условии

$$y(0)=\tilde{y}.$$

III. Решение (30.2) уравнения (30.1) удовлетворяет одновременно условиям (30.3) и (30.4). Поэтому оно будет удовлетворять также одновременно уравнениям (30.13) и (30.14). Таким образом, решение (30.2) можно найти без интегрирования из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}\xi(t,\ y,\ \dot{y})=0,\\ \eta(t;\ y,\ \dot{y})=0.\end{aligned}\right\}\qquad(30.17)$$

Из приведенных способов построения решения (30.2) вытекает, что задача сводится к отысканию решений уравнения (30.12) при начальных условиях (30.10) и (30.11). Построение таких решений можно производить различными численными и аналитическими методами.

Дадим теперь вычислительный алгоритм для нахождения приближенных решений краевых задач в квазилинейных системах с одной степенью свободы.

Пусть задано уравнение

$$\ddot{y}+p(t)\dot{y}+g(t)y=r(t)+\mu f(t,\ y).\qquad(30.18)$$

Здесь p, g, r — вещественные непрерывные функции, заданные при $t\in[0,\ T]$; μ — малый параметр; $f(t,\ y)$ — вещественная

непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица по y:

$$|f(t, \bar{y})-f(t, \bar{\bar{y}})|\leqslant l\,|\bar{y}-\bar{\bar{y}}|,$$

где l — положительная постоянная.

Предположим, что уравнение (30.18) имеет решение

$$y=y(t), \tag{30.19}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\dot{y}(0)=a_0 y(0)+b_0 \tag{30.20}$$

и

$$\dot{y}(T)=\alpha_0 y(T)+\beta_0, \tag{30.21}$$

где a_0, b_0, α_0, β_0 — вещественные постоянные. Требуется дать способ последовательных приближений для отыскания решения (30.19) уравнения (30.18).

Предложим план решения поставленной задачи. Сначала построим интегральное уравнение, которому будет удовлетворять решение (30.19). Затем дадим способ последовательных приближений для решения этого интегрального уравнения и в заключение покажем, что при достаточно малых μ эти приближения обязательно сходятся к решению (30.19) уравнения (30.18).

Итак, покажем сначала, что функция (30.19) обязательно удовлетворяет интегральному уравнению вида

$$y=y_0(t)+\mu\int_0^t f(\tau, y(\tau))\,a_1(t, \tau)\,d\tau+\mu\int_T^t a_2(t, \tau)\,f(\tau, y(\tau))\,d\tau. \tag{30.22}$$

Для построения уравнения (30.22) предположим, что функция (30.19) найдена. Тогда функция $f(t, y(t))$ представляет собой известную функцию времени t. Обозначим ее через $r_1(t)$.

Функция (30.19) будет обязательно удовлетворять линейному уравнению

$$\ddot{y}+p(t)\,\dot{y}+g(t)\,y=r(t)+\mu r_1(t) \tag{30.23}$$

и краевым условиям (30.20) и (30.21).

Уравнение в частных производных (30.12) для рассматриваемого случая имеет решения

$$\xi=\dot{y}-a(t)\,y-b(t), \tag{30.24}$$

$$\eta=y-\alpha(t)y-\beta(t); \tag{30.25}$$

при этом искомые решения обязательно удовлетворяют условиям

$$\xi=0, \tag{30.26}$$

$$\eta=0. \tag{30.27}$$

Из (30.24) и (30.26) находим, что функции $a(t)$ и $b(t)$ будут удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{a}+(a+p)a+g=0,\\ \dot{b}+(a+p)b=r+\mu r_1 \end{aligned}\right\} \tag{30.28}$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} a(0)=a_0,\\ b(0)=b_0. \end{aligned}\right\}$$

Аналогично функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ удовлетворяют системе

$$\left.\begin{aligned} \dot{\alpha}+(\alpha+p)\alpha+g=0,\\ \dot{\beta}+(\alpha+p)\beta=r+\mu r_1 \end{aligned}\right\} \tag{30.29}$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} \alpha(T)=\alpha_0,\\ \beta(T)=\beta_0. \end{aligned}\right\}$$

Из второго уравнения системы (30.28) имеем

$$b(t)=b_0e^{-\int\limits_0^t [a(\tau)+p(\tau)]\,d\tau}+\int\limits_0^t e^{-\int\limits_\tau^t [a(\theta)+p(\theta)]\,d\theta}[r(\tau)+\mu r_1(\tau)]\,d\tau. \tag{30.30}$$

Аналогично из второго уравнения системы (30.29) получаем

$$\beta(t)=\beta_0e^{-\int\limits_T^t [\alpha(\tau)+p(\tau)]\,d\tau}+\int\limits_t^T e^{-\int\limits_\tau^t [\alpha(\theta)+p(\theta)]\,d\theta}[r(\tau)+\mu r_1(\tau)]\,d\tau. \tag{30.31}$$

Вычитая (30.27) из (30.21) и деля обе части полученного равенства на $a(t)-\alpha(t)$, найдем

$$y=-\frac{b(t)-\beta(t)}{a(t)-\alpha(t)}. \tag{30.32}$$

Используя (30.30) и (30.31), из (30.32) найдем

$$y=y_0+\mu\int\limits_0^t a_1(t,\tau)\,r_1(\tau)\,d\tau+\mu\int\limits_T^t a_2(t,\tau)\,r_1(\tau)\,d\tau, \tag{30.33}$$

где

$$y_0 = -\frac{b_0 e^{-\int\limits_0^t [a(\tau)+p(\tau)]\,d\tau} + \int\limits_0^t e^{-\int\limits_\tau^t [a(\theta)+p(\theta)]\,d\theta} r(\tau)\,d\tau}{a(t)-\alpha(t)} +$$

$$+\frac{\beta_0 e^{-\int\limits_T^t [\alpha(\tau)+p(\tau)]\,d\tau} + \int\limits_T^t e^{-\int\limits_\tau^t [\alpha(\theta)+p(\theta)]\,d\theta} r(\tau)\,d\tau}{a(t)-\alpha(t)}, \qquad (30.34)$$

$$a_1(t, \tau) = \frac{e^{-\int\limits_\tau^t [a(\theta)+p(\theta)]\,d\theta}}{a(t)-\alpha(t)}, \qquad (30.35)$$

$$a_2(t, \tau) = \frac{e^{-\int\limits_\tau^t [\alpha(\theta)+p(\theta)]\,d\theta}}{a(t)-\alpha(t)}. \qquad (30.36)$$

Заменим теперь в (30.33) функцию $r_1(t)$ равным ей выражением

$$r_1(\tau) = f(\tau, y(\tau)).$$

Тогда получим, что решение (30.12) уравнения (30.18) будет действительно удовлетворять интегральному уравнению (30.22), в котором функции $y_0(t)$, $a_1(t, \tau)$ и $a_2(t, \tau)$ определяются формулами (30.34), (30.35) и (30.36).

Запишем уравнение (30.22) в операторной форме:

$$y = y_0 + \mu K(y),$$

где $K(y)$ — интегральный оператор, стоящий в правой части уравнения (30.22). Построим последовательность функций $y_0(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., определяемых формулой

$$y_n(t) = y_0(t) + \mu K(y_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (30.37)$$

Оказывается, что существует $\mu_0 > 0$ такое, что при любом $|\mu| < \mu_0$ ряд $y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots$ сходится абсолютно и равномерно к решению (30.19) уравнения (30.18), если только функции $y_0(t)$, $a_1(t, \tau)$, $a_2(t, \tau)$ являются непрерывными функциями своих аргументов.

Ниже будет дана более точная формулировка этого утверждения.

Рассмотрим теперь случай нескольких степеней свободы. Пусть задана система n обыкновенных дифференциальных

уравнений

$$dy_s/dt = f_s(t, y_1, \ldots, y_n) \qquad (s=1, \ldots, n). \tag{30.38}$$

Предположим, что существует решение этой системы

$$y_s = y_s(t), \qquad t\in[0, T] \qquad (s=1, \ldots, n), \tag{30.39}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\varphi_i(y_1(0), \ldots, y_n(0)) = 0 \qquad (i=1, \ldots, k), \tag{30.40}$$

$$\psi_j(y_1(T), \ldots, y_n(T)) = 0 \qquad (j=1, \ldots, n-k). \tag{30.41}$$

Требуется дать способ построения такого решения.

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_s} f_s = 0. \tag{30.42}$$

Построим решения уравнения (30.42):

$$\xi_i = \xi_i(t, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i=1, \ldots, k), \tag{30.43}$$

$$\eta_j = \eta_j(t, y_1, \ldots, y_n) \qquad (j=1, \ldots, n-k), \tag{30.44}$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\xi_i(0, y_1, \ldots, y_n) = \varphi_i(y_1, \ldots, y_n) \qquad (i=1, \ldots, k), \tag{30.45}$$

$$\eta_j(T, y_1, \ldots, y_n) = \psi_j(y_1, \ldots, y_n) \qquad (j=1, \ldots, n-k). \tag{30.46}$$

Решение (30.39) с помощью (30.43) и (30.44) можно отыскивать различными способами.

I. Найдем решение $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \xi_i(T, y_1, \ldots, y_n) &= 0 \qquad (i=1, \ldots, k), \\ \psi_j(y_1, \ldots, y_n) &= 0 \qquad (j=1, \ldots, n-k). \end{aligned}\right\} \tag{30.47}$$

Чтобы найти решение (30.39), надо проинтегрировать систему (30.38) в обратном направлении по времени при условии

$$y_s(T) = \bar{y}_s \qquad (s=1, \ldots, n).$$

II. Найдем решение $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n$ системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i(y_1, \ldots, y_n) &= 0 \qquad (i=1, \ldots, k), \\ \eta_j(0, y_1, \ldots, y_n) &= 0 \qquad (j=1, \ldots, n-k). \end{aligned}\right\} \tag{30.48}$$

Для того чтобы построить решение (30.39), надо проинтегрировать систему (30.38) при начальных условиях

$$y_s(0) = \tilde{y}_s \qquad (s=1, \ldots, n).$$

III. Так как решение (30.39) удовлетворяет условиям (30.40) и (30.41), то обязательно выполняются следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\xi_i(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)=0 \qquad (i=1,\ \ldots,\ k), \\ &\eta_j(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)=0 \qquad (j=1,\ \ldots,\ n-k). \end{aligned}\right\} \tag{30.49}$$

Равенства (30.49) имеют место вдоль любой интегральной кривой, удовлетворяющей (30.40) и (30.41). Следовательно, искомое решение (30.39) можно отыскать из них, не обращаясь к интегрированию системы (30.38). Воспользуемся равенствами (30.49) для построения вычислительного алгоритма, позволяющего определить с наперед заданной точностью решение (30.39) системы (30.38) в том случае, когда краевые условия линейны и система (30.38) является квазилинейной.

Пусть

$$f_s(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)=\sum_{i=1}^{n} p_{si}(t)\,y_i+q_s(t)+\mu g_s(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n),$$

$$\varphi_i=\sum_{s=1}^{n} a_{is}y_s+b_i,$$

$$\psi_j=\sum_{s=1}^{n} \alpha_{js}y_s+\beta_j.$$

Тогда уравнения (30.38) и краевые условия (30.40) и (30.41) можно записать в векторно-матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt}=P(t)\,\mathbf{Y}+\mathbf{Q}(t)+\mu\mathbf{G}(t,\ \mathbf{Y}), \tag{30.50}$$

$$A_0\mathbf{Y}(0)+\mathbf{B}_0=0,$$

$$\Gamma_0\mathbf{Y}(T)+\boldsymbol{\Delta}_0=0,$$

где $\mathbf{Y}=(y_1,\ \ldots,\ y_n)$, $\mathbf{Q}(t)$, $\mathbf{G}(t,\ \mathbf{Y})$ — векторные функции своих аргументов; $\mathbf{B}_0$, $\boldsymbol{\Delta}_0$ — постоянные векторы; $P(t)$, A_0 и Γ_0 — матрицы соответствующих размерностей.

Имея в виду получить интегральные уравнения, которым непременно будет удовлетворять решение (30.39), будем теперь рассматривать векторную функцию $\mathbf{G}(t,\ \mathbf{Y})$ лишь как функцию времени, считая, что она вычислена на интересующем нас решении (30.39).

Легко видеть, что в рассматриваемом случае решения (30.43) и (30.44) уравнения (30.42) будут линейными функциями, а именно:

$$\boldsymbol{\Xi}=A(t)\,\mathbf{Y}+\mathbf{B}(t),\qquad \mathbf{H}=\Gamma(t)\,\mathbf{Y}+\boldsymbol{\Delta}(t),$$

где $\boldsymbol{\Xi}=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_k)$, $\mathbf{H}=(\eta_1,\ \ldots,\ \eta_{n-k})$, причем матрица $A(t)$

и вектор $\mathbf{B}(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$dA/dt + AP = 0, \tag{30.51}$$

$$d\mathbf{B}/dt + A\mathbf{Q} = 0, \tag{30.52}$$

$$A(0) = A_0, \tag{30.53}$$

$$\mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0. \tag{30.54}$$

Аналогично матрица $\Gamma(t)$ и вектор $\Delta(t)$ удовлетворяют системе

$$\frac{d\Gamma}{dt} + \Gamma P = 0, \tag{30.55}$$

$$\frac{d\Delta}{dt} + \Gamma \mathbf{Q}' = 0, \tag{30.56}$$

$$\Gamma(0) = \Gamma_0, \tag{30.57}$$

$$\Delta(0) = \Delta_0. \tag{30.58}$$

Здесь

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}(t) + \mu \mathbf{G}(t, \mathbf{Y}(t)).$$

Интегрируя уравнение (30.52) при начальном условии (30.54), найдем

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_1(t) - \mu \int_0^t A(\tau)\mathbf{G}(\tau, \mathbf{Y}(\tau))\, d\tau,$$

$$\mathbf{B}_1(t) = \mathbf{B}_0 - \int_0^t A(\tau)\mathbf{Q}(\tau)\, d\tau.$$

Аналогично

$$\Delta(t) = \Delta_1(t) - \int_T^t \Gamma(\tau)\mathbf{G}(\tau, \mathbf{Y}(\tau))\, d\tau,$$

$$\Delta_1(t) = \Delta_0 - \int_T^t \Gamma(\tau)\mathbf{Q}(\tau)\, d\tau.$$

Из (30.49) имеем

$$A(t)\mathbf{Y} + \mathbf{B}(t) = 0, \tag{30.59}$$

$$\Gamma(t)\mathbf{Y} + \Delta(t) = 0. \tag{30.60}$$

Умножая слева (30.59) на $A^*(t)$, а (30.60) — соответственно на $\Gamma^*(t)$ и затем складывая почленно и умножая слева на матрицу

$C(t)=(A^*A+\Gamma^*\Gamma)^{-1}$, получим

$$\mathbf{Y}(t)=\mathbf{Y}_0(t)+\mu\int_0^t A_1(t,\ \tau)\mathbf{G}(\tau,\ \mathbf{Y}(\tau))\,d\tau+$$
$$+\mu\int_T^t A_2(t,\ \tau)\mathbf{G}(\tau,\ \mathbf{Y}(\tau))\,d\tau, \qquad (30.61)$$

где

$$\mathbf{Y}_0(t)=-C(t)(A^*\mathbf{B}_1(t)+\Gamma^*\mathbf{\Delta}_1(t)),$$
$$A_1(t,\ \tau)=C(t)\,A^*(t)\,A(\tau),$$
$$A_2(t,\ \tau)=C(t)\,\Gamma^*(t)\,\Gamma(\tau).$$

Обозначим через $Z(t)$ фундаментальную систему решений линейных уравнений

$$\frac{dZ}{dt}+PZ=0, \qquad (30.62)$$

где $Z(0)=E$, E — единичная матрица. Тогда

$$A(t)=A_0Z(t),$$
$$\Gamma(t)=\Gamma_0Z^{-1}(T)\,Z(t).$$

Поэтому

$$A^*(t)\,A(t)+\Gamma^*(t)\,\Gamma(t)=Z^*(t)\,[A_0^*A_0+(Z^{-1}(T))^*\,\Gamma_0^*\Gamma_0Z^{-1}(T)]\,Z(t),$$

откуда вытекает, что для того, чтобы существовали матрицы A_1, A_2, необходимо и достаточно, чтобы постоянная матрица, стоящая в квадратных скобках, была неособой.

Теорема 30.1. *Пусть:* 1) *правые части системы дифференциальных уравнений* (30.50) *заданы при* $t\in[0,\ T]$, $\|\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_0\|\leqslant r$ *вещественны, непрерывны и функции* $g_s(t,\ \mathbf{Y})$ *удовлетворяют условию Липшица по* $y_1,\ \ldots,\ y_n$; 2) *матрица* $A_0^*A_0+(Z^{-1}(T))^*\times\times\Gamma_0^*\Gamma_0Z^{-1}(T)$ — *неособая.*

Тогда существует $\mu_0>0$ *такое, что интегральное уравнение* (30.61) *будет иметь единственное решение, удовлетворяющее условию*

$$\|\mathbf{Y}(t)-\mathbf{Y}_0(t)\|\leqslant m\,|\mu|, \qquad |\mu|<\mu_0.$$

Здесь r *и* m — *положительные постоянные и*

$$\|\mathbf{Y}(t)-\mathbf{Y}_0(t)\|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_{j0})^2}.$$

Доказательство. Обозначим через $K(\mathbf{Y})$ интегральный оператор, входящий в уравнение (30.61). Тогда это уравнение

можно записать в форме

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 + \mu K(\mathbf{Y}). \tag{30.63}$$

Построим последовательность векторных функций

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}_0 + \mu K(\mathbf{Y}_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Обычным способом убеждаемся, что существует такое число $\mu_0 > 0$, что при $|\mu| < \mu_0$ будет $\|\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_0\| \leqslant |\mu| m < r$, и, следовательно, построение всех приближений оказывается возможным. Далее, как при доказательстве сходимости в теореме Пикара, с помощью условия Липшица убеждаемся, что ряд

$$\mathbf{Y}_0 + (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_0) + (\mathbf{Y}_2 - \mathbf{Y}_1) + \ldots + (\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_{n-1}) + \ldots$$

сходится абсолютно и равномерно к решению $\mathbf{Y}(t)$ интегрального уравнения (30.61), которое обязательно будет удовлетворять исходным дифференциальным уравнениям и краевым условиям.

На возможность построения последовательных приближений для квазилинейных систем с линейными краевыми условиями автору указал В. В. Новожилов.

Рассмотрим теперь общий случай неразделенных краевых условий.

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$dy_s/dt = f_s(t, y_1, \ldots, y_n), \tag{30.64}$$

и пусть на промежутке $t \in [0, T]$ система (30.64) имеет решение

$$y_s = y_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n), \tag{30.65}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\varphi_i(\mathbf{Y}(t_0), \mathbf{Y}(t_1), \ldots, \mathbf{Y}(t_{k+1})) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{30.66}$$

где

$$t_0 = 0, \; t_{k+1} = T, \quad t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1}, \quad \mathbf{Y}(t) = (y_1, \ldots, y_n).$$

Требуется дать способ отыскания решения (30.65) системы (30.64), удовлетворяющего условию (30.66).

Перейдем к решению поставленной задачи. Пусть решение (30.65) найдено:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t).$$

Положим

$$\mathbf{Y}_j(t) = \mathbf{Y}(t_j + \alpha_j t) \qquad (j = 1, \ldots, k+1). \tag{30.67}$$

Легко видеть, что векторные функции (30.67) будут удовлетворять уравнениям

$$d\mathbf{Y}_j/dt = \mathbf{F}_j(t, \mathbf{Y}_j), \tag{30.68}$$

где

$$\mathbf{F}_j(t, \mathbf{Y}_j) = \alpha_j \mathbf{F}(t_j + \alpha_j t, \mathbf{Y}_j).$$

Векторная функция $\mathbf{F}$ имеет компоненты $f_s(t, \mathbf{Y})$, являющиеся правыми частями системы (30.64). Кроме того, векторные функции (30.67) удовлетворяют начальным условиям

$$\mathbf{Y}_j(0) = \mathbf{Y}(t_j) \qquad (j = 1, \ldots, k+1). \tag{30.69}$$

Итак, если система (30.64) имеет решение (30.65), удовлетворяющее условию (30.66), то необходимо система $n(k+2)$ уравнений (30.64), (30.68) будет иметь решение вида (30.65), и это решение будет удовлетворять краевым условиям

$$\varphi_i(\mathbf{Y}(0), \mathbf{Y}_1(0), \ldots, \mathbf{Y}_{k+1}(0)) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{30.70}$$

Обратимся теперь к постоянным величинам $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$. Выберем эти величины так, чтобы в заданный момент $\bar{t} \in (0, T)$ были выполнены соотношения

$$\mathbf{Y}(\bar{t}) = \mathbf{Y}_j(\bar{t}) \qquad (j = 1, \ldots, k+1). \tag{30.71}$$

Для того чтобы имело место (30.71), следует положить

$$\alpha_j = \frac{\bar{t} - t_j}{\bar{t}}.$$

При таком выборе величин α_j для систем уравнений (30.64), (30.68) на промежутке $[0, \bar{t}]$ возникает краевая задача с разделенными краевыми условиями (30.70), (30.71). Следовательно, на этом промежутке можно применить развитую выше теорию. Однако можно действовать и непосредственно, а именно: рассмотрим уравнение в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_s} f_s + \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\partial V}{\partial y_{sj}} f_{sj} = 0, \tag{30.72}$$

где f_{sj} — компоненты векторов $\mathbf{F}_j$ и y_{sj} — компоненты векторов $\mathbf{Y}_j$.

Построим n решений уравнения (30.72)

$$_i = \xi_i(t, \mathbf{Y}, y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{30.73}$$

с начальными условиями

$$\xi_i(0, \mathbf{Y}, y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}) = \varphi_i(\mathbf{Y}, y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}). \tag{30.74}$$

На искомом решении функции (30.73) будут удовлетворять уравнениям

$$\xi_i(t, \mathbf{Y}, y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}) = 0. \tag{30.75}$$

Для того чтобы найти искомое решение в точке $\overline{t}$, достаточно в равенствах (30.75) положить $t=\overline{t}$ и воспользоваться условиями (30.71). Тогда уравнения (30.75) позволят определить векторную функцию $\mathbf{Y}(\overline{t})$. Если считать теперь величину $\overline{t} \in (0, T)$ произвольной, то приведенная выше процедура позволяет найти решение (30.65) системы (30.64) без дальнейшего интегрирования.

Рассмотрим несколько подробнее случай квазилинейных систем с линейными неразделенными краевыми условиями. Итак, пусть краевые условия (30.66) имеют вид

$$\sum_{j=0}^{k+1} A_{j0}\mathbf{Y}(t_j)+\mathbf{B}_0=0. \tag{30.76}$$

Здесь A_{j0} — вещественные квадратные матрицы с постоянными элементами и $\mathbf{B}_0$ — вектор с постоянными вещественными компонентами. Пусть исходная система (30.64), записанная в векторной форме, имеет вид

$$d\mathbf{Y}/dt = P(t)\,\mathbf{Y}+\mathbf{Q}(t)+\mu\mathbf{F}(t, \mathbf{Y}). \tag{30.77}$$

Тогда система уравнений (30.68) будет иметь вид

$$\frac{d\mathbf{Y}_j}{dt} = P_j(t)\,\mathbf{Y}_j+\mathbf{Q}_j(t)+\mu\mathbf{F}_j(t, \mathbf{Y}_j) \qquad (j=1, \ldots, k+1), \tag{30.78}$$

где

$$\begin{gathered} P_j(t)=\alpha_j P(t_j+\alpha_j t), \\ \mathbf{Q}_j(t)=\alpha_j \mathbf{Q}(t_j+\alpha_j t), \\ \mathbf{F}_j(t)=\alpha_j \mathbf{F}(t_j+\alpha_j t, \mathbf{Y}_j). \end{gathered}$$

Предположим, что решение (30.65) найдено. Тогда с помощью этого решения можно вычислить векторные функции $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_j$. Положим

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}(t)=\mathbf{F}(t, \mathbf{Y}(t)), \\ &\mathbf{R}_j(t)=\mathbf{F}_j(t, \mathbf{Y}_j(t)) \qquad (j=1, \ldots, k+1). \end{aligned} \tag{30.79}$$

Здесь $\mathbf{Y}_j(t)$ — векторные функции, определяемые формулой (30.67). Если в системах (30.77) и (30.78) нелинейные члены заменить по формуле (30.79), то получим линейные уравнения, которым будут удовлетворять функции (30.65), (30.67). Уравнение (30.72), составленное для полученных линейных систем, будет иметь решение (30.73), линейное относительно компонент векторов $\mathbf{Y}, \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_{k+1}$. Обозначим через Ξ вектор, компонентами которого являются упомянутые функции ξ_i. Тогда

$$\Xi=\sum_{j=0}^{k+1} A_j(t)\,\mathbf{Y}_j+\mathbf{B}(t). \tag{30.80}$$

Матрицы $A_j(t)$ и вектор $\mathbf{B}(t)$ удовлетворяют линейной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dA_j}{dt}+A_jP_j=0, \tag{30.81}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt}+\sum_{j=0}^{k+1} A_j(\mathbf{Q}_j+\mu\mathbf{R}_j)=0. \tag{30.82}$$

В формулах (30.80)—(30.82)

$$\mathbf{Y}_0(t)=\mathbf{Y}(t), \qquad P_0(t)=P(t),$$
$$\mathbf{Q}_0(t)=\mathbf{Q}(t), \qquad \mathbf{R}_0(t)=\mathbf{R}(t).$$

Матрицы $A_j(t)$ и вектор $\mathbf{B}(t)$ удовлетворяют начальным условиям

$$A_j(0)=A_{j0},$$
$$\mathbf{B}(0)=\mathbf{B}_0.$$

Обозначим через $Z(t)$ фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\frac{dZ}{dt}+ZP=0, \tag{30.83}$$

где $Z(0)=E$, E—единичная матрица. Тогда матрицы $A_j(t)$ можно представить в виде

$$A_j(t)=A_{j0}Z^{-1}(t_j)Z(t_j+\alpha_jt) \qquad (j=0, \ldots, k+1). \tag{30.84}$$

Интегрируя уравнение (30.82), найдем

$$\mathbf{B}(t)=\mathbf{B}_0-\int_0^t\sum_{j=0}^{k+1} A_j(\tau)\mathbf{Q}_j(\tau)\,d\tau-\mu\int_0^t\sum_{j=0}^{k+1} A_j(\tau)\mathbf{R}_j(\tau)\,d\tau. \tag{30.85}$$

Из (30.76) имеем, что искомое решение удовлетворяет системе уравнений

$$\sum_{j=0}^{k+1} A_j(t)\mathbf{Y}_j+\mathbf{B}(t)=0. \tag{30.86}$$

Положим в (30.86) $t=\bar{t}$. Используя далее соотношение (30.71), из (30.86) найдем

$$\left[\sum_{j=0}^{k+1} A_j(\bar{t})\right]\mathbf{Y}(\bar{t})=-\mathbf{B}(\bar{t}). \tag{30.87}$$

Предположим, что матрица $\sum_{j=0}^{k+1} A_j(t)$ — неособая. Обозначим обратную ей через $C(\bar{t})$; тогда из (30.87) имеем

$$\mathbf{Y}(\bar{t}) = C(\bar{t})\left[\sum_{j=0}^{k+1}\int_0^{\bar{t}} A_j(\tau)\,\mathbf{Q}_j(\tau)\,d\tau - \mathbf{B}_0\right] + \\ + \mu C(\bar{t})\sum_{j=0}^{k+1}\int_0^{\bar{t}} A_j(\tau)\,\mathbf{R}_j(\tau)\,d\tau. \quad (30.88)$$

Заменим в выражении (30.88) функции $\mathbf{R}_j(\tau)$ их выражениями через функции $\mathbf{F}_j$ и введем в j-м слагаемом новую переменную интегрирования

$$\theta = t_j + \alpha_j\tau.$$

Тогда формула (30.88) примет вид

$$\mathbf{Y}(\bar{t}) = \mathbf{Y}^0(\bar{t}) + \mu\sum_{j=0}^{k+1}\int_{t_j}^{\bar{t}} A_j(\bar{t}, \theta)\,\mathbf{F}(\theta, \mathbf{Y}(\theta))\,d\theta, \quad (30.89)$$

где

$$A_j(\bar{t}, \theta) = C(\bar{t})\,A_{j_0}Z^{-1}(t_j)\,Z(\theta),$$

$$\mathbf{Y}^0(\bar{t}) = \sum_{j=0}^{k+1}\int_{t_j}^{\bar{t}} A_j(\bar{t}, \theta)\,\mathbf{Q}(\theta)\,d\theta - C(\bar{t})\,\mathbf{B}_0. \quad (30.90)$$

Уравнение (30.89) можно рассматривать как интегральное уравнение, служащее для определения векторной функции (30.65), так как величина $\bar{t}$ в уравнении (30.89) может теперь считаться независимой переменной $\bar{t} \in [0, T]$. Заметим, что векторная функция $\mathbf{Y}^0(t)$, определяемая уравнением (30.90), будет давать решение поставленной задачи при $\mu = 0$.

Обозначим через $K(\mathbf{Y})$ интегральный оператор, входящий в правую часть (30.89). Тогда уравнение (30.89) можно представить в форме

$$\mathbf{Y}(t) = Y^0(t) + \mu K(\mathbf{Y}). \quad (30.91)$$

Положим

$$\mathbf{Y}^N(t) = \mathbf{Y}^0(t) + \mu K(\mathbf{Y}^{N-1}), \qquad N = 1, 2, \ldots$$

Оказывается, что при широких предположениях относительно правых частей исходной системы дифференциальных уравнений последовательные приближения $\mathbf{Y}^0$, $\mathbf{Y}^1$, ... равномерно сходятся к решению (30.65) системы (30.64), удовлетворяющему краевым условиям (30.76). А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 30.2. *Пусть*: 1) *правые части системы уравнений* (30.77) *заданы при* $t \in [0, T]$, $\|\mathbf{Y}^0(t) - \mathbf{Y}\| \leqslant r$ *вещественны, непрерывны и удовлетворяют условиям Липшица по* $\mathbf{Y}$; 2) *матрица*

$\sum\limits_{j=0}^{k+1} A_{j0} Z^{-1}(t_j)$ — *неособая*.

Тогда существует положительное число μ_0 *такое, что при любом* μ, *для которого* $|\mu| < \mu_0$, *система* (30.77) *имеет непрерывное решение* (30.65), *удовлетворяющее краевым условиям* (30.76), *причем это решение будет единственным*.

Доказательство. Если μ_0 выбрано так, что $\mu_0 m_1 < r$, где m_1 и r — положительные константы, то в силу непрерывности решения

$$\|\mathbf{Y}^N - \mathbf{Y}^0\| \leqslant \mu m_1 \qquad (N = 1, 2, \ldots).$$

Далее из условий Липшица будем иметь

$$\|\mathbf{Y}^N - \mathbf{Y}^{N-1}\| \leqslant \mu m_2 \|\mathbf{Y}^{N-1} - \mathbf{Y}^{N-2}\|.$$

Здесь $N = 2, 3, \ldots$ Если величина μ_0 к тому же выбрана так, чтобы было $\mu_0 m_2 < 1$, то ряд

$$\mathbf{Y}^0 + (\mathbf{Y}^1 - \mathbf{Y}^0) + (\mathbf{Y}^2 - \mathbf{Y}^1) + \ldots$$

будет сходиться равномерно и абсолютно при $t \in [0, T]$ к непрерывному решению системы (30.77). Это решение непременно будет удовлетворять краевым условиям (30.76). Единственность такого решения устанавливается стандартным образом.

Дадим теперь условия разрешимости краевой задачи.

Выше был рассмотрен случай, когда матрица

$$A(t) = \sum_{j=0}^{k+1} A_j(t) \tag{30.92}$$

неособая. Уравнение (30.87) можно переписать в виде

$$A(t)\,\mathbf{Y}(t) = \mathbf{B}_1 + \mu \mathbf{B}_2, \tag{30.93}$$

где

$$\mathbf{B}_1 = \int_0^t \sum_{j=0}^{k+1} A_j(\tau)\,\mathbf{Q}_j(\tau)\,d\tau - \mathbf{B}_0 = \sum_{j=0}^{k+1} \int_{t_j}^{t} A_{j0} Z^{-1}(t_j)\,Z(\tau)\,\mathbf{Q}(\tau)\,d\tau - \mathbf{B}_0, \tag{30.94}$$

$$\mathbf{B}_2 = \int_0^t \sum_{j=0}^{k+1} A_j(\tau)\,\mathbf{R}(\tau)\,d\tau = \sum_{j=0}^{k+1} \int_{t_j}^{t} A_{j0} Z^{-1}(t_j)\,Z(\tau)\,\mathbf{F}(\tau, \mathbf{Y}(\tau))\,d\tau. \tag{30.95}$$

Пусть теперь матрица (30.92) — особая. Тогда, как будет показано ниже, ранг этой матрицы не зависит от t. Обозначим его через k.

Теорема 30.3. *Система* (30.77) *при* $\mu=0$ *имеет непрерывное решение, удовлетворяющее условию* (30.76), *тогда и только тогда, когда любой постоянный вектор* Λ, *удовлетворяющий соотношению*

$$\Lambda^* \bar{A} = 0,$$

будет удовлетворять также условию

$$\Lambda^* \bar{\mathbf{B}}_1 = 0,$$

где $\Lambda^* \bar{\mathbf{B}}_1$ — *скалярное произведение* Λ *на* $\bar{\mathbf{B}}_1$,

$$\bar{A} = \sum_{j=0}^{k+1} A_{j0} Z^{-1}(t_j),$$

$$\bar{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{B}_0 + \sum_{j=0}^{k+1} \int_0^{t_j} A_{j0} Z^{-1}(t_j) Z(\tau) \mathbf{Q}(\tau)\, d\tau.$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы ранг матрицы $A(t)$ и ранг расширенной матрицы, получающейся из $A(t)$ путем приписывания $(n+1)$-го столбца, равного $\mathbf{B}_1(t)$, будут совпадать. А тогда линейная система уравнений, получающаяся из (30.93), при $\mu=0$ будет иметь решение, зависящее от $n-k$ произвольных постоянных. Итак, покажем, что ранги упомянутых матриц совпадают при выполнении условий теоремы. Матрица $A(t)$, определяемая выражением (30.92), может быть представлена также в форме

$$A(t) = \sum_{j=0}^{k+1} A_{j0} Z^{-1}(t_j) Z(t) = \bar{A} Z(t).$$

Так как матрица $Z(t)$ — неособая, то ранг матрицы $A(t)$ будет совпадать с рангом постоянной матрицы $\bar{A}$. Пусть Λ — некоторый постоянный вектор такой, что

$$\Lambda^* \bar{A} = 0.$$

Тогда

$$\Lambda^* A(t) = 0.$$

Вычислим скалярное произведение вектора Λ на $\mathbf{B}_1(t)$. Получим

$$\Lambda^* \mathbf{B}_1(t) = \Lambda^* \left[\sum_{j=0}^{k+1} \int_{t_j}^{t} A_{j0} Z^{-1}(t_j) Z(\tau) \mathbf{Q}(\tau)\, d\tau \right] =$$

$$= \Lambda^* \left[\sum_{j=0}^{k+1} \int_0^{t} A_{j0} Z^{-1}(t_j) Z(\tau) \mathbf{Q}(\tau)\, d\tau \right] - \Lambda^* \bar{\mathbf{B}}_1.$$

Покажем теперь, что обязательно будет иметь место равенство

$$\Lambda^*\mathbf{B}_1(t) = -\Lambda^*\tilde{\mathbf{B}}_1.$$

Действительно,

$$\Lambda^* \sum_{j=0}^{k+1} \int_0^t A_{j0} Z^{-1}(t_j) Z(\tau) \mathbf{Q}(\tau)\, d\tau = \Lambda^* \tilde{A} \int_0^t Z(\tau) \mathbf{Q}(\tau)\, d\tau = 0.$$

Итак, при выполнении условия теоремы из $\Lambda^* A(t) = 0$ вытекает $\Lambda^*\mathbf{B}(t) = 0$. Это и означает совпадение рангов матрицы $A(t)$ и расширенной матрицы, что и требовалось доказать.

Если матрица (30.92) имеет ранг k, то обязательно существует $n-k$ линейно независимых векторов Λ_i, удовлетворяющих условию $\Lambda_i^* A(t) = 0$. Предположим, что условия теоремы 30.3 выполнены и существует решение системы (30.77), удовлетворяющее краевым условиям (30.76). Подставляя это решение в уравнение (30.93), получим систему тождеств. Умножая слева полученные тождества на Λ_i^*, находим

$$\Lambda_i^* \mathbf{B}_2(\mathbf{Y}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-k). \tag{30.96}$$

Итак, если система (30.77) имеет решение, удовлетворяющее условиям (30.76), то это решение необходимо удовлетворяет уравнениям (30.93) и (30.96). Преобразуем уравнения (30.96):

$$\Lambda_i^* \sum_{j=0}^{k+1} \int_{t_j}^{t} A_{j0} Z^{-1}(t_j) Z(\tau) \mathbf{F}(\tau, \mathbf{Y}(\tau))\, d\tau =$$

$$= \Lambda_i^* \tilde{A} \int_0^t Z(\tau) \mathbf{F}(\tau, \mathbf{Y}(\tau))\, d\tau - \Lambda_i^* \sum_{j=0}^{k+1} \int_0^{t_j} A_{j0} Z^{-1}(t_j) Z(\tau) \mathbf{F}(\tau, \mathbf{Y}(\tau))\, d\tau =$$

$$= \Lambda_i^* \sum_{j=0}^{k+1} \int_0^{t_j} A_{j0} Z^{-1}(t_j) Z(\tau) \mathbf{F}(\tau, \mathbf{Y}(\tau))\, d\tau.$$

Отсюда вытекает, что уравнения (30.96) можно представить в виде

$$\Lambda_i^* \sum_{j=0}^{k+1} \int_0^{t_j} A_{j0} Z^{-1}(t_j) Z(\tau) \mathbf{F}(\tau, \mathbf{Y}(\tau))\, d\tau = 0. \tag{30.97}$$

Обозначим через $\mathbf{Y}^0 = \mathbf{Y}^0(t, C_1, \ldots, C_{n-k})$ решение уравнения (30.96) при $\mu = 0$. Подставим данное решение в подынтегральные выражения, входящие в (30.97). Полученные в результате этого функции произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_{n-k}$ обозначим через g_i:

$$g_i(C_1, \ldots, C_k) = \Lambda_i^* \sum_{j=0}^{k+1} \int_0^{t_j} A_{j0} Z^{-1}(t_j) Z(\tau) \mathbf{F}(\tau, \mathbf{Y}^0)\, d\tau. \tag{30.98}$$

Теорема 30.4. *Пусть:* 1) *выполнены условия теоремы* 30.3; 2) *существуют вещественные постоянные* $C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n-k0}$, *удовлетворяющие уравнениям*

$$g_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-k) \tag{30.99}$$

и такие, что якобиан функций $g_1, \ldots, g_{n-k}$ *по переменным* $C_1, \ldots, C_{n-k}$ *отличен от нуля в точке* $C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n-k0}$.

Тогда существует положительное число μ_0 *такое, что при любом* μ, *для которого* $|\mu| \leqslant \mu_0$, *будет существовать непрерывное решение системы* (30.77), *удовлетворяющее краевым условиям* (30.76). *Это непрерывное решение может быть получено как предел последовательных приближений, указанных ниже.*

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{Y}^0(t)$ то решение системы (30.93) при $\mu=0$, которое соответствует величинам C_{10}, $C_{20}, \ldots, C_{n-k0}$. Определим далее решение системы

$$A(t)\,\mathbf{Y}^1 = \mathbf{B}_1(t) + \mu \mathbf{B}_2(\mathbf{Y}^0). \tag{30.100}$$

Это решение будет зависеть от $n-k$ произвольных постоянных

$$\mathbf{Y}^1 = \mathbf{Y}^1(t, C_1, \ldots, C_{n-k}). \tag{30.101}$$

Выберем произвольные постоянные $C_1, \ldots, C_{n-k}$ так, чтобы функции (30.101) удовлетворяли уравнениям (30.97). Решение системы (30.100), соответствующее этим значениям произвольных постоянных, будем обозначать через $\mathbf{Y}^1(t)$. Действуя таким образом далее, можно определить N-е приближение как решение уравнения

$$A(t)\,\mathbf{Y}^N = \mathbf{B}_1(t) + \mu \mathbf{B}_2(\mathbf{Y}^{N-1}), \tag{30.102}$$

удовлетворяющее соотношениям, получающимся из (30.97) при подстановке туда функции $\mathbf{Y}^N$ вместо $\mathbf{Y}$.

Указанный способ построения последовательных приближений позволяет однозначно найти векторные функции $\mathbf{Y}^N$ ($N=1, 2, \ldots$), если иметь в виду, что произвольные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}$ на каждом шагу определяются как решения уравнения вида (30.99), расположенные в малой окрестности точки $C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n-k0}$. При доказательстве сходимости этих последовательных приближений используется факт дифференцируемости правых частей системы (30.77). Будем предполагать, что правые части системы (30.77), заданные при $t \in [0, T]$, $\|\mathbf{Y}^0(t) - \mathbf{Y}\| \leqslant r$, вещественны, непрерывны и непрерывно дифференцируемы. Здесь, как и ранее, r — некоторая положительная постоянная, $\mathbf{Y}^0(t)$ — решение уравнений (30.93) при $\mu=0$, соответствующее выбранным значениям произвольных постоянных $C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n-k0}$.

Обозначим через $\mathbf{C}$ вектор размерности $n-k$, компонентами которого являются произвольные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}$.

Тогда из уравнений (30.102) можно найти

$$\mathbf{Y}^N(t) = H_1(t)\,\mathbf{B}_1(t) + \mu H_2(t)\,\mathbf{B}_2(\mathbf{Y}^{N-1}) + H_3(t)\,\mathbf{C}^N, \tag{30.103}$$

где $H_1(t)$, $H_2(t)$, $H_3(t)$ — матрицы, определяемые при решении уравнений (30.102). Подставляя функции $\mathbf{Y}^N(t)$ в равенство (30.97), получим, что постоянный вектор $\mathbf{C}^N$ удовлетворяет уравнениям

$$g_i(H_1(t)\,\mathbf{B}_1(t) + \mu H_2(t)\,\mathbf{B}_2(\mathbf{Y}^{N-1}) + H_3(t)\,\mathbf{C}^N) = 0$$
$$(i = 1, \ldots, n-k). \tag{30.104}$$

Система (30.104) имеет решение $\mathbf{C}^0$ при $\mu = 0$. Якобиан функций в точке $\mathbf{C}^0$ отличен от нуля. Поэтому существует непрерывно дифференцируемая функция $\mathbf{C}^N(\mu)$, удовлетворяющая системе (30.104) и такая, что $\mathbf{C}^N(\mu) = \mathbf{C}^0$ при $\mu = 0$.

Оценим величину $\|\mathbf{Y}^N - \mathbf{Y}^{N-1}\|$. Из (30.103) будем иметь

$$\|\mathbf{Y}^N - \mathbf{Y}^{N-1}\| \leqslant m_1 \|\mathbf{C}^N - \mathbf{C}^{N-1}\| + m_2\mu \|\mathbf{Y}^{N-1} - \mathbf{Y}^{N-2}\|.$$

Записывая равенства (30.103) для номера $N-1$ и почленно вычитая их из (30.103), а затем применяя формулу конечных приращений, найдем

$$\|\mathbf{C}^N - \mathbf{C}^{N-1}\| \leqslant m_3\mu \|\mathbf{Y}^{N-1} - \mathbf{Y}^{N-2}\|.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|\mathbf{Y}^N - \mathbf{Y}^{N-1}\| \leqslant \mu m_4 \|\mathbf{Y}^{N-1} - \mathbf{Y}^{N-2}\|.$$

Нетрудно показать, что положительное число μ_0 можно выбрать так, чтобы при любых $|\mu| \leqslant \mu_0$ величины m_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ были положительными постоянными, не зависящими от μ, и построение всех последовательных приближений оказалось возможным. Если μ_0 к тому же выбрать так, чтобы $\mu_0 m_4 < 1$, то последовательные приближения $\mathbf{Y}^0, \mathbf{Y}^1, \ldots, \mathbf{Y}^N, \ldots$ будут равномерно сходиться при $t \in [0, T]$ к непрерывному решению системы (30.77), удовлетворяющему условиям (30.76).

Если в условии (30.76) положить $k = 0$, $A_{00} = E$, $A_{10} = -E$ и $\mathbf{B}_0 = 0$, где E — единичная матрица, то получим так называемые периодические краевые условия $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(T)$. Для такого рода условий способ построения интегральных уравнений в одном частном случае был указан еще А. М. Ляпуновым.

Глава VI

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ВЕРОЯТНОСТИ

§ 31. Стохастические системы дифференциальных уравнений

Пусть задано некоторое множество Ω, элементы которого будем называть *элементарными событиями*. Пусть задано также некоторое множество F, элементами которого являются подмножества множества Ω. Элементы множества F будем называть событиями. Предположим, что события, входящие в F, образуют борелевское тело, т. е. если $F_1, F_2, \ldots$ есть элементы F, то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$$

также есть элементы F. Будем считать, что пустое множество — элемент F и $\Omega \in F$; если $F_1 \in F$, то и $\Omega/F_1 \in F$.

Зададим на множестве F такую неотрицательную вполне аддитивную функцию P, что $P(\Omega)=1$. Если $F_1 \in F$, то $P(F_1)$ — вероятность события F_1. Введем в рассмотрение множество функций $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, измеримых по отношению к F, иначе говоря, для любого $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ множество всех точек ω таких, что $\xi(\omega) < \lambda$, является элементом F. Это множество далее будем обозначать $\{\xi(\omega) < \lambda\}$.

Функция

$$f(\lambda) = P\{\xi(\omega) < \lambda\}$$

называется *функцией распределения*. Ясно, что $f(+\infty)=1$, $f(-\infty)=0$; $f(\lambda)$ не убывает и непрерывна слева в каждой точке λ. Измеримую функцию $\xi(\omega)$ называют случайной величиной. Тогда $f(\lambda)$ — функция распределения случайной величины ξ.

Если существует интеграл Лебега — Стилтьеса

$$\int_{\Omega} \xi(\omega)\,dp = E(\xi),$$

то говорят, что случайная величина ξ имеет *математическое ожидание*. Всюду в дальнейшем будем рассматривать лишь такие случайные величины, для которых существует математическое ожидание их квадрата. Множество всех таких случайных вели-

чин, заданных на Ω, обозначим через L_2. Если задано k случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, то можно определить их совместную функцию распределения

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = P\{\xi_1(\omega) < \lambda_1, \ldots, \xi_k(\omega) < \lambda_k\}.$$

Случайные величины называются *независимыми*, если

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f_1(\lambda_1) \times \ldots \times f_k(\lambda_k),$$

где

$$f_j(\lambda) = P\{\xi_j(\omega) < \lambda_j\}.$$

Функция $\eta(t)$ называется *случайной функцией* или *вероятностным процессом*, если она задана при $t \in T$, где T — некоторое множество вещественных чисел, и $\eta(t)$ при каждом $t \in T$ есть случайная величина, т. е. $\eta(t)$ при любом фиксированном t есть измеримая функция ω, так что фактически $\eta(t) = \eta(t, \omega)$ — функция двух аргументов. Говорят, что *вероятностный процесс задан*, если заданы всевозможные совместные функции распределения случайных величин $\eta(t_1), \eta(t_2), \ldots, \eta(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ при любом выборе чисел $t_1, \ldots, t_k$ из T, так что задано

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, t_1, \ldots, t_k) = P\{\eta(t_1) < \lambda_1, \ldots, \eta(t_k) < \lambda_k\}.$$

Пусть t_1, t_2 — какие-либо точки множества T. Функция двух аргументов

$$r(t_1, t_2) = E[\eta(t_1)\eta(t_2)]$$

называется *корреляционной функцией вероятностного процесса* $\eta(t)$. Если заданы два вероятностных процесса $\eta(t)$ и $\xi(t)$, то можно определить взаимную корреляционную функцию

$$r_{\xi\eta}(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\eta(t_2)].$$

Ясно, что

$$r(t_1, t_2) = r(t_2, t_1) \quad \text{и} \quad r_{\xi\eta}(t_1, t_2) = r_{\eta\xi}(t_2, t_1).$$

Пусть вероятностный процесс $\eta(t)$ задан при $t \in [0, h]$, а $h > 0$ — постоянная. Будем говорить, что $\eta(t)$ *непрерывна в точке* $\tau \in [0, h]$, если $E[\eta(t) - \eta(\tau)]^2 \to 0$ при $t \to \tau$. Если $r(t_1, t_2)$ — корреляционная функция процесса $\eta(t)$, то $\eta(t)$ будет непрерывна в точке ξ тогда и только тогда, когда $r(t_1, t_2)$ — непрерывная функция двух аргументов в точке $t_1 = \tau$ и $t_2 = \tau$. Это утверждение вытекает из двух неравенств:

$$E[\eta(t) - \eta(\tau)]^2 \leqslant |r(t, t) - r(\tau, \tau)| + 2|r(\tau, \tau) - r(t, \tau)|$$

и

$$|r(s, t) - r(\tau, \tau)| \leqslant \{E[\eta^2(s)]\, E[\eta(t) - \eta(\tau)]^2\}^{1/2} + \\ + \{E[\eta(\tau)]^2\, E[\eta(s) - \eta(\tau)]^2\}^{1/2}.$$

При рассмотрении дифференциальных уравнений, описывающих движение объекта под действием случайных возмущений, приходится использовать понятие *интеграла* и *производной вероятностного процесса.* Интеграл

$$\int_0^h \eta(t)\,dt$$

будем понимать, следуя Крамеру, как предел в среднем интегральных сумм Римана. Разобьем $[0, h]$ точками $0=t_1<t_2<\ldots<t_{n+1}=h$. Выберем в промежутках $[t_k, t_{k+1}]$ точки τ_k и построим случайную величину

$$S_\delta = \sum_{k=1}^{n} \eta(\tau_k)(t_{k+1}-t_k),$$

где $\delta = \max(t_{k+1}-t_k)$.

Будем говорить, что $\eta(t)$ интегрируема и

$$\int_0^h \eta(t)\,dt$$

существует, если существует случайная величина ξ такая, что

$$E(S_\delta-\xi)^2 \to 0 \quad \text{при} \quad \delta\to 0,$$

причем ξ не зависит от способа дробления $[0, h]$, от выбора и от способа стремления δ к 0. Для существования случайной величины ξ достаточна и необходима сходимость в себе при $\delta\to 0$ последовательности случайных величин S_δ. Это обстоятельство приводит к утверждению, что вероятностный процесс $\eta(t)$ интегрируем тогда и только тогда, когда его корреляционная функция $r(t_1, t_2)$ интегрируема по квадрату $0\leqslant t_1, t_2\leqslant h$ и, более того,

$$E\left[\int_0^h \eta(t)\,dt\right]^2 = \int_0^h\int_0^h r(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2.$$

Остановимся теперь на понятии производной вероятностного процесса. Будем говорить, что случайная функция $\eta(t)$ *дифференцируема* при $t=\tau$, если существует такая случайная величина ξ, что

$$E\left(\frac{\eta(t)-\eta(\tau)}{t-\tau}-\xi\right)^2 \to 0$$

при $t\to\tau$ и $t\neq\tau$. Случайная функция $\eta(t)$ будет дифференцируема в точке τ, если $r(t_1, t_2)$ будет иметь частные производные по аргументам и смешанную производную в точке $t_1=t_2=\tau$.

Рассмотрим теперь последовательность $\eta_n(t)$. Если

$$E[\eta_n(t)-\eta(t)]^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

равномерно по отношению к $t \in [0, h]$ и $\eta_n(t)$ непрерывны, то случайная функция $\eta(t)$ будет также непрерывной. Пусть $f_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, t_1, \ldots, t_k)$ есть конечномерная функция распределения вероятностного процесса $\eta_n(t)$, и пусть $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, t_1, \ldots, t_k)$—конечномерная функция распределения вероятностного процесса $\eta(t)$. Если

$$\eta_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta(t)$$

при всех $t \in [0, h]$, то

$$f_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, t_1, \ldots, t_k) \to f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, t_1, \ldots, t_k)$$

во всяком случае в точках непрерывности функции f. Действительно, так как $\eta_n(t) \to \eta(t)$ при любом фиксированном t в среднем, то $\eta_n(t_j) \to \eta(t_j)$, $j = 1, \ldots, k$, по мере; иначе говоря, для каждого $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ можно указать такое $N(\varepsilon, \delta)$, что при $n > N(\varepsilon, \delta)$ будет

$$P\{|\eta(t_1)-\eta_n(t_1)| \geqslant \varepsilon, \ \ldots, \ |\eta(t_k)-\eta_n(t_k)| \geqslant \varepsilon\} < \delta.$$

Обозначим множество точек ω, заключенное в скобках, через G_δ; тогда будем иметь

$$\{\eta(t_1) < \lambda_1-\varepsilon, \ \ldots, \ \eta(t_k) < \lambda_k-\varepsilon\} \subset$$
$$\subset \{\eta_n(t_1) < \lambda_1, \ \ldots, \ \eta_n(t_k) < \lambda_k\} \subset$$
$$\subset \{\eta(t_1) < \lambda_1+\varepsilon, \ \ldots, \ \eta(t_k) < \lambda_k+\varepsilon\}.$$

Последнее включение имеет место с точностью до множества точек ω, образующих G_δ. Находя меру этих множеств и совершая предельный переход при $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$, получаем $f_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, t_1, \ldots, t_k) \to f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, t_1, \ldots, t_k)$ в точках непрерывности функции f при $n \to +\infty$. Это обстоятельство показывает возможность использования функции f_n в приближенных расчетах вместо функции f.

Рассмотрим теперь систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \tag{31.1}$$

где

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N), \quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m), \quad \mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_N).$$

Будем считать, что величины y_i—вероятностные процессы, заданные при $t \in [0, T]$. Компоненты вектора $\mathbf{x}$—случайные величины, являющиеся элементами L_2. Функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ задана

при любых конечных векторах x, y и $t \in [0, T]$ и удовлетворяет условиям:

1) вероятностные процессы $y_1, \ldots, y_m$ непрерывны;

2) функции $\mathbf{f}_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}(t), t)$ непрерывны по совокупности x, t, т. е. при любом выборе векторов $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\bar{\mathbf{x}}}$ и чисел $\bar{t}$ и $\bar{\bar{t}}$ будет

$$E[\mathbf{f}_s(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}(\bar{t}), \bar{t})-\mathbf{f}_s(\bar{\bar{\mathbf{x}}}, \mathbf{y}(\bar{\bar{t}}), \bar{\bar{t}})]^2 < \varepsilon$$

при

$$\sum_{s=1}^{N} E[\bar{\mathbf{x}}_s-\bar{\bar{\mathbf{x}}}_s]+|\bar{t}-\bar{\bar{t}}| < \delta,$$

где ε сколь угодно мало, если δ достаточно мало;

3) функции f_s $(s = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют условию Липшица

$$E[f_s(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, t)-f_s(\bar{\bar{\mathbf{x}}}, \mathbf{y}, t)]^2 \leqslant L \sum_{s=1}^{N} E[\bar{\mathbf{x}}_s-\bar{\bar{\mathbf{x}}}_s]^2,$$

где L — постоянная, не зависящая от $\bar{\bar{\mathbf{x}}}$, $\bar{\mathbf{x}}$, y, t.

Пусть $\mathbf{x}_{(0)}$ — начальный вектор с компонентами из L_2. Положим

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{x}_{(0)} + \int_0^t f(\mathbf{x}^{(n-1)}(\tau), \mathbf{y}(\tau), \tau)\,d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{31.2}$$

Покажем, что существует $h > 0$ такое, что в $[0, \mathrm{h}]$ компоненты каждого из векторов $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ являются вероятностными процессами, непрерывными по t, последовательность (31.2) сходится равномерно к $\mathbf{x}(t)$, $t \in [0, h]$, каждая компонента $\mathbf{x}(t)$ — непрерывно дифференцируемый вероятностный процесс, причем

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)}, \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t).$$

Действительно, если $\mathbf{x}^{(n-1)}$ непрерывен, то вектор $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ также будет непрерывен вследствие непрерывности f. Тогда любая компонента $f_s(\mathbf{x}^{(n-1)}, \mathbf{y}, t)$ будет иметь непрерывную корреляционную функцию, а следовательно, будет существовать

$$\int_0^t f_s(\mathbf{x}^{(n-1)}(\tau), \mathbf{y}(\tau), \tau)\,d\tau$$

и каждая компонента вектора $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ будет являться непрерывным вероятностным процессом.

Установим теперь сходимость последовательности $\mathbf{x}^{(n)}(t)$. Имеем

$$\mathbf{x}^{(n+1)}(t)-\mathbf{x}^{(n)}(t) = \int_0^t [f(\mathbf{x}^{(n)}(\tau), \mathbf{y}(\tau), \tau)-f(\mathbf{x}^{(n-1)}(\tau), \mathbf{y}(\tau), \tau)]\,d\tau. \tag{31.3}$$

Умножив скалярно обе части (31.3) на вектор $\mathbf{x}^{(n+1)}(t)-\mathbf{x}^{(n)}(t)$ и взяв от обеих частей математические ожидания, получим

$$E\left(\sum_{s=1}^{N}[x_s^{(n+1)}-x_s^{(n)}]^2\right)=$$
$$\int_0^t E\left[\sum_{s=1}^{N}(x_s^{(n+1)}-x_s^{(n)})\cdot(f_s(\mathbf{x}^{(n)}(\tau),\mathbf{y}(\tau),\tau)-f_s(\mathbf{x}^{(n-1)}(\tau),\mathbf{y}(\tau),\tau)\right]d\tau. \tag{31.4}$$

Из (31.4) находим

$$E\left(\sum_{s=1}^{N}[x_s^{(n+1)}-x_s^{(n)}]^2\right)\leqslant\frac{t}{2}E\left(\sum_{s=1}^{N}[x_s^{(n+1)}-x_s^{(n)}]^2\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t E\left(\sum_{s=1}^{N}[f_s(\mathbf{x}^{(n)}(\tau),\ \mathbf{y}(\tau),\ \tau)-f_s(\mathbf{x}^{(n-1)}(\tau),\ \mathbf{y}(\tau),\ \tau)]^2\right)d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\frac{t}{2}E\left(\sum_{s=1}^{N}[x_s^{(n+1)}-x_s^{(n)}]^2\right)+\frac{NL}{2}\int_0^t E\left(\sum_{s=1}^{N}[x_s^{(n)}(\tau)-x_s^{(n-1)}(\tau)]^2\right)d\tau, \tag{31.5}$$

где N — порядок системы (31.1).

Обозначим через $S_{n+1}(t)$ левую часть равенства (31.4). Из (31.5) имеем

$$S_{n+1}(t)\leqslant\frac{NL}{2-t}\int_0^t S_n(\tau)\,d\tau. \tag{31.6}$$

Положим $h<\min(2,\ T)$ и будем все приближения рассматривать на промежутке $[0,\ h]$. Тогда

$$S_{n+1}(t)\leqslant a\int_0^t S_n(\tau)\,d\tau,$$

где $a=NL/(2-h)$. Из (31.6) находим

$$S_{n+1}(t)\leqslant\frac{a^n t^n}{n!}m,$$

где $m>0$ — такая постоянная, что $S_1(t)\leqslant m$ при $t\in[0,\ h]$. Последнее неравенство показывает, что последовательность векторов $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ сходится в среднем в себе в L_2, а тогда по теореме Рисса — Фишера будет существовать вектор $\mathbf{x}(t)$, компоненты которого принадлежат L_2 при любом фиксированном $t\in[0,\ T]$. Вследствие равномерной сходимости $\mathbf{x}^{(n)}(t)$, компоненты векторов $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ — непрерывные вероятностные процессы, но тогда функции $f_s(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{y}(t),\ t)$ будут иметь непрерывные корреляционные функции.

Вследствие этого оказывается, что компоненты вектора x непрерывно дифференцируемы и, следовательно, $x(t)$ удовлетворяет системе (31.1), при этом вектор $x(t)$—единственное решение системы (31.1) с начальным условием $x(0)=x^0$.

§ 32. Программные управления в линейных системах, оптимальные по вероятности

Пусть движение управляемого объекта в фазовом пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$ под действием управлений $u_1, \ldots, u_r$ описывается системой уравнений

$$\dot{x}(t)=A(t)x+B(t)u+f(t)+C(t)Y. \qquad (32.1)$$

Элементы матриц A, B, C будем считать вещественными непрерывными функциями при $t\in[0, T]$. Такими же будем считать компоненты вектора f. Управления $u_1, \ldots, u_r$—кусочно-непрерывные функции, заданные при $t\in[0, T]$ и такие, что $|u_j|\leqslant 1$, $j=1, \ldots, r$. Вектор $Y(t)$ имеет компоненты $y_1(t), \ldots, y_m(t)$, каждая из которых является непрерывным вероятностным процессом при $t\in[0, T]$. Обозначим через $Z(t)$ матрицу фундаментальной системы решений однородной системы

$$\dot{x}=A(t)x; \qquad Z(0)=E,$$

где E—единичная матрица. Тогда вероятностный процесс, определяемый системой (32.1) с начальным условием $x(0)=x^{(0)}$, можно представить в форме

$$x(t)=Z(t)x^{(0)}+\int_0^t Z(t)Z^{-1}(\tau)[Bu+f+CY]d\tau. \qquad (32.2)$$

Пусть задана некоторая область S фазового пространства $(x_1, \ldots, x_n)$. Положим

$$J(u)=P\{x(T)\in S\}. \qquad (32.3)$$

Функционал J представляет собой вероятность попадания правого конца стохастического движения, описываемого системой (32.1), в область S. Задача состоит в том, чтобы найти управления $u_1, \ldots, u_r$ так, чтобы функционал J имел наибольшее возможное значение при условии $|u_j|\leqslant 1$ $(j=1, \ldots, r)$. Решение этой задачи в общем случае затруднительно. Дадим способы решения этой задачи в некоторых конкретных случаях. Прежде всего найдем математические ожидания и дисперсии компонент вектора $x(t)$. Имеем

$$E[x(t)]=Z(t)E[x^{(0)}]+\int_0^t Z(t)Z^{-1}(\tau)[Bu+f+CE[Y]]d\tau. \qquad (32.4)$$

Компоненты вектора $E[\mathrm{x}]$ будем обозначать через $a_1, \ldots, a_n$. Легко видеть, что каждая компонента представляется в форме

$$a_s = a_s^{(0)}(t) + \int_0^t \sum_{j=1}^r c_{sj}(t, \tau) u_j(\tau)\, d\tau, \quad s = 1, \ldots, n. \qquad (32.5)$$

Дисперсии компонент вектора x определяются по формулам

$$D_s^2(t) = E[x_s(t) - a_s(t)]^2, \quad s = 1, \ldots, n. \qquad (32.6)$$

Из формулы (32.6) вытекает, что дисперсии компонент вектора x определяются через корреляционные и взаимно корреляционные функции вероятностных процессов $y_1, \ldots, y_m$ и не зависят от управлений $u_1, \ldots, u_r$. Будем считать, что компонента $\mathrm{x}_1(t)$ вектора $\mathrm{x}(t)$ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $E[\mathrm{x}_1(t)] = a_1(t)$ и дисперсией $D_1(t)$. Положим

$$J_1(\mathrm{u}) = P\{|\mathrm{x}_1(T)| \leqslant l\}.$$

Функционал J_1 есть вероятность попадания правого конца стохастического движения $\mathrm{x}(T)$ системы (32.1) в n-мерный слой $-l \leqslant x_1 \leqslant l$. Требуется управления $u_1, \ldots, u_r$ выбрать так, чтобы $J_1(\mathrm{u})$ имел наибольшее возможное значение при условии $|u_j| \leqslant 1$ $(j = 1, \ldots, r)$. Функционал $J_1(\mathrm{u})$ может быть представлен в форме

$$J_1(u) = \int_{-l}^{l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, D_1(T)} \exp\left(\frac{x - a_1(T))^2}{2D_1^2(T)}\right) dx. \qquad (32.7)$$

Из (32.7) вытекает, что $J_1(\mathrm{u})$ имеет наибольшее возможное значение тогда и только тогда, когда $|a_1(T)|$ достигает наименьшего возможного значения, так как $J_1(\mathrm{u})$ монотонно возрастает при убывании $a_1(T)$, если $a_1(T) > 0$, и при возрастании $a_1(T)$, если $a_1(T) < 0$.

Обозначим оптимальное управление через $u_j^{(0)}$ $(j = 1, \ldots, r)$. Если

$$a_1^{(0)}(T) > 0 \quad \text{и} \quad a_1^{(0)}(T) - \int_0^T \sum_{j=1}^r |c_{1j}(T, \tau)|\, d\tau > 0,$$

то

$$u_j^{(0)} = -\operatorname{sign} c_{1j}(T, t).$$

Если же

$$a_1^{(0)}(T) < 0 \quad \text{и} \quad a_1^{(0)}(T) + \int_0^T \sum_{j=1}^r |c_{1j}(T, \tau)|\, d\tau < 0,$$

то

$$u_j^{(0)} = \operatorname{sign} c_{1j}(T, \tau).$$

Итак, в рассмотренных случаях

$$u_j^{(0)} = -\operatorname{sign}\left[a_1^{(0)}(T)\, c_{1j}(T,\ \tau)\right].$$

При этих управлениях оптимальное значение вероятности попадания дается формулой

$$J_1(u^{(n)}) = \int_{-l}^{l} \frac{\exp\left(-\dfrac{\left(x - a_1^{(0)}(T) + \operatorname{sign} a_1^{(0)} \int\limits_0^T \sum\limits_{j=1}^{r} |c_{1j}(T,\ \tau)|\, d\tau\right)^2}{2D_1^2(T)}\right)}{\sqrt{2\pi}\, D_1(T)}\, dx.$$

Если же

$$a_1^{(0)}(T) > 0 \quad \text{и} \quad a_1^{(0)} - \int\limits_0^T \sum_{j=1}^{r} |c_{1j}(T,\ \tau)|\, d\tau < 0,$$

то оптимальных управлений существует, вообще говоря, бесконечное множество. В качестве одного из них можно взять то же самое управление, что и выше, однако задав его на $[0,\ t_0]$. На промежутке же $[t_0,\ T]$ движение объекта при таком управлении должно быть автономным:

$$u_j^{(0)} = -\operatorname{sign} a_1^{(0)} c_{1j}(T,\ t), \quad t \in [0,\ t_0],$$

$$u_j^{(0)} \equiv 0, \quad t \in [t_0,\ T],$$

где t_0 — наименьшее значение t, при котором

$$a_1^{(0)} = \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{r} |c_{1j}(T,\ \tau)|\, d\tau.$$

Если $a_1^{(0)}(T) < 0$, то t_0 выбирается как наименьшее значение t, при котором

$$a_1^{(0)}(T) + \int\limits_0^{t_0} \sum_{j=1}^{r} |c_{1j}(T,\ \tau)|\, d\tau = 0.$$

Автономное движение объекта можно осуществлять не только на последнем участке движения, а на любом другом участке $t \in [t_1,\ t_2]$ или на какой-либо совокупности таких участков, однако участки автономного движения должны удовлетворять следующему необходимому условию. Обозначим объединение этих участков через A, а дополнение до промежутка $[0,\ T]$ — через $\bar{A}$. Если управление

$$u_j^{(0)} = -\operatorname{sign} a_1^{(0)}(T)\, c_{1j}(T,\ t)$$

при $l \in \bar{A}$ и $u_l^{(0)} = 0$ при $l \in A$, то оно будет оптимальным при

$$a_1^{(0)}(T) - \operatorname{sign} a_1^{(0)}(T) \int\limits_{\bar{A}} \sum_{j=1}^{r} |c_{1j}(T, \tau)| \, d\tau = 0.$$

Пусть a_j, $j = 1, \ldots, n$, как и выше,—математические ожидания $x_1, \ldots, x_n$. Тогда величины a_j могут быть представлены в форме

$$a_j = a_j^{(0)} + \int_0^T \sum_{i=1}^{r} b_{ji} u_i \, dt, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{32.8}$$

Пусть так же, как и ранее, d_j, $j = 1, \ldots, n$,—дисперсии $x_1, \ldots, x_n$. Предположим, что случайные величины $x_1(T), \ldots, x_n(T)$ независимы и нормально распределены. Тогда их совместная функция распределения

$$F(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = F_1(\lambda_1) F_2(\lambda_2) \ldots F_k(\lambda_k),$$

где $F_j(\lambda_j)$—функция распределения случайной величины $x_j(T)$, $j = 1, \ldots, k$, так что

$$F_j(\lambda_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, d_j} \int_{-\infty}^{\lambda_j} \exp\left(-\frac{(x - a_j)^2}{2d_j^2}\right) dx.$$

Положим

$$J(\mathbf{u}) = P\{x_1(T), \ldots, x_k(T) \in S\},$$

где P—вероятность события, заключенного в фигурные скобки. Множество S есть k-мерный параллелепипед

$$-l_j \leqslant x_j \leqslant l_j, \quad j = 1, \ldots, k, \quad l_j > 0.$$

Функционал J может быть представлен тогда в виде

$$J(\mathbf{u}) = J_1(\mathbf{u}) J_2(\mathbf{u}) \ldots J_k(\mathbf{u}),$$

где

$$J_j(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, d_j} \int_{-l_j}^{l_j} \exp\left(-\frac{(x - a_j)^2}{2d_j^2}\right) dx.$$

Выше было найдено программное управление, оптимальное по вероятности в случае $k = 1$. Поставим задачу построения программного оптимального управления для $k > 1$. Для отыскания такого программного управления можно предложить различные методы последовательных приближений. Отметим некоторые из них. Предположим, что $\mathbf{u}^{(0)} = (u_1^{(0)}, \ldots, u_r^{(0)})$ представляет собой оптимальное управление. Функции $u_l^{(0)}$ могут принимать одно из

трех значений: -1, 0, $+1$. Выберем некоторую точку $\tau \in [0, T]$ так, чтобы управление $u_j^{(0)}$ принимало одно и то же значение в промежутке $[\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon]$, где ε достаточно мала. Иначе говоря, предположим, что точка τ не является точкой переключения для управления $u_j^{(0)}$, а величина $\varepsilon_j = u_j^{(0)}(\tau)$ может быть либо $+1$, либо -1. Построим управление $\overline{u}_j^{(0)}$ следующим образом: $\overline{u}_j^{(0)} = -\varepsilon_j$ при $t \in [\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon]$ и $\overline{u}_j^{(0)} = u_j^{(0)}$ при $t \in [0, T]$ и $t \overline{\in} (\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon)$. Рассмотрим управление

$$\overline{\mathbf{u}}^0 = (u_1^{(0)}, \ldots, u_{j-1}^{(0)}, \overline{u}_j, u_{j+1}^{(0)}, \ldots, u_r^{(0)}).$$

Так как $\mathbf{u}^{(0)}$ — оптимальное управление, то обязательно

$$J(\mathbf{u}^{(0)}) \geqslant J(\overline{\mathbf{u}}^{(0)})$$

при любом выборе достаточно малого $\varepsilon > 0$. Если обозначить a_j через $a_j(\mathbf{u})$, то будем иметь

$$a_j = a_j(\mathbf{u}^{(0)} + \delta_j) = a_j(\overline{\mathbf{u}}^{(0)}), \quad j = 1, \ldots, k.$$

Функционал $J(\mathbf{u})$ является аналитической функцией величин $\delta_1, \ldots, \delta_k$ при $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}^{(0)}$. Если разложить этот функционал в ряд по степеням $\delta_1, \ldots, \delta_k$ и ограничиться лишь линейными членами разложения, то получим

$$J(\overline{\mathbf{u}}^{(0)}) = J(\mathbf{u}^{(0)}) + \sum_{i=1}^{k} c_i \delta_i + \ldots,$$

где

$$c_i = \left.\frac{\partial J(\overline{\mathbf{u}}^{(0)})}{\partial \delta_i}\right|_{\delta_1 = \ldots = \delta_k = 0}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Следовательно,

$$c_i = \left[\frac{\partial}{\partial \delta_i} J_i(\overline{\mathbf{u}}^{(0)})\right] \left.\frac{J(\mathbf{u}^{(0)})}{J_i(\mathbf{u}^{(0)})}\right|_{\delta_1 = \ldots = \delta_k = 0}.$$

Из последней формулы вытекает, что

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, d_i}\left(\exp\left(-\frac{(-l_i - a_i(\mathbf{u}^{(0)}))^2}{2d_i^2}\right) - \exp\left(-\frac{(+l_i - a_i(\mathbf{u}^{(0)}))^2}{2d_i^2}\right)\right)\frac{J(\mathbf{u}^{(0)})}{J_i(\mathbf{u}^{(0)})}.$$

Отсюда следует, что число c_i имеет тот же знак, что и число $-a_i(\mathbf{u}^{(0)})$, т. е.

$$\operatorname{sign} c_i = -\operatorname{sign} a_i(\mathbf{u}^{(0)}).$$

Предположим, что при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \delta_i \neq 0.$$

Тогда, в силу оптимальности управления $\mathbf{u}^{(0)}$, $\sum_{i=1}^{k} c_i \delta_i < 0$.

Найдем фактическое выражение для δ_i:

$$\delta_i = a_i(\bar{\mathbf{u}}^{(0)}) - a_i(\mathbf{u}^{(0)}) = -2 \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \varepsilon_j b_{ij}(t)\,dt = -2 \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} u_j^{(0)} b_{ij}(t)\,dt,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \delta_i = -2 \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^{k} c_i b_{ij} \right) u_j^{(0)}\,dt.$$

Из условия оптимальности управления $\mathbf{u}^{(0)}$, как уже отмечалось, следует, что

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \sum_{i=1}^{k} c_i b_{ij} u_j^{(0)}\,dt > 0.$$

Значит,

$$u_j^{(0)} = \operatorname{sign} \sum_{i=1}^{k} c_i b_{ij}. \qquad (32.9)$$

Это выражение для оптимального управления фактически совпадает с тем, которое было получено при $k=1$, если иметь в виду, что при $k=1$ имеется лишь одна величина c_1, знак которой совпадает со знаком $-a_1(\mathbf{u}^{(0)})$ и, следовательно, с $-a^{(0)}$ в том случае, когда участок автономного движения отсутствует и

$$u_j^{(0)} = -\operatorname{sign}(a^{(0)} b_j). \qquad (32.10)$$

При $k > 1$ формулу (32.10) можно использовать для построения последовательных приближений.

Возьмем некоторое управление $\mathbf{u}^{(1)}$. Вычислим с помощью $\mathbf{u}_1$ величины $c_{11}, \ldots, c_{k_1}$ подобно тому, как $c_1, \ldots, c_k$ вычисляются через $\mathbf{u}^{(0)}$. Положим далее

$$u_j^{(2)} = \operatorname{sign} \sum_{i=1}^{k} c_{i1} b_{ij}, \quad t \in [0, T].$$

Управление

$$\mathbf{u}^{(2)} = (u_1^{(2)}, \ldots, u_r^{(2)})$$

образует второе приближение. С управлением $\mathbf{u}^{(2)}$ поступаем так же, как и с $\mathbf{u}^{(1)}$. В результате этого процесса получим

последовательность $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r)}, \ldots$, образующую последовательные приближения, вопрос о сходимости которых остается открытым. Систему равенств (32.10) можно рассматривать как систему нелинейных интегральных уравнений, служащих для определения оптимальных управлений. Тогда описанный выше способ последовательных приближений можно рассматривать как обычный способ для решения этой системы интегральных уравнений. От системы интегральных уравнений (32.10) можно перейти к системе алгебраических уравнений для определения постоянных $c_1, \ldots, c_k$:

$$c_i = \varphi_i(c_1, \ldots, c_k), \quad i = 1, \ldots, k. \tag{32.11}$$

Уравнения (32.11) получаются, если в формулы, определяющие величины c_i, подставить выражение (32.10). Уравнения (32.11) можно решать каким-либо приближенным способом. Например, можно воспользоваться каким-либо методом направленного поиска минимума функции

$$V = \sum_{i=1}^{k} (c_i - \varphi_i(c_1, \ldots, c_k))^2.$$

Если $c_1^{(n)}, \ldots, c_k^{(n)}$ — n-е приближение для решения системы (32.11), то функции

$$u_j^{(n)} = \operatorname{sign} \sum_{i=1}^{k} c_i^{(n)} b_{ij}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

можно рассматривать как n-е приближение к оптимальному программному управлению.

Исследуем далее тот случай, когда случайные функции $y_1(t), \ldots, y_m(t)$ не зависят от t и, следовательно, являются случайными величинами. Обозначим их $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Пусть $F_1, \ldots, F_m$ — функции распределения величин $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Предположим далее, что случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_m$ независимы, а начальные данные, определяющие решение системы уравнений (32.1), либо детерминированы, либо включены в число величин $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Совместная функция распределения величин $\xi_1, \ldots, \xi_m$

$$F(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = F_1(\lambda_1) \ldots F_m(\lambda_m).$$

С помощью этой функции можно построить функцию распределения $G(\lambda)$ случайной величины $x_1(T)$. Пусть

$$x_1(T) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \xi_i + \int_0^T \sum_{j=1}^{r} b_j u_j \, dt + a_1^{(0)}.$$

В пространстве m переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ возьмем область $S(\lambda)$, определяемую неравенством $x_1(T) \leqslant \lambda$. Тогда

$$G(\lambda) = \int\limits_{S(\lambda)} dF(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dF_1(\xi_1) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dF_2(\xi_2) \ldots \int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{\gamma_m}(\gamma_m \xi_m + \lambda - x_1(l))} dF_m(\xi_m). \quad (32.12)$$

Из (32.12) вытекает, что функция распределения $G(\lambda)$ может быть представлена также в виде

$$G(\lambda) = \overline{G}\left(\frac{1}{\gamma_m}\left(\lambda - a_1^{(0)} - \int\limits_0^T \sum_{j=1}^r b_j u_j \, dt\right)\right).$$

Поставим задачу отыскания программного управления $u^{(0)}$, которое доставляет функционалу

$$J(\mathrm{u}) = P\{|\mathrm{x}_1| \leqslant l\}$$

наибольшее возможное значение. Обозначим через α и β соответственно наименьшее и наибольшее значение величины

$$\frac{1}{\gamma_m}\left(a_1^{(0)} + \int\limits_0^T \sum_{j=1}^r u_j b_j \, dt\right);$$

через α^* обозначим точку промежутка $[\alpha, \beta]$, в которой функция

$$\overline{G}\left(\frac{l}{\gamma_m} - a\right) - \overline{G}\left(-\frac{l}{\gamma_m} - a\right)$$

имеет наибольшее возможное значение как функция $a \in [\alpha, \beta]$. Тогда, если α^* совпадает с одним из чисел α и β, то оптимальное управление дается формулой

$$u_j^{(0)} = -\operatorname{sign}\left[(a_1^{(0)} - \alpha^*) b_j\right], \quad j = 1, \ldots, r. \quad (32.13)$$

Если же $\alpha < \alpha^* < \beta$, то оптимальное программное управление может использоваться лишь на части траектории движения.

Пусть управление $u_j^{(0)}$ определяется формулой (32.13) в точках управления. В моменты, когда движение автономно, $u_j^{(0)} = 0$. Тогда участки, на которых происходит управление, определяются равенством

$$a_1^{(0)} + \int\limits_0^T \sum_{j=1}^r b_j u_j^{(0)} \, dt = \alpha^*.$$

Таким образом, и в этом случае при произвольных законах распределения случайных величин, входящих в систему (32.1), задача построения оптимального управления решается полностью.

Для величин $x_1(T), \ldots, x_n(T)$ можно найти совместную функцию распределения $G(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ через функции $F_1, \ldots, F_m$. С помощью этой функции можно построить функционал

$$J(\mathbf{u}) = P\{|x_1| \leqslant l_1, \ldots, |x_k(T)| \leqslant l_k\}.$$

Этот функционал есть вероятность попадания стохастического решения системы (32.1) при $t=T$ в область $|x_j| \leqslant l_j$, $j=1, \ldots, k$, $x_j \in (-\infty, +\infty)$, $j=1, \ldots, n$. Для такого функционала можно, как и ранее, предложить метод последовательных приближений к оптимальному программному управлению.

§ 33. Программная настройка коэффициентов усиления

Законы управления часто формируются как линейные комбинации некоторых выражений. Коэффициенты этих линейных комбинаций называют *коэффициентами усиления* системы управления. После того как структура закона управления выбрана, основная задача при проектировании системы управления сводится к отысканию таких коэффициентов усиления, при которых качество системы управления будет наивысшим возможным или же будет удовлетворять заданным требованиям.

Во многих случаях коэффициенты усиления во все время движения сохраняют свое постоянное значение. Поставим вопрос, как найти закон программного изменения этих коэффициентов во времени, такой, при котором повышается качество системы управления. Дадим способ решения одной из таких задач.

Пусть движение управляемого объекта описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t, \mathbf{u})\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) + C(t)\,\mathbf{Y}(t), \tag{33.1}$$

где

$$A(t, \mathbf{u}) = A(t) + \sum_{i=1}^{r} B_i(t)\,u_i(t). \tag{33.2}$$

Будем считать, что матрицы $A(t)$, $B_i(t)$ $(i=1, \ldots, r)$, $C(t)$ и вектор $\mathbf{f}(t)$ обладают теми же свойствами, что и в предыдущем параграфе. Пусть по-прежнему управления $u_1(t), \ldots, u_r(t)$ являются кусочно-непрерывными функциями, заданными на $[0, T]$, и удовлетворяют ограничению

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{r} u_i^2(t)\,dt \leqslant K. \tag{33.3}$$

Компоненты вектора $\mathbf{Y}(t)=(y_1(t), \ldots, y_m(t))$ будем по-прежнему считать вероятностными процессами. Положим

$$a_s=E(x_s); \quad \bar{d}_s=E(x_s-a_s)^2, \quad s=1, \ldots, n.$$

Здесь $x_1, \ldots, x_n$ есть стохастическое решение системы (33.1), заданное при $t\in[0, T]$ и удовлетворяющее начальным данным

$$x_s|_{t=0}=x_s^0,$$

где x_s^0, $s=1, \ldots, n$,— случайные величины.

Математическое ожидание a_s, дисперсия $\bar{d}_s$, фазовые координаты x_s являются функциями времени и зависят от выбора управлений $u_1, \ldots, u_r$. Обозначим через $Z(t, \mathbf{u})$ матрицу фундаментальной системы решений для однородной системы уравнений

$$d\mathbf{x}/dt = A(t, \mathbf{u})\mathbf{x}; \tag{33.4}$$

тогда

$$\mathbf{a}=Z(t, \mathbf{u})\mathbf{a}_0+\int_0^t Z(t, \mathbf{u})Z^{-1}(\tau, \mathbf{u})[\mathbf{f}(\tau)+C(\tau)E(\mathbf{Y}(\tau))]\,d\tau, \tag{33.5}$$

где

$$\mathbf{a}=(a_1, \ldots, a_n); \quad \mathbf{a}^0=(a_1^0, \ldots, a_n^0); \quad a_s^0=E(x_s^0); \quad s=1, \ldots, n.$$

Пользуясь (33.5), найдем

$$\bar{d}_s=E(x_s-a_s)^2=$$
$$=E\left(\sum_{i=1}^n z_{si}(t, \mathbf{u})(x_s^0-a_s^0)+\int_0^t \sum_{i=1}^n z_{si}(t, \tau, \mathbf{u})\sum_{j=1}^m c_{ij}(y_j-E(y_j))\,d\tau\right)^2.$$

Здесь

$$\{z_{si}(t, \tau, \mathbf{u})\}=\{Z(t, \mathbf{u})Z^{-1}(\tau, \mathbf{u})\}_{si},$$

а c_{ij} есть элемент матрицы C, s, $i=1, \ldots, n$; $j=1, \ldots, m$.

Если считать, что случайные величины $x_1^0, \ldots, x_n^0$ попарно независимы между собой и с величинами $y_1, \ldots, y_m$, которые при каждом t также предполагаются взаимно независимыми, то

$$\bar{d}_s=\sum_{i=1}^n z_{si}^2(t, \mathbf{u})d_i^0+\int_0^t\int_0^t\sum_{j=1}^m l_{sj}(t, t_1, t_2)k_j(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2,$$

где

$$k_j(t_1, t_2)=E\{[y_j(t_1)-E(y_j(t_1))][y_j(t_2)-E(y_j(t_2))]\},$$

$$l_{sj}=\left(\sum_{i=1}^n z_{si}(\mathbf{u}, t_1, t)c_{ij}(t_1)\right)\left(\sum_{i=1}^n z_{si}(\mathbf{u}, t, t_2)c_{ij}(t_2)\right),$$

$$s=1, \ldots, n; \quad j=1, \ldots, m.$$

Рассмотрим в фазовом пространстве случайный вектор $\mathbf{x}(x_1(T), \ldots, x_n(T))$. Будем считать, что его компоненты распределены по нормальному закону с математическими ожиданиями a_s и дисперсиями $\bar{d}_s$. Пусть в фазовом пространстве задана некоторая область S. Положим

$$J(\mathbf{u}) = P\{\mathbf{x}(T) \in S\}.$$

Вероятность попадания вектора $\mathbf{x}(T)$ в область S будет функционалом, значения которого зависят от управлений $u_1, \ldots, u_r$. Назовем управления $u_1^0, \ldots, u_r^0$ оптимальными, если они доставляют функционалу $J(\mathbf{u})$ наибольшее возможное значение при условии (33.3).

Рассмотрим важный случай, когда область S определяется неравенствами

$$-L \leqslant x_1 \leqslant L. \tag{33.6}$$

В случае (33.6)

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{d}_1}} \int_{-L}^{L} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\bar{d}_1}\right) dx. \tag{33.7}$$

Предположим, что оптимальное управление по отношению к функционалу (33.7) существует. Естественно предположить, что для этого оптимального управления имеет место равенство

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{r} u_i^2(t)\, dt = k \tag{33.8}$$

и что для любых управлений $u_1, \ldots, u_r$, удовлетворяющих ограничению

$$k - \delta \leqslant \int_0^T \sum_{i=1}^{r} u_i^2(t)\, dt \leqslant k,$$

будет

$$J(\mathbf{u})_0 \geqslant J(\mathbf{u}),$$

где δ — некоторая положительная постоянная. Тогда, каковы бы ни были допустимые управления $v_1, \ldots, v_r$, являющиеся кусочно-непрерывными функциями, заданными на $[0, T]$ и удовлетворяющими ограничению

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{r} v_i u_i^0\, dt \neq 0,$$

обязательно при достаточно малом ε будет выполняться

неравенство

$$J(\mathbf{u}_0) \geqslant J(\mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{v}), \tag{33.9}$$

причем

$$\operatorname{sign} \varepsilon = -\operatorname{sign} \int_0^T \sum_{i=1}^r v_i u_i^0 \, d\tau.$$

Следовательно, при

$$\int_0^T \sum_{i=1}^r v_i u_i^0 \, dt < 0 \tag{33.10}$$

будет иметь место неравенство (33.9) при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает, что функция, стоящая в правой части (33.9), при $\varepsilon = 0$ не возрастает, но тогда должно быть

$$dJ/d\varepsilon \leqslant 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0. \tag{33.11}$$

Если левая часть (33.10) положительна, то при достаточно малом $|\varepsilon|$, $\varepsilon < 0$, имеет место (33.9), следовательно, правая часть (33.9) при убывании ε также не возрастает. Отсюда

$$dJ/d\varepsilon \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0, \tag{33.12}$$

причем (33.12) имеет место в том случае, когда левая часть (33.10) положительна. Положим, что

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \int_0^T \sum_{i=1}^r \varphi_i v_i \, dt, \tag{33.13}$$

где φ_i — некоторые функции, зависящие от $u_1^0, \ldots, u_r^0$ и от вида системы (33.1). Соотношение (33.11) имеет место всякий раз, когда выполнено условие (33.10). Предположим, например, что при этом $u_1^0 \not\equiv 0$, управления $v_i = 0$, $i = 2, \ldots, r$, а $v_1 = \alpha u_1^0 + w$, где

$$\alpha = \frac{\int_0^T v_1 u_1^0 \, dt}{\int_0^T (u_1^0)^2 \, dt}.$$

Функция w будет ортогональной к u_1^0, следовательно, при любом выборе величины β неравенство (33.10) будет выполнено при $v_1 = \alpha u_1^0 + \beta w$.

Из (33.11) вытекает, что при таких β должно быть также выполнено условие

$$\int_0^T \sum_{i=1}^r \varphi_i v_i\,dt = \int_0^T \varphi_1 v_1\,dt = \beta\int_0^T \varphi_1 w\,dt + \alpha\int_0^T u_1^0\varphi_1\,dt \leqslant 0.$$

Последнее равенство возможно лишь при

$$\int_0^T \varphi_1 w\,dt = 0.$$

Это показывает, что функция φ_1 ортогональна к любой функции, ортогональной к u_1^0. Отсюда $\varphi_1 = \alpha_1 u_1^0$ почти везде. Аналогично рассуждая, устанавливаем, что

$$\varphi_i = \alpha_i u_i^0, \qquad i = 2, \ldots, r,$$

где α_i, $i = 2, \ldots, r$,— некоторые постоянные. Эти уравнения можно записать также в виде

$$u_i^0 = \beta_i\varphi_i, \qquad i = 1, \ldots, r, \tag{33.14}$$

где

$$\beta_i = \frac{\int_0^T u_i^0\varphi_i\,dt}{\int_0^T \varphi_i^2\,dt}, \qquad i = 1, \ldots, r. \tag{33.15}$$

Уравнения (33.14), (33.15) представляют собой следствия (33.10) и (33.11) и являются необходимыми условиями оптимальности управлений $u_1^0, \ldots, u_r^0$. Если для вывода необходимых условий оптимальности использовать (33.12), то вновь получаем те же соотношения (33.14), (33.15). Если $u_1 \equiv 0$, то $\varphi_1 \equiv 0$ и, следовательно, соотношения (33.14), (33.15) будут по-прежнему выполняться. Условие $\varphi_1 \equiv 0$ получается при этом из основной леммы вариационного исчисления.

Дадим способ приближенного построения оптимальных управлений, основанный на использовании соотношений (33.14), (33.15). Положим

$$u_i^{l+1} = \alpha(u^l)\,\beta_i(u^l)\,\varphi_i(u^l), \quad i = 1, \ldots, r, \tag{33.16}$$

где $u^l = (u_1^l, \ldots, u_r^l)$ есть l-е последовательное приближение. Величина $\alpha(u^l)$ выбирается так, чтобы было

$$\int_0^T \sum_{i=1}^r (u_i^{l+1})^2\,dt = k;$$

следовательно,

$$\alpha = \sqrt{k\left[\frac{\left(\int_0^T u_i^0 \varphi_i\, dt\right)^2}{\int_0^t \varphi_i^2\, dt}\right]^{-1}}.$$

Возьмем в качестве первого приближения некоторое управление $u_1^1, \ldots, u_r^1$. Тогда с помощью (33.16) можно построить последовательность управлений $u^1, u^2, \ldots, u^l$. Эту последовательность предлагается рассматривать в качестве последовательности, аппроксимирующей оптимальное управление. Перейдем к фактическому построению функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$, которые входят в уравнения (33.14), (33.15). Имеем

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \frac{\partial J}{\partial a_1} \cdot \frac{da_1}{d\varepsilon} + \frac{\partial J}{\partial d_1} \cdot \frac{dd_1}{d\varepsilon}.$$

Следовательно, для отыскания функции $dJ/d\varepsilon$ необходимо найти величины $da_1/d\varepsilon$ и $dd_1/d\varepsilon$, которые получаем непосредственным вычислением

$$\frac{da_1(T)}{d\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} a_i^0 \frac{d}{d\varepsilon} z_{1i}(T) + \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d\varepsilon} z_{1i}(T, \tau) \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(\tau)\, E(y_j(\tau))\, d\tau. \quad (33.17)$$

Здесь функции $z_{1i}(T)$, $z_{1i}(T, \tau)$ зависят от управлений $u_1, \ldots, u_r$, где $u_i = u_i^0 + \varepsilon v_i$ и производные вычисляются при $\varepsilon = 0$. Аналогично

$$\frac{d\bar{d}_1(T)}{d\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} z_{1i}(T, \mathrm{u})\, \bar{d}_i^0 + \int_0^T\!\!\int_0^T \sum_{j=1}^{m} \frac{d}{d\varepsilon}(l_{1j}(T, t_1, t_2))\, k_j(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2. \quad (33.18)$$

Матрица $Z(t, \mathrm{u})$ удовлетворяет системе

$$dZ/dt = A(t, \mathrm{u})\, Z$$

и начальному условию $Z = E$ при $t = 0$.

Положим

$$\left.\frac{dZ}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \xi;$$

тогда матрица ξ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = A(t, u^0)\, \xi + \sum_{l=1}^{r} B_l v_l Z_0,$$

где через Z_0 обозначено Z при $\varepsilon = 0$.

Матрица ξ удовлетворяет начальному условию $\xi=0$ при $t=0$, следовательно,

$$\xi(T)=\int_0^T Z_0(T)Z_0^{-1}(t)\sum_{l=1}^{r}B_l v_l Z_0(t)\,dt. \qquad (33.19)$$

Легко видеть, что

$$\frac{dz_{1l}(T)}{d\varepsilon}=\xi_{1l}(T).$$

Таким образом, вид внеинтегральных членов в выражениях (33.17) и (33.18) найден. Чтобы определить вид подынтегральных членов, надо найти элементы матрицы

$$\frac{d}{d\varepsilon}Z(T,\tau)=\frac{dZ(T)}{d\varepsilon}Z^{-1}(\tau)+Z(T)\frac{d}{d\varepsilon}Z^{-1}(\tau).$$

При $\varepsilon=0$ имеем

$$\frac{dZ(T,\tau)}{d\varepsilon}=\xi(T)Z_0^{-1}(\tau)-\xi(\tau)Z_0^{-1}(\tau)=$$
$$=\xi(T)Z_0^{-1}(\tau)-Z_0(T)Z_0^{-1}(\tau)\xi(\tau)Z_0^{-1}(\tau)=$$
$$=Z_0(T)(Z_0^{-1}(T)\xi(\tau)-Z_0^{-1}(\tau)\xi(\tau))Z_0^{-1}(\tau),$$

ибо

$$\frac{dZ^{-1}(\tau)}{d\varepsilon}=-Z_0^{-1}(\tau)\xi(\tau)Z_0^{-1}(\tau).$$

Таким образом,

$$\frac{dZ(T,\tau)}{d\varepsilon}=Z_0(T)(Z_0^{-1}(T)\xi(T)-Z_0^{-1}(\tau)\xi(\tau))Z_0^{-1}(\tau). \qquad (33.20)$$

Из (33.19) и (33.20) вытекает, что выражение (33.13) для $dJ/d\varepsilon$ имеет место, причем функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ выражаются единственным образом через элементы матриц Z, Z^{-1} и ξ, а также через вероятностные характеристики начальных условий задачи и через корреляционные функции вероятностных процессов $y_1, \ldots, y_m$.

§ 34. К построению программного управления в случае нелинейной стохастической системы уравнений

Пусть задан некоторый объект, процесс управления которым описывается системой дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt=f_s(x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_r;\ y_1, \ldots, y_m),\quad s=1, \ldots, n, \qquad (34.1)$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — фазовые координаты; $u_1, \ldots, u_r$ — управления; $y_1, \ldots, y_m$ — вероятностные процессы. Будем считать, что движение объекта рассматривается на промежутке $[0, T]$. Пусть $x_1(t), \ldots$

$\ldots, x_n(t)$ есть стохастическое решение системы (34.1) при управлении $u_1=u_1(t), \ldots, u_r=u_r(t)$ с начальным условием $x_s=x_s^0$ при $t=0$, $s=1, \ldots, n$. Обозначим через $J(\mathbf{u})$ некоторый функционал, определенный на движениях системы (34.1). Например, этим функционалом может быть вероятность попадания случайного вектора $\mathbf{x}(T)$ в заданную область фазового пространства.

Предположим, что управления $u_1, \ldots, u_r$ подчинены некоторым ограничениям. Через $u_1^0, \ldots, u_r^0$ будем обозначать управление, удовлетворяющее этим ограничениям и доставляющее функционалу наибольшее возможное значение среди всех допустимых управлений. Будем называть такое управление оптимальным и поставим вопрос об отыскании оптимального управления. Дадим описание одного из возможных алгоритмов приближенного решения этой задачи.

Рассмотрим последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ таких, что

$$E(\xi_i\xi_j)=0 \quad \text{при} \quad i\neq j,$$
$$E(\xi_i^2)=1, \quad E(\xi_i)=0, \quad i=2, 3, \ldots$$

Таким образом, последовательность случайных величин является ортонормированной. Будем считать, что она является полной. Тогда

$$y_j \sim l_j(t)+\sum_{i=1}^{\infty} l_{ji}(t)\,\xi_i, \quad j=1, \ldots, m. \tag{34.2}$$

Ряды, стоящие в правой части (34.2), сходятся в среднем к значению вероятностного процесса y_j, а именно:

$$E\left(y_j-l_j-\sum_{i=1}^{k} l_{ji}(t)\,\xi_i\right)^2 \to 0 \quad \text{при} \quad k\to+\infty.$$

Подставим ряды (34.2) в систему (34.1), предварительно отбросив все члены, начиная с ξ_{k+1}. Тогда система (34.1) примет вид

$$dx_s/dt=g_s(t;\ x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_r;\ \xi_1, \ldots, \xi_k). \tag{34.3}$$

Построим при фиксированном управлении $u_1, \ldots, u_r$ решение системы (34.3). С этой целью поступим следующим образом. Зададим последовательности реализаций случайных величин $\xi_1^j, \xi_2^j, \ldots, \xi_k^j$, $j=1, \ldots, l$. Построим решения $\mathbf{x}^j$, $j=1, \ldots, l$, системы (34.3), соответствующие этим реализациям и следующим начальным условиям:

$$\mathbf{x}^0=\mathbf{x}^j \quad \text{при} \quad t=0, \quad j=1, \ldots, l.$$

Здесь считается, что начальные условия детерминированы. Построим интерполяционный полином

$$x = \pi(t, \xi_1, \ldots, \xi_k) \tag{34.4}$$

так, чтобы было

$$\pi(t, \xi_1^j, \ldots, \xi_k^j) = x^j,$$

т. е. чтобы он давал решение системы (34.3) при любой реализации $\xi_1^j, \ldots, \xi_k^j$, $j = 1, \ldots, l$. Будем рассматривать теперь вектор (34.4) как решение системы (34.3) при любых возможных реализациях величин $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Разумеется, что (34.4) будет давать лишь приближенное значение для решений системы (34.3) при тех реализациях, которые отличны от выбранных.

Построим функционал $J(u)$, исходя из (34.4). Тогда значения этого функционала будут, вообще говоря, отличаться достаточно мало от истинных значений, принимаемых на движениях системы (34.1). Будем искать оптимальное управление для этого функционала. Найденное таким образом управление, вообще говоря, мало отличается от искомого, если числа k и l достаточно велики. Положим, например,

$$J(u) = \int_0^T E(x(t) - z(t))^2\, dt, \tag{34.5}$$

где $z(t)$ — заданная детерминированная вектор-функция. Тогда, подставляя (34.4) в (34.5), придем к минимизации функционала

$$\bar{J}(u) = \int_0^T f_0(t, x^1(t), \ldots, x^l(t))\, dt,$$

где $x^j(t)$ — детерминированные решения системы (34.3), соответствующие своим реализациям.

Таким образом, построение оптимального управления сводится к решению задачи Лагранжа. Реализация этого алгоритма затруднена, в частности, тем, что в приведенном примере задача Лагранжа получается большого объема, именно, содержит nl переменных.

Глава VII

ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВЫХ АВТОМАТОВ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

§ 35. Предварительное рассмотрение общих свойств систем управления

Рассмотрим некоторый управляемый объект, фазовые координаты которого ($x_1, \ldots, x_n$) и координаты отклонения рулевых органов ($z_1, \ldots, z_m$) связаны между собой во все время движения некоторой системой уравнений

$$dx_s/dt = f_s(t_1, x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m), \quad s = 1, \ldots, n. \qquad (35.1)$$

Предположим далее, что задано некоторое программное движение

$$x_s = x_s^{(p)}(t), \quad z_j = z_j^{(p)}(t), \quad s = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m. \qquad (35.2)$$

Пусть перед системой управления ставится задача стабилизации этого программного движения. Решение такой задачи может быть осуществлено с помощью построения законов управления, т. е. с помощью построения функций

$$g_j(t, x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m), \quad j = 1, \ldots, m, \qquad (35.3)$$

таких, что система уравнений

$$dz_j/dt = g_j, \quad j = 1, \ldots, m, \qquad (35.4)$$

рассматриваемая совместно с системой (35.1), имеет решение (35.2), которое является стабилизированным программным движением.

Характерным для системы автоматического управления заданного объекта, описываемой системой (35.1), является то, что в ее регуляторе, представляемом системой (35.4), вырабатывается скорость изменения координат рулевых органов по заранее предписанным правилам. Эти правила состоят в выработке значений функций g_j на основе использования выходных сигналов измерителей. Здесь и в дальнейшем считается, что на борту объекта, а также, возможно, и вне его имеется система измерителей, вырабатывающая сигналы, характеризующие фазовое состояние объекта и положение его рулевых органов. Если рассматриваемый объект является серийным, то закон управления (35.3) рассчитывается, вообще говоря, для какого-либо стандартного образца

этой серии и поэтому будет обладать несколько другим качеством по сравнению с расчетным при применении его к любому объекту данной серии. Может оказаться также, что закон (35.3) рассчитан для некоторых нормальных условий протекания процесса управления и потому не будет обладать требуемым качеством при нарушении этих нормальных условий.

Наконец, само программное движение может зависеть, например, от цели управления, иначе говоря, программное движение, около которого стабилизируется объект, может быть заменено другим в ходе процесса.

Итак, закон управления (35.3) не учитывает изменения характеристик объекта, изменений внешних условий протекания процесса управления и не обладает способностью перехода на стабилизацию другого программного движения, надобность в стабилизации которого может возникнуть в ходе процесса управления. Разумеется, что частично эти обстоятельства могут быть учтены в законе управления (35.3), но характерная особенность его при этом не изменяется. Он по-прежнему остается набором правил, служащих для вычисления на основе сигналов-измерителей некоторых других сигналов, которые являются входными сигналами рулевых машин. Если упомянутый выше объект управляется человеком или коллективом людей, то в результате накопленного опыта все обстоятельства, возникающие в ходе процесса, могут быть учтены. Человек, управляющий объектом, имеет способность различать, какая именно из возможных ситуаций имеет место в действительности. Эта способность к опознаванию вырабатывается на основе практического опыта посредством обучения. Таким образом, человек, управляющий объектом, вообще говоря, способен и к дальнейшему совершенствованию способности опознавать. Опознавание ситуаций нужно не само по себе, а для того, чтобы должным образом настроить различные устройства, осуществляющие процесс стабилизации. При этом настройка этих устройств, вообще говоря, производится не произвольно, а по заданным или сложившимся в результате опыта правилам. Итак, система управления (с участием человека) обладает следующими свойствами: 1) ей присуща способность к опознаванию; 2) способность к обучению; 3) способность к настройке различных устройств, принимающих непосредственное участие в ходе процесса управления.

Задача построения таких систем управления, которые обладали бы перечисленными выше способностями, является одной из важнейших в современной технике. Иначе говоря, возникает задача проектирования таких управляющих машин, которые обладают некоторыми особенностями, присущими живым организмам, т. е. стоит задача конструирования бионических управляющих машин. В настоящей главе предлагается один из возможных

подходов к конструированию управляющих машин такого рода на основе применения цифровых автоматов. План построения бионических управляющих автоматов состоит в следующем: сначала следует изучить общие подходы к решению проблемы опознавания, проблемы обучения и проблемы настройки. Затем нужно сформулировать конкретные алгоритмы решения этих проблем с тем, чтобы на их основе дать алгоритмическое описание систем управления, включающих в себя такие автоматы. Перейдем к реализации этой программы. Изучим сначала общие подходы к решению проблемы опознавания.

Пусть задано некоторое пространство R, природа элементов которого безразлична, и в R заданы множества $M_1, \ldots, M_n$ и некоторое множество M. Обозначим через $\overline{M}_i$ дополнение множества M_i, через $\tilde{M}_i$—множество, которое совпадает либо с M_i, либо с $\overline{M}_i$. Каждое вхождение множества $\tilde{M}_i$ в нижеследующие формулы принимается конкретно. Обозначим через x_i характеристическую функцию множества M_i: $x_i = x_i(P)$, $P \in R$,

$$x_i = \begin{cases} 1, & P \in M_i, \\ 0, & P \in \overline{M}_i. \end{cases}$$

Через $\bar{x}_i$ обозначим характеристическую функцию $\overline{M}_i$, через $\tilde{x}_i$—характеристическую функцию $\tilde{M}_i$. Каждое вхождение $\tilde{x}_i$ понимается конкретно. Предположим, что множество таково, что

$$M = \cup (\tilde{M}_{i_1} \cap \tilde{M}_{i_2} \cap \ldots \cap \tilde{M}_{i_{k_j}}). \qquad (35.5)$$

В правой части (35.5) объединение берется по некоторым группам индексов $(i_1, \ldots, i_{k_j})$, каждый из которых не превышает n.

Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \vee \tilde{x}_{i_1} \ldots \tilde{x}_{i_{k_j}}. \qquad (35.6)$$

В формуле (35.6) дизъюнкция распространяется на те же самые группы индексов, что и в формуле (35.5). Напомним, что

$$x_i \vee x_j = \max(x_i, x_j).$$

Поставим вопрос, принадлежит ли заданный элемент P пространства R множеству M? Ответ на этот вопрос дается с помощью функции (35.6). Оказывается, что $P \in M$ тогда и только тогда, когда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 1.$$

Действительно, если $P \in M$, то, как следует из (35.5), P принадлежит по крайней мере одному множеству, входящему в состав

объединения (35.5). Но тогда элемент P будет содержаться в каждом из множеств, пересечение которых образует упомянутое выше множество. Следовательно, характеристические функции этих множеств на элементе P равны единице. Тогда соответствующее слагаемое в дизъюнкции (35.6) будет обращаться в единицу, а значит, $f=1$. И наоборот, если $f=1$ на элементе P, то, как вытекает из (35.6), обязательно будет обращаться в единицу по крайней мере одно слагаемое, входящее в состав f, но это слагаемое есть произведение характеристических функций множеств, образующих пересечение, входящее в объединение (35.5). Следовательно, элемент P входит в упомянутое пересечение и поэтому $P \in M$. Это показывает, что функция (35.6) является характеристической функцией множества M. Итак, проблема опознавания $P \in M$ или $P \overline{\in} M$ однозначно разрешима, если существует «вычислительный алгоритм», позволяющий найти значение характеристической функции f множества M. Ввиду этого множества $M_1, \ldots, M_n$ выбираются так, чтобы их характеристические функции можно было сравнительно легко вычислить.

Пример 35.1. Пусть задано m-мерное евклидово пространство точек $(y_1, \ldots, y_m)$. Пусть в этом пространстве определены множества M_i точек, подчиненных неравенствам

$$q_i(y_1, \ldots, y_m) \leqslant 0, \quad i=1, \ldots, n.$$

Тогда

$$x_i = \frac{1-\operatorname{sign} q_i}{2},$$

где

$$\operatorname{sign} q_i = -1 \quad \text{при} \quad q_i < 0,$$
$$\operatorname{sign} q_i = +1 \quad \text{при} \quad q_i \geqslant 0,$$
$$\bar{x}_i = \frac{1+\operatorname{sign} q_i}{2}.$$

Точка $(y_1, \ldots, y_m)$ тогда и только тогда является точкой множества M, когда функция $f(y_1, \ldots, y_m)$ принимает значение 1, где

$$f(y_1, \ldots, y_m) = V\left(\frac{1 \sim \operatorname{sign} q_{i1}(y_1, \ldots, y_m)}{2}\right) \ldots \left(\frac{1 \sim \operatorname{sign} q_{ik_j}}{2}\right).$$

Знак $\sim$ в этой формуле заменяется знаком минус, если в соответствующем месте формулы (35.5) стоит M_i, и заменяется знаком плюс, если стоит $\bar{M}_i$.

Предположим теперь, что в пространстве R задано k множеств $N_1, \ldots, N_k$, попарно не пересекающихся. Пусть элемент $P \in R$ принадлежит $\bigcup\limits_{i=1}^{k} N_i$. Требуется установить, какому именно из N_i, $i=1, \ldots, k$, принадлежит P. Предположим, что можно построить множества $M_1, \ldots, M_n$, образующие покрытие объединения множеств $N_1, \ldots, N_k$. Иначе говоря, если $P \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} N_i$, то

необходимо существует по крайней мере одно натуральное число $i \leqslant n$ такое, что $P \in M_i$. Предположим далее, что система множеств $M_1, \ldots, M_n$ такова, что из нее путем применения двух операций пересечения и объединения можно построить множества $N_i^{(0)}$, $i = 1, \ldots, k$, попарно не пересекающиеся и такие, что $N_i^{(0)} \supset N_i$. Таким образом, каждое из множеств $N_i^{(0)}$ представляется через множества $M_1, \ldots, M_n$ формулой вида (35.5). Введем в рассмотрение функции $f_1, \ldots, f_k$, являющиеся характеристическими для множеств $N_1^{(0)}, \ldots, N_k^{(0)}$. Функция f_l имеет тот же вид, что и функция f, определяемая формулой (35.6). Представим число k в двоичной системе. Пусть получившееся двоичное число имеет l разрядов. Введем в рассмотрение функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$, определив их через $f_1, \ldots, f_k$ следующим образом:

$$\varphi_1 = \bigvee f_i. \tag{35.7}$$

Дизъюнкция в формуле (35.7) распространяется на те номера i, двоичный код которых оканчивается единицей. Положим

$$\varphi_j = \bigvee f_i, \quad j = r, \ldots, l. \tag{35.8}$$

Дизъюнкция в формуле (35.8) распространяется на те номера i, двоичный код которых в j-м разряде, считая справа, имеет 1. Функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$, определенные (35.7) и (35.8), полностью позволяют решить проблему опознавания в данном случае; именно, если элемент $P \in \bigcup_{i=1}^{k} N_i$, то элемент тогда и только тогда принадлежит N_j, когда $\varphi_l, \varphi_{l-1}, \ldots, \varphi_1$ представляет собой l-разрядный двоичный код числа j. Действительно, если $P \in N_j$, то

$$f_j = 1 \quad \text{и} \quad f_i = 0, \quad i \neq j.$$

Разложим число j в двоичный код, занумеруем разряды справа налево числами $1, 2, \ldots, l$. Если в i-м разряде стоит 1, то только в этом случае функция f_j входит в формулу для функции φ_i, отсюда вытекает, что последовательность $\varphi_l, \ldots, \varphi_1$ будет совпадать с двоичным кодом числа j; следовательно, и $\varphi_l, \ldots, \varphi_1$ будет двоичным представлением числа j в l-разрядном коде. Обратно, пусть элемент P таков, что вычисленная на нем последовательность $\varphi_l, \ldots, \varphi_1$ образует двоичный код некоторого числа j. Тогда, так как в φ_i входит лишь одно слагаемое, отличное от нуля, то двоичный код этого слагаемого будет содержать на i-м месте единицу тогда и только тогда, когда $\varphi_i = 1$. Следовательно, номер слагаемого, входящего в φ_i, $i = 1, \ldots, l$, обращающегося в единицу, имеет двоичный код, совпадающий

с двоичным кодом числа j, следовательно, $P \in N_j$. Итак, общий алгоритм опознавания может быть описан следующим образом. Исходя из некоторых известных множеств, образующих покрытие объединения заданных множеств, строится непересекающееся множество, охватывающее заданные, затем вычисляются характеристические функции построенных множеств $f_1, \ldots, f_k$, на основе их строятся функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$, которые и дают ответ на вопрос, какому из множеств N_l принадлежит P, если $P \in \bigcup_{l=1}^{k} N_l$.

Пример 35.2. Пусть R — множество всех вершин m-мерного единичного куба, следовательно, R есть множество точек $(y_1, \ldots, y_m)$; y_i принимает два значения 0 или 1. Пусть в R задано k множеств $N_1, \ldots, N_k$, попарно не пересекающихся между собой. Требуется построить алгоритм опознавания. Именно, если $P \in R$ и $P \in \bigcup_{l=1}^{k} N_l$, то требуется установить, какому конкретно множеству принадлежит элемент P. Этот алгоритм будем строить указанным выше способом, именно, будем строить множества $N_l^{(0)}$, попарно непересекающиеся и включающие множества N_l. Построение покрывающих множеств можно осуществить различными способами. Изложим некоторые из них.

1. Возьмем в качестве множеств M_i, $i = 1, \ldots, n$, совокупность сфер размерности m таких, что с их помощью можно построить множества $N_l^{(0)}$, $l = 1, \ldots, k$, применяя операции пересечения и объединения такие, что $N_l \in N_l^{(0)}$. Тогда вопрос о принадлежности точки P множеству N_l при условии $P \in \bigcup_{l=1}^{k} N_l$ разрешается однозначно с помощью функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$. Эти функции строятся, как и выше, с помощью характеристических функций множеств $M_1, \ldots, M_n$. Отсюда вытекает, что для вычисления $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ в каждой точке P необходимо иметь в памяти вычислительного устройства $n(m+1)$ чисел, которые дают центры сфер $M_1, \ldots, M_n$ и их радиусы. Заметим, что центры и радиусы сфер M_l можно выбирать различными способами на основе каких-либо геометрических или статистических соображений. Очевидно, также, что $M_1, \ldots, M_n$ всегда можно выбрать так, чтобы $N_l^{(0)}$ было точным покрытием N_l.

2. В качестве множеств $M_1, \ldots, M_n$ можно взять совокупность полупространств

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j + a_i \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

С помощью объединения и пересечения этих полупространств можно получить множества $N_l^{(0)}$, $l = 1, \ldots, k$, попарно непересекающиеся и такие, что $N_l \subset N_l^{(0)}$. Тогда проблема опознавания решается с помощью функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$, которые строятся тем же способом, что и ранее, с помощью характеристических функций этих полупространств. Для вычисления функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ необходимо в память вычислительного устройства ввести $n(m+1)$ чисел, так как плоскость, ограничивающая полупространство определяется $m+1$ числами. Разумеется, эти полупространства можно выбрать так, что множества $N_l^{(0)}$ будут точным покрытием N_l, т. е. не будут содержать других вершин m-мерного куба, не входящих в множество N_l. Существенная часть задачи опознавания в рассматриваемом примере состоит в построении таких покрытий, для которых число n будет наименьшим.

Перейдем теперь к рассмотрению проблемы обучения. Пусть задано вновь пространство R, природа элементов которого безразлична.

Рассмотрим систему множеств $N_1, \ldots, N_k$ попарно не пересекающихся между собой, $N_i \subset R$. Рассмотрим далее систему множеств $M_i^{(0)} \subset N_i$, $i=1, \ldots; k$. Пусть известно, что $P \in \bigcup N_i$. Требуется определить, какому из множеств N_j принадлежит P, исходя из возможности непосредственного сравнения элемента P с элементами множеств $M_i^{(0)}$, $i=1, \ldots, k$. При этом предполагается, что указаны некоторые правила сравнения элементов между собой. Множества $M_i^{(0)}$ можно рассматривать как результат накопленного опыта. Итак, поставленная задача состоит в том, чтобы на основе накопленного ранее опыта дать ответ, какому из множеств N_i принадлежит элемент P. При этом существенное значение имеют правила, по которым происходит сравнение элемента P с элементами, составляющими накопленный ранее опыт. Эти правила можно формулировать разными способами. Примем, в частности, следующий подход к их построению. В множестве R выберем систему множеств M_i, $i=1, \ldots, n$, таких, что: а) множества M_i покрывают множество $\bigcup\limits_{i=1}^{k} N_i$; б) с помощью объединения и пересечения множеств, входящих в систему $M_1, \ldots, M_n$, можно построить множества $N_i^{(0)}$ такие, что $N_i^{(0)}$ попарно не пересекаются и $N_i^{(0)}$ содержат $M_i^{(0)}$, $i=1, \ldots, k$.

Пусть χ_i есть характеристическая функция множества M_i. Тогда можно построить характеристические функции $f_1, \ldots; f_k$ множеств $N_1^{(0)}, \ldots, N_k^{(0)}$. С помощью этих функций можно построить функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ и сформулировать следующее правило: $P \in N_j$ тогда и только тогда, когда последовательность φ_l, $\varphi_{l-1}, \ldots, \varphi_1$ дает представление числа j в двоичной системе счисления. Разумеется, что в этом случае точка P принадлежит фактически $N_j^{(0)}$, и поэтому утверждение «$P \in N_j$» фактически может оказаться несправедливым. Однако принятое правило оставляет в стороне эту возможность. Процесс построения функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ называется процессом обучения. Будем говорить, что какая-либо система обучена, если такие функции построены.

Приведенное построение представляет собой одноступенчатое обучение. Рассмотрим некоторое усложнение алгоритма. Множества $N_i^{(0)}$ включают в себя $M_i^{(0)}$, поэтому могут существовать такие точки P, для которых

$$\varphi_i = 0, \quad i=1, \ldots, l, \quad P \in \bigcup N_i.$$

Если появляется для некоторой точки P нулевой сигнал

$$\varphi_i = 0, \quad i=1, \ldots, l,$$

то отыскиваются новые множества из системы $M_1, \ldots, M_n$,

образующие множества $N_i^{(1)}$, $i=1, \ldots, k$, с помощью объединений и пересечений, $N_i^{(0)} \subset N_i^{(1)}$. Для множеств $N_i^{(1)}$ строим характеристические функции $\varphi_i^{(1)}$. Если окажется, что

$$\varphi_i^{(1)}=0, \quad i=1, \ldots, l,$$

то процесс продолжаем дальше. Если же последовательность $\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_l^{(1)}$, вычисленная для точки P, дает двоичный код числа j, то $P \in N_j$.

Рассмотрим несколько подробнее принятое выше усложнение алгоритма обучения. Если при каком-либо P оказывается $\varphi_i=0$, $i=1, \ldots, l$, то это означает, что точка P не попадает ни в одно из множеств $N_1^{(0)}$. Вместе с тем $P \in \bigcup_{i=1}^{k} N_i$, следовательно, некоторые подмножества множеств N_i не покрываются множествами $N_i^{(0)}$. Дальнейшее обучение сводится к расширению покрывающих множеств. Так как число множеств M_i, $i=1, \ldots, n$, конечно, то в результате применения операций пересечения и объединения из них можно образовать не более чем 2^{2n} различных множеств. Если среди этих множеств существуют множества N_i', $i=1, \ldots, k$, такие, что N_i' попарно не пересекаются, $N_i \subset N_i'$ и, кроме того, пространство R состоит из конечного числа точек, то для полного обучения потребуется конечное число операций, связанных с построением характеристических функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$. Если же множество R бесконечно, то найдется для любой последовательности $P_1, P_2, \ldots, P_s \in R$ число n_0 такое, что усовершенствование алгоритма обучения производится не более n_0 раз, иначе говоря, процесс обучения заканчивается на конечном шаге.

Если система обучена, то это еще не значит, что она дает каждый раз достоверный ответ, ибо из $M_i^{(0)} \subset N_i^{(0)}$ еще не следует, что $P \in N_i$, если $P \in N_i^{(0)}$. Если же множества M_i, $i=1, \ldots, n$, обладают некоторыми специальными свойствами, то может оказаться, что из $P \in N_i^{(s)}$ будет вытекать $P \in N_i$ и тем самым обученная система будет давать достоверный ответ. Этот случай имеет, например, место тогда, когда каждое из множеств, входящее в систему $M_1, \ldots, M_n$, может пересекаться не более чем с одним из множеств $N_1, \ldots, N_k$.

Перейдем теперь к рассмотрению вероятностного подхода. Предположим, что в R заданы вероятностная мера и события $M_1, \ldots, M_n, N_1, \ldots, N_k$ имеют определенную вероятность. Примем

$$\pi_i^{(s)}=\frac{P(N_i \cap N_i^{(s)})}{P(N_i)}; \qquad q_i^{(s)}=\frac{\left(N_i^{(s)} \bigcup_{j \neq i} N_j\right)}{P\left(\bigcup_{j \neq i} N_j\right)}.$$

Здесь через $P(N)$ обозначается вероятность события N. Если усложненный алгоритм обучения на s-м шаге дает ответ $P \in N_i$,

то величина $\pi_i^{(s)}$ называется вероятностью правильности этого ответа, величина $q_i^{(s)}$ — вероятностью неправильности ответа. Усовершенствование обучения можно производить таким образом, чтобы $\pi_i^{(s)}$ возрастало, а $q_i^{(s)}$ убывало при возрастании s. Если события $M_1, \ldots, M_n$ таковы, что в результате применения к ним операций объединения и пересечения можно получить события $s_1, \ldots, s_k$, которые попарно независимы и с вероятностью 1 совпадают с $N_1, \ldots, N_k$, то на конечном шаге можно получить ответ, правильный с вероятностью 1 и неправильный с вероятностью 0 для любого $P \in \bigcup N_i$. Заметим, что в практических приложениях множества N_i, $i=1, \ldots, k$, не задаются; задаются лишь множества $M_i^{(0)}$, $i=1, \ldots, k$, и требуется пространство R разбить на попарно не пересекающиеся множества $N_i^{(s)}$ так, чтобы $M_i^{(0)} \subset N_i^{(s)}$. Это разбиение можно осуществлять с помощью некоторых стандартных множеств $M_1, \ldots, M_n$, покрывающих R путем применения операций объединения и пересечения.

Пример 35.3. Пусть R — совокупность вершин m-мерного единичного куба. Пусть заданы множества $M_i^{(0)}$, $i=1, \ldots, k$, попарно не пересекающиеся между собой. Произведем произвольное разбиение пространства R на k попарно не пересекающихся множеств $N_1, \ldots, N_k$; $\bigcup N_i = R$; $N_i^{(0)} \subset M_i$. Это разбиение можно осуществить, например, с помощью набора множеств $M_1, \ldots, M_n$ — вершин этого куба, располагающихся в полупространствах

$$\sum_{s=1}^{m} a_{is} y_s + b_i \leqslant 0, \quad i=1, \ldots, n.$$

Процесс разбиения пространства R на $N_1, \ldots, N_k$ и есть процесс обучения. Результатом обучения является построение функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ таких, что φ_i есть характеристическая функция множества N_i и $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ строятся с помощью характеристических функций множества M_l. Остановимся теперь на проблеме настройки.

Пусть заданы два пространства R и S, природа элементов которых безразлична. В пространстве R заданы k попарно не пересекающихся множеств $N_1, \ldots, N_k$ и задана функция $s(P, Q)$, $P \in R$, $Q \in S$, $s(P, Q) \in S$.

Функция s имеет постоянное значение при $P \in N_l$, $l=1, \ldots, k$ и определяет правило настройки: если система находилась в состоянии Q и на входе опознающей системы появился сигнал, то с помощью функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ устанавливается, какому из множеств $N_1, \ldots, N_k$ принадлежит P. Если $P \in N_l$, то система переходит в состояние $s(P, Q)$. При сигнале P и состоянии Q на рулевые машины попадает входной сигнал $\lambda(P, Q)$. Таким образом, процесс настройки состоит в изменении внутреннего состояния системы управления и в изменении входного сигнала, поступающего на рулевые машины.

Дадим теперь общее описание функционирования системы управления. Управляемый объект имеет некоторую совокупность

измерительных устройств и некоторую совокупность исполнительных устройств, называемых рулевыми машинами. На выходных полюсах измерительных устройств возникают некоторые сигналы. Они попадают на входные полюсы опознающей системы. Опознающая система устанавливает характер сигнала, в результате чего включается система настройки и подается сигнал настройки на устройство памяти и далее управляющий сигнал на входные полюсы рулевых машин. Указанный процесс управления может быть осуществлен с помощью конечного автомата. В следующем параграфе дается описание таких автоматов.

§ 36. Управляющие автоматы и их структурная конструкция

В настоящей главе рассматривается по существу, некоторое усовершенствование математической модели управляемого движения. В качестве основного элемента системы управления при этом выбирается конечный автомат, в связи с чем возникает необходимость дать описание структурной конструкции таких автоматов. Это описание будет в особенности необходимо для построения полной структурной схемы упомянутой математической модели. Конечный автомат служит для переработки входной информации в некоторую выходную информацию. Как входная, так и выходная информации представляются в виде конечных последовательностей некоторых сигналов, являющихся элементами конечных множеств сигналов такого рода. Эти множества называются входным и выходным алфавитом автомата. Итак, пусть заданы три конечных множества **X**, **Y**, **C**, природа элементов которых безразлична. Зададим две функции: функцию переходов автомата $\delta(X, C)$ и функцию выходов $\lambda(X, C)$. Будем считать, что эти функции обладают следующими свойствами: 1) $\delta(X, C)$ и $\lambda(X, C)$ определены при $X \in \mathbf{X}$, $C \in \mathbf{C}$; 2) значения функции $\delta(X, C)$ лежат в множестве **C**, значения функции $\lambda(X, C) \in \mathbf{Y}$.

Определение 36.1. *Будем говорить, что задан конечный автомат* **A** *с множеством внутренних состояний* **C**, *с входным алфавитом* **X** *и выходным алфавитом* **Y**, *если:*

1) *заданы две функции $\delta(X, C)$ и $\lambda(X, C)$, обладающие указанными ранее свойствами;*

2) *для каждой конечной последовательности элементов $(X_1, \ldots, X_s)$ определена единственная последовательность $(Y_1, \ldots, Y_s)$ элементов множества* **Y** *с помощью формул*

$$Y_1 = \lambda(X_1, C_0), \quad Y_2 = \lambda(X_2, C_1), \quad \ldots, \quad Y_s = \lambda(X_s, C_{s-1}),$$
$$C_1 = \delta(X_1, C_0), \quad C_2 = \delta(X_2, C_1), \quad \ldots; \quad C_{s-1} = \delta(X_{s-1}, C_{s-2});$$

при этом состояние C_0 автомата **A** *называется начальным состоянием.*

Функции δ и λ естественно представить с помощью таблиц Λ и Δ с двумя входами. Строки этих таблиц обозначим точками множества $\mathbf{X}$, столбцы — точками множества $\mathbf{C}$. В пересечении строки X и столбца C в таблице Δ будет стоять состояние автомата $\delta(X, C)$. В пересечении строки X и столбца C в таблице Λ будет стоять выходной сигнал $\lambda(X, C) \in \mathbf{Y}$.

Физически изобразить работу автомата можно следующим образом. Автомат ставится в начальное состояние C_0, на вход его поступает сигнал X_1, автомат переходит в состояние $C_1 = \delta(X_1, C_0)$, а на выходе появляется выходной сигнал $Y_1 = \lambda(X_1, C_0)$, сигнал X_2 переводит автомат в состояние $C_2 = \delta(X_2, C_1)$, а на выходе появляется сигнал $Y_2 = \lambda(X_2, C_1)$ и т. д. Под выходом автомата **A** будем понимать либо первый аргумент функции $\delta(X, C)$, либо первый вход таблицы Δ. Под выходом автомата **A** будем понимать выход таблицы Λ или значение функции $\lambda(X, C)$.

Определение 36.2. *Будем говорить, что задан оператор разветвления входа автомата, если задана функция φ нескольких аргументов, причем значениями этих аргументов являются элементы* $\mathbf{X}$ *и любое значение φ — также элемент* $\mathbf{X}$. *Аналогично будем говорить, что задан оператор соединения выходов, если задана функция ψ нескольких аргументов со значениями аргументов из* $\mathbf{Y}$ *и значениями функции из* $\mathbf{Y}$.

Если задан конечный автомат **A** с входным алфавитом $\mathbf{X}$, выходным алфавитом $\mathbf{Y}$, множеством состояний $\mathbf{C}$ с помощью функций δ и λ и если задана функция k аргументов φ, являющаяся оператором разветвления входов, то функции $\delta_1 = \delta(\varphi, C)$, $\lambda_1 = \lambda(\varphi, C)$ будут функциями перехода и выхода для конечного автомата B с множеством внутренних состояний $\mathbf{C}$, выходным алфавитом $\mathbf{Y}$ и входным алфавитом $\mathbf{X}_k$, где $\mathbf{X}_k$ — декартово произведение k экземпляров множества $\mathbf{X}$, иначе говоря, $\mathbf{X}_k$ — множество всех слов в алфавите $\mathbf{X}$ длиной k.

Пусть задано теперь несколько автоматов $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p$

$$\mathbf{A}_l = \mathbf{A}_l(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{C}_l, \delta_l, \lambda_l, \mathbf{C}_l^{(0)}).$$

Последняя формула означает, что для этих автоматов задан единый входной алфавит $\mathbf{X}$ и единый выходной алфавит $\mathbf{Y}$. Множество состояний автомата $\mathbf{A}_l$ есть $\mathbf{C}_l$, функция переходов — δ_l, функция выходов — λ_l, начальное состояние — $\mathbf{C}_l^{(0)}$. Пусть задан оператор соединения выходов ψ как функция p аргументов со значениями в $\mathbf{Y}$. Тогда функция переходов $\delta = (\delta_1(X, C_1), \delta_2(X, C_2), \ldots, \delta_p(X, C_p))$, и функция $\lambda = \psi(\lambda_1(X, C_1), \ldots, \lambda_p(X, C_p))$ будут функцией переходов и функцией входов автомата B с входным алфавитом $\mathbf{X}$, множеством состояний $\mathbf{C}$ и выходным алфавитом $\mathbf{Y}$, где $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \times \ldots \times \mathbf{C}_p$ — декартовы произведения пространств. Начальным состоянием автомата **B** будет

$$\mathbf{C}^{(0)} = (\mathbf{C}_1^{(0)}, \ldots, \mathbf{C}_p^{(0)}).$$

Определение 36.3 *Конечный автомат* $\mathbf{A}$ *с входным алфавитом* $\mathbf{X}_n$, *множеством состояний* $\mathbf{C}=\mathbf{C}_1\times\ldots\times\mathbf{C}_p$ *и с выходным алфавитом* $\mathbf{Y}_n$ *называется композицией автоматов* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p$, *где* $\mathbf{A}_l=\mathbf{A}_l(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{C}_l, \delta_l, \lambda_l, \mathbf{C}_l^{(0)})$, *если:*

1) *задано p операторов разветвления входов от n аргументов и m операторов соединения выходов от p аргументов* $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, $\psi_1, \ldots, \psi_m$;

2) *функция переходов автомата* $\mathbf{A}$ *определяется формулой*

$$\delta(X, C)=(\delta_1(\varphi_1(X), C_1), \ldots, \delta_p(\varphi_p(X), C_p)),$$

функция выходов автомата $\lambda(X, C)$ *определяется формулой*

$$\lambda(X, C)=(\psi_1(\lambda_1(\varphi_1(X), C_1), \lambda_2(\varphi_2(X), C_2), \ldots$$
$$\ldots, \lambda_p(\varphi_p(X), C_p)), \ldots, \psi_m(\lambda_1(\varphi_1(X), C_1), \ldots, \lambda_p(\varphi_p(X), C_p))),$$

где $X=(X_1, \ldots, X_n)$ — *элемент* $\mathbf{X}_n$; $C=(C_1, \ldots, C_n)$ — *элемент* $\mathbf{C}$; $\mathbf{C}_p^{(0)}=(C_1^{(0)}, \ldots, C_p^{(0)})$ — *начальное состояние автомата* $\mathbf{A}$.

Порядок функционирования автомата $\mathbf{A}$ определяется естественным образом. Любой последовательности $\xi_1, \ldots, \xi_s$, поступающей на вход автомата $\mathbf{A}$, будет отвечать последовательность $\eta_1, \ldots, \eta_s$ на выходе, причем эта последовательность определяется формулами

$$\eta_1=\lambda(\xi_1, C_0),\ \gamma_1=\delta(\xi_1, \ldots, C_0),\ \eta_2=\lambda(\xi_2, \gamma_1), \ldots$$
$$\ldots, \gamma_{s-1}=\delta(\xi_{s-1}, \gamma_{s-2}),\ \eta_s=\gamma(\xi_s, \gamma_{s-1}).$$

Здесь $\xi_i\in\mathbf{X}_n$, $\eta_i\in\mathbf{Y}_m$, $\gamma_i\in\mathbf{C}$.

Дадим теперь некоторое физическое истолкование понятия композиции автоматов. Пусть задан некоторый набор физических объектов $p_1, \ldots, p_n$ и $q_1, q_2, \ldots, q_m$, называемых входными и выходными полюсами. Автоматы $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p$ подвергнем операции разветвления входов с помощью операторов $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$. Возникшие n входов автомата соединим некоторыми входными каналами с полюсами $p_1, \ldots, p_n$ в том порядке, как это предписывается упорядоченностью последовательности $X=(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbf{X}_n$, $i=1, \ldots, p$. Выходы автоматов $\mathbf{A}_i$ подвергнем операции соединения выходов с помощью операторов $\psi_1, \ldots, \psi_m$. Возникшие при этом m выходов автомата $\mathbf{A}_i$ соединим некоторыми выходными каналами с полюсами $q_1, \ldots, q_m$. Полученная при этом схема называется структурной схемой автомата $\mathbf{A}$, представленного композицией автоматов $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p$.

Все конечные автоматы разделяются на две группы. К первой относятся те автоматы, которые имеют единственное состояние. Это так называемые автоматы без памяти, или логические элементы. Ко второй группе относятся автоматы, содержащие более одного внутреннего состояния. Такие автоматы называют автоматами с памятью или запоминающими элементами. Оказывается,

что посредством композиции простейших логических элементов можно построить автомат, эквивалентный любому заданному автомату без памяти. Если же к этим простейшим логическим элементам добавить простейший запоминающий элемент, то с помощью композиции можно получить автомат, эквивалентный любому заданному автомату с памятью. Проиллюстрируем эти утверждения на примерах.

Пример 36.1. Пусть входной алфавит X состоит из двух чисел 0, 1; выходной алфавит Y — также из двух чисел 0, 1. Зададим два логических элемента A_1, A_2. Пусть функция выходов A_1 есть $\lambda_1(X)=X$ и A_2 есть $\lambda_2(X)=\overline{X}$, где черта означает отрицание, т. е. $\overline{X}=0$ при $X=1$ и $\overline{X}=1$ при $X=0$. Для любого логического элемента A с входным алфавитом X_n и выходным алфавитом X_m, заданного функциями выходов

$$Y_i=\lambda_i(x_1,\ \ldots,\ x_n),\qquad i=1,\ \ldots,\ m,$$

можно построить автомат A′, являющийся композицией нескольких экземпляров A_1, A_2. Он будет эквивалентен автомату A, т. е. будет описываться функциями выходов

$$Y_i=\lambda_i'(x_1,\ \ldots,\ x_n),\qquad i=1,\ \ldots,\ m,$$

причем $\lambda_i=\lambda_i'$ при любом $X\in X_n$.

Действительно, пусть $(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ — точка пространства X_n, где $\lambda_1=1$. Возьмем несколько экземпляров автоматов A_1 и A_2. Произведем у них разветвление выходов с помощью функций $\varphi_i(X)=x_i$. Тогда получим набор автоматов с выходными функциями или x_i и $\overline{x}_i$. Соединим выходы тех из них, которые могут быть записаны в виде последовательностей $x_1^{(\alpha_1)}$, $x_2^{(\alpha_2)}$, ..., $x_n^{(\alpha_n)}$ при помощи операции

$$\psi\left(x_1^{(\alpha_1)},\ \ldots,\ x_n^{(\alpha_n)}\right)=x_1^{(\alpha_1)},\ \ldots,\ x_n^{(\alpha_n)}.$$

Здесь $x_i^{(\alpha_i)}=x_i$ при $\alpha_i=1$ и $x_i^{(\alpha_i)}=\overline{x}_i$ при $\alpha_i=0$. Все полученные таким образом автоматы соединяем с помощью операции соединения выходов. В результате этого получится функция

$$\lambda_1'(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\vee x_1^{(\alpha_1)},\ \ldots,\ x_n^{(\alpha_n)}.$$

Дизъюнкция берется по всем наборам $(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$, для которых функция λ_1 обращается в единицу. Таким образом, функция λ_1 построена в результате применения операции разветвления входов к автоматам A_1, A_2 и суперпозиции двух операций соединения выходов. Легко видеть, что суперпозиция операторов соединения выходов снова дает оператор соединения выходов. Действуя тем же способом построим функции λ_2', ..., λ_m'. Покажем, что определяемый ими логический элемент A' эквивалентен A. Очевидно, что если $\lambda_1(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)=1$, то $\lambda_1'(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)=1$.

Докажем обратное: если $\lambda_1'(\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n)=1$, то $\lambda_1(\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n)=1$. Если $\lambda_1'=1$, то существует по крайней мере одно слагаемое вида $\beta_1^{(\alpha_1)}$, $\beta_2^{(\alpha_2)}$, ..., $\beta_n^{(\alpha_n)}$, обращающееся в 1. Ясно, что непременно должно быть $\beta_i=\alpha_i$. Следовательно, точка $(\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n)$ принадлежит множеству тех точек пространства X_n, где $\lambda_1=1$. Таким образом, $\lambda_1=\lambda_1'$.

§ 37. Алгоритмическое описание усовершенствованной модели движения

Алгоритмическое описание усовершенствованной модели движения сводится к описанию тех алгоритмов, которые реализуются в системе управления конечным автоматом. Остановимся сначала на алгоритмическом описании автомата непрерывной стабилизации. Пусть уравнение движения объекта имеет вид

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{X},\ \mathbf{Z},\ t). \tag{37.1}$$

Пусть также $\mathbf{X}_p$, $\mathbf{Z}_p$—программное движение. Положим

$$\mathbf{X}-\mathbf{X}_p=\mathbf{Y};\ \mathbf{Z}-\mathbf{Z}_p=\mathbf{U}. \tag{37.2}$$

Тогда (37.1) примет вид

$$d\mathbf{Y}/dt = A\mathbf{Y}+B\mathbf{U}+\mathbf{g}(t,\ \mathbf{Y},\ \mathbf{U}). \tag{37.3}$$

Пусть A и B—вещественные постоянные матрицы. Тогда можно указать такое неособое линейное преобразование над искомыми функциями в системе (37.3), что в преобразованной системе матрица коэффициентов при линейных членах будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix}, \tag{37.4}$$

где A_+—квадратная матрица порядка k, все собственные числа которой имеют неотрицательные вещественные части; A_-—квадратная матрица порядка $n-k$, все собственные числа которой имеют отрицательные вещественные части. Будем считать, что такое линейное преобразование уже произведено, и матрица коэффициентов членов, линейных относительно $y_1, \ldots, y_n$ имеет вид (37.4). Основным вопросом при решении задач стабилизации является вопрос о том, какой необходимый минимум величин следует измерять, чтобы с помощью их стабилизировать программное движение. Если мы имеем дело с движением какого-либо тела или системы тел, то задача стабилизации сводится к стабилизации движения центра масс относительно опорной траектории и стабилизации движения тела и системы тел относительно центра масс. Если задача стабилизации разрешима, то для решения ее достаточно, чтобы на выходных полюсах измерителей появлялись сигналы $g_1, \ldots, g_k$, являющиеся непрерывно дифференцируемыми функциями фазовых координат системы и такие, что якобиан

$$\frac{D(g_1, \ldots, g_k)}{D(y_1, \ldots, y_k)} \neq 0,$$

где $(y_1, \ldots, y_k)$—первые k компонент вектора $\mathbf{Y}$ в системе (37.4).

Таким образом, первой исходной частью алгоритма является получение величин $g_1, \ldots, g_k$ в том или ином виде. Пусть в фазовом пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$ задано некоторое множество $M(t)$. Пусть величины $h_1, \ldots, h_m$ характеризуют взаимное расположение управляемого объекта и множество $M(t)$. На основе сигналов $h_1, \ldots, h_m$ могут вырабатываться по некоторым правилам те программные движения, которые нужно в действительности стабилизировать в ходе процесса управления. Таким образом, второй составной исходной частью алгоритма является выработка величин $h_1, \ldots, h_m$. Правила выработки по этим величинам программных движений в различных задачах могут иметь различный вид. Здесь будем считать, что они заданы и составляют третью исходную часть алгоритма.

Примем, что закон стабилизатора, используемый в непрерывном регуляторе прямого или непрямого действия, аналитически представим линейной комбинацией

$$U = \sum_{i=1}^{k} c_i g_i,$$

где $c_1, \ldots, c_k$ — коэффициенты усиления. Коэффициенты усиления зависят, вообще говоря, от элементов матриц A и B и программного движения. Будем считать, что эта зависимость в достаточной степени изучена и является известной. Зависимость коэффициентов усиления от упомянутых выше факторов может быть установлена с помощью некоторых характеристик, получаемых на основе использования $g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_m$. Возможное множество значений этих характеристик обозначим через R. Разобьем R на множества N_i, $i = 1, \ldots; k_1$ попарно не пересекающиеся между собой. Обозначим через C множество состояний конечного автомата. Каждое состояние будем представлять в виде (C, P), где C — символ коэффициентов стабилизации; P — символ программного движения.

Пара (g, h) образует входные сигналы автомата. Зададим функцию его переходов

$$C_1 = \delta_1(g, h, C, P);$$
$$P_1 = \delta_2(g, h, C, P).$$

При этом считается, что каждый выходной сигнал (g, h) представляется множеством N_i с тем или иным номером i и, наоборот, каждое множество представляется каким-либо сигналом (g, h), содержащимся в нем. Функция выходов $\lambda = \lambda(g, h, C, P)$ представляет собой выходной сигнал, поступающий на входные полюсы рулевых машин. Разбиение пространства $R = \bigcup_{i=1}^{k_1} N_i$ производится с помощью некоторого алгоритма обучения. Из описанного

выше алгоритма управления вытекает, что роль конечного автомата в системе непрерывной стабилизации сводится к настройке коэффициентов усиления в ходе регулирования и к управлению программным движением объекта. Если величины $g_1, \ldots, g_k$, $h_1, \ldots, h_m$ появляются на выходных полюсах измерителей с некоторым шагом дискретности и с некоторым запаздыванием, то с помощью арифметического устройства можно сформировать дискретный закон управления. Если присоединить подобное арифметическое устройство к рассмотренному выше автомату, то получится автомат дискретной стабилизации, который настраивает коэффициенты усиления, управляет программным движением и вычисляет с некоторым шагом дискретности управляющий сигнал, поступающий на входные полюсы рулевых машин. Другим возможным классом управляющих автоматов являются автоматы релейной стабилизации.

Предположим, что управляющий сигнал U может принимать лишь $U = \pm 1$. Это обстоятельство имеет место в тех системах, в которых для стабилизации используется, например, момент, возникающий от управляющего электродвигателя. Можно поставить задачу о выборе моментов переключения и таким образом, чтобы стабилизировать программное движение оптимальным по быстродействию способом, т. е. так, чтобы движение $Y(t)$ переходило при $t = 0$ из точки Y_0 в точку $Y = 0$ за кратчайшее время. Все пространство $y_1, \ldots, y_n$, или, вернее, некоторая окрестность точки $Y = 0$, разбивается на два множества S_- и S_+. При $Y \in S_-$ $U = -1$, при $Y \in S_+$ $U = +1$. Построение таких множеств в общем случае затруднительно, поэтому можно поступить так. Следует взять некоторые множества $S_-^{(0)}$ и $S_+^{(0)}$, о которых заведомо известно, что $S_-^{(0)} \subset S_-$, $S_+^{(0)} \subset S_+$. Множество строим по $S_-^{(0)}$ и $S_+^{(0)}$ с помощью некоторого алгоритма обучения. В результате этого возникает поверхность переключения S. Эта поверхность может зависеть от элементов матриц A, B и от программного движения. В автомате непрерывной стабилизации состояние C следует заменить на S, где S символизирует поверхность переключения. Тогда возникает конечный автомат релейной стабилизации, который решает задачу управления программным движением и задачу настройки поверхности переключения.

Математический аппарат, служащий для описания усовершенствованной модели движения, основывается, таким образом, на дифференциальных уравнениях и теории конечных автоматов, описывающих алгоритмы управления. Для решения вопросов анализа и синтеза таких систем управления целесообразно в связи с этим применять цифровые и аналоговые вычислительные устройства с использованием выходных сигналов реальной аппаратуры, которая может, вообще говоря, подключаться в единый контур с аналоговыми и цифровыми вычислительными устройствами.

§ 38. Исследование поведения объекта, управляемого автоматом релейной стабилизации

Предположим, что управляемый объект описывается системой (37.1) и что $\mathbf{X}_p$, $\mathbf{Z}_p$ есть его программное движение. Предположим также, что в системе (37.3) матрицы A и B вещественны и постоянны, причем A—квадратная $n\times n$, B—прямоугольная с n строками и r столбцами. Векторы $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_r$, образующие столбцы матрицы B, линейно независимы. Пусть управления $u_1, \ldots, u_r$ могут принимать лишь два значения: $+1$, -1. Изучим поведение интегральных кривых систем уравнений, образующих линейное приближение для системы (37.3):

$$\dot{\mathbf{Y}} = A\mathbf{Y} + B\mathbf{U}. \tag{38.1}$$

Предположим, что система (38.1) такова, что при управлении

$$\mathbf{U} = C\mathbf{Y} \tag{38.2}$$

нулевое решение $\mathbf{Y}=0$ будет асимптотически устойчивым, где C—матрица порядка $r\times n$, выбранная надлежащим образом.

Необходимые и достаточные условия существования такой матрицы C установлены в гл. IV.

Введем в рассмотрение квадратичную форму V, являющуюся решением уравнения

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_s}(A\mathbf{Y}+BC\mathbf{Y})^s = -\sum_{s=1}^{n} y_s^2, \tag{38.3}$$

где $(A\mathbf{Y}+BC\mathbf{Y})^s$—$s$-я компонента вектора, стоящего в скобках.

Введем в рассмотрение линейные функции

$$\sigma_i = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_s} B_{si}, \quad i=1, \ldots, r. \tag{38.4}$$

Определим с помощью функций (38.4) релейные управления, для чего положим

$$u_i = \varphi(\sigma_i), \quad i=1, \ldots, r, \tag{38.5}$$

где φ—функция одного аргумента с петлей гистерезиса:

$$\varphi = \begin{cases} +1 & \text{при} \quad \sigma < l, \\ -1 & \text{при} \quad \sigma > -l. \end{cases} \tag{38.6}$$

Величина l является достаточно малой положительной постоянной.

При управлении (38.5) движение в системе (38.1) определяется следующим образом: если начальная точка $\mathbf{Y}^{(0)}$ находится в области однозначности правых частей, то решение определяется обычным образом, если же она находится в области многозначности, то указывается, какое именно значение правых частей

имеется в виду. При переходе через плоскости $\sigma_i = \pm l$ смена значений правых частей происходит естественным образом. Следовательно, в области многозначности через каждую точку проходит столько интегральных кривых, сколько значений правая часть имеет в этой точке. Это описательное определение решений системы (38.1) при управлении (38.5) позволяет единственным образом строить интегральные кривые при $t \geqslant 0$.

Теорема 38.1. *Если все собственные числа* $(A+BC)$ *имеют отрицательные действительные части, то при достаточно малом* l *любая интегральная кривая система* (38.1) *с управлением* (38.5) *стремится к стабильному колебанию при возрастании времени. Это стабильное колебание расположено в сколь угодно малой окрестности точки* $Y=0$, *если* $t>0$ *достаточно мало.*

Доказательство этой теоремы содержится в гл. IV. Там же указывается, какие именно интегральные кривые стремятся к стабильному колебанию. Напомним, что в общем случае таким свойством обладают лишь интегральные кривые, начинающиеся в некоторой фиксированной окрестности точки $Y=0$.

Предположим, что матрицы A и B изменяются, точнее говоря, будем считать, что их элементы являются функциями некоторой совокупности параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Пусть эти параметры могут принимать значения из области S n-мерного пространства. Область S можно всегда разбить на попарно не пересекающиеся множества $S_1, \ldots, S_k$ таким образом, что будут выполнены следующие условия: 1) $\bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i = S$; 2) существуют матрицы $C_1, \ldots, C_k$ такие, что матрицы $A+BC_i$ имеют собственные числа лишь с отрицательными вещественными частями при $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in S_i$, $i=1, \ldots, k$.

Линейные формы $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, отвечающие матрице C_i, обозначим через $\sigma_1^{(i)}, \ldots, \sigma_r^{(i)}$. Управления (38.5) обозначим соответственно через $u_1^{(i)}, \ldots, u_r^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots, k$. Из приведенной выше теоремы вытекает, что система (38.1) при управлении

$$u_j^i = \varphi(\sigma_j^i), \quad j=1, \ldots, r, \tag{38.7}$$

будет иметь стабильные колебания, во всяком случае для всех тех $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, которые попадают в множества S_i. Так как наличие стабильного колебания означает стабилизацию программного движения, то управление (38.7) будет стабилизировать программное движение в исходной системе.

Предположим теперь, что параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ могут меняться в ходе движения или что их численные значения неизвестны. Тогда неизвестно, какое именно из k управлений (38.7) будет стабилизировать программное движение. Для того чтобы решить задачу выбора стабилизирующего управления, поступим следующим образом. Пусть на выходах измерительных устройств возни-

кают сигналы $g_1(y_1, \ldots, y_n, t), \ldots, g_p(y_1, \ldots, y_n, t)$. Положим в системе (38.1)

$$u_l = u_l^i, \quad l = 1, \ldots, r. \tag{38.8}$$

Если параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ находятся во множестве S_j, то выходные сигналы измерителей, снятые в моменты $t_1, \ldots, t_q$, заполняют некоторое множество M_j pq-мерного пространства.

Пусть

$$M = \bigcup_{j=1}^{k} M_j.$$

Построим систему опознавания и проведем ее обучение каким-либо указанным ранее образом. В результате этого построения возникнет l функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$. Эти функции будут зависеть от $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ таким образом, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in S_i$, когда последовательность $\varphi_l, \varphi_{l-m}, \ldots, \varphi_1$ представляет собой двоичный код числа i. Функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ позволяют выбирать из управлений (38.7) именно то, которое будет стабилизировать программное движение. Тем самым построенная логическая схема будет осуществлять настройку автомата стабилизации, если представить себе, что входными сигналами этого автомата являются величины $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$, выходными сигналами — величины (38.5), а внутренними состояниями — коэффициенты линейных форм $\sigma_j^{(i)}$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, r$, $i = 1, \ldots, k$ (считаем, что эти коэффициенты вычисляются лишь для конкретных точек множеств $S_1, \ldots, S_k$).

Таким образом, эти коэффициенты представляются числами. Начальным состоянием автомата является состояние, описываемое коэффициентами форм σ_j^i, $j = 1, \ldots, r$. Если установить естественную нумерацию внутренних состояний числами $1, 2, \ldots, k$, то из начального состояния автомат переходит в состояние i, если на его вход поступил сигнал $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ такой, что $\varphi_l, \varphi_{l-1}, \ldots, \varphi_1$ является двоичным кодом числа i. Переход из этого состояния в начальное осуществляется лишь в том случае, когда нарушаются некоторые условия стабилизации программного движения. Величины $g_1, \ldots, g_p$, являющиеся выходными сигналами измерительных устройств, можно получать также с помощью специально предназначенных для этого цифровых автоматов. Эти цифровые автоматы можно объединить с рассмотренным выше автоматом стабилизации с помощью операции композиции, в результате чего возникает самонастраивающийся автомат релейной стабилизации. Среди цифровых автоматов, служащих для получения величин $g_1, \ldots, g_p$, наиболее простыми являются навигационные цифровые автоматы. В следующем параграфе дается краткое описание алгоритмов, которые лежат в основе их конструкций.

Глава VIII

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

39. Ориентация заданного направления

Предположим, что задано твердое тело T_0, имеющее неподвижную точку O, расположенную в его центре инерции. Предположим, что с телом T_0 связаны оси $Oxyz$, которые являются главными центральными осями этого тела. Обозначим через $O\xi\eta\zeta$ абсолютную систему координат, которую будем считать, как и систему $Oxyz$, правой декартовой. Пусть далее заданы два орта $\bar{s}_0$ и $\bar{r}_0$, причем орт $\bar{s}_0$ занимает неизменное положение в системе $O\xi\eta\zeta$, а орт $\bar{r}_0$ занимает неизменное положение в системе $Oxyz$. Задача ориентации твердого тела T_0 в заданном направлении $\bar{s}_0$ состоит в отыскании такого управляющего момента $\bar{M}$, который будучи приложенным к телу T_0, стабилизирует орт $\bar{r}_0$ в направлении $\bar{s}_0$. Уравнение вращательного движения твердого тела под действием момента $\bar{M}$ будет иметь вид

$$\Theta\dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega}\times\Theta\bar{\omega} = \bar{M}, \qquad (39.1)$$

или, в скалярной форме,

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C-B)qr &= M_x, \\ B\dot{q} + (A-C)pr &= M_y, \\ C\dot{r} + (B-A)pq &= M_z, \end{aligned} \qquad (39.2)$$

где $\bar{\omega}$ — угловая скорость твердого тела T_0; p, q, r — проекции этой угловой скорости на оси системы $Oxyz$; A, B, C — главные центральные моменты инерции тела T_0; $\bar{M}$ — главный момент сил, действующих на это тело; M_x, M_y, M_z — его проекции на оси связанной системы, Θ — тензор инерции.

Обозначим через s_i, r_i ($i=1, 2, 3$) проекции векторов $\bar{s}_0$, $\bar{r}_0$ на оси системы $Oxyz$. Тогда вектор $\bar{s}_0$ вращается по отношению к системе $Oxyz$ с угловой скоростью $-\bar{\omega}$.

Следовательно,

$$\dot{\bar{s}}_0 = -\bar{\omega}\times\bar{s}_0, \qquad (39.3)$$

откуда

$$\dot{s}_1 = s_2 r - s_3 q,$$
$$\dot{s}_2 = s_3 p - s_1 r, \qquad (39.4)$$
$$\dot{s}_3 = s_1 q - s_2 p.$$

Система (39.4) имеет первый интеграл

$$\sum_{i=1}^{3} s_i^2 = \text{const}.$$

Так как рассматривается только проблема ориентации тела в заданном направлении, то интерес представляет частный интеграл

$$\sum_{i=1}^{3} s_i^2 = 1. \qquad (39.5)$$

Рассмотрим движение твердого тела под действием момента

$$\overline{M} = \bar{\mu}(\bar{\omega}, \bar{r}_0, \bar{s}_0) + \bar{s}_0 \times \operatorname{grad} U(\bar{s}_0, \bar{r}_0), \qquad (39.6)$$

где $\bar{\mu}$ — некоторый момент; U — некоторая силовая функция, от которой берется градиент по компонентам вектора $\bar{s}_0$.

Умножив обе части системы (39.1) скалярно на вектор $\bar{\omega}$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = p\mu_x + q\mu_y + r\mu_z + \bar{\omega}(\bar{s}_0 \times \overline{\operatorname{grad}} U). \qquad (39.7)$$

Здесь μ_x, μ_y, μ_z — проекции момента $\bar{\mu}$ на оси $Oxyz$. Вычислим величину $\bar{\omega}(\bar{s}_0 \times \operatorname{grad} U) = \operatorname{grad} U(\bar{\omega} \times \bar{s}_0) = -\operatorname{grad} U \cdot \dot{\bar{s}}_0 = -\dot{U}$. Положим

$$V = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + U.$$

Тогда из соотношения (39.7) имеем

$$\dot{V} = W, \qquad (39.8)$$

где $W = p\mu_x + q\mu_y + r\mu_z$.

Таким образом, при управляющем моменте (39.6) любое вращательное движение T_0 подчиняется условию (39.8).

Положим теперь для определенности в формуле (39.6) $\bar{\mu} = -\bar{\omega}$ и

$$V = \frac{1}{2}(\bar{s}_0 - \bar{r}_0)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(s_i - r_i)^2; \qquad (39.9)$$

системы (39.2) и (39.4) в этом случае примут вид

$$\begin{aligned} &A\dot{p}+(C-B)\,qr=-p+r_2s_3-r_3s_2,\\ &B\dot{q}+(A-C)\,pr=-q+r_3s_1-r_1s_3,\\ &C\dot{r}+(B-A)\,pq=-r+r_1s_2-r_2s_1,\\ &\dot{s}_1=s_2r-s_3q,\quad \dot{s}_2=s_3p-s_1r,\quad \dot{s}_3=s_1q-s_2p. \end{aligned} \qquad (39.10)$$

Система (39.10) имеет два положения равновесия: 1) $\bar{\omega}=0$, $\bar{s}_0=\bar{r}_0$ и $\bar{\omega}=0$, $\bar{s}_0=-\bar{r}_0$. Действительно, указанные векторы удовлетворяют системе (39.10).

Покажем, что других постоянных решений система (39.10) не имеет. Из равенства (39.8) для таких решений $dV/dt=0$, откуда, следовательно, $W=0$. Для рассматриваемого случая $W=-\bar{\omega}^2$, следовательно, обязательно должно быть $\bar{\omega}=0$. Тогда из первой группы уравнений (39.10) вытекает $\bar{r}_0\times\bar{s}_0=0$, следовательно, либо $\bar{s}_0=\bar{r}_0$, либо $\bar{s}_0=-\bar{r}_0$.

Покажем теперь, что положение равновесия $\bar{\omega}=0$, $\bar{s}_0=\bar{r}_0$ устойчиво, и притом асимптотически, а положение равновесия $\bar{\omega}=0$, $\bar{s}_0=-\bar{r}_0$ неустойчиво в смысле Ляпунова. Действительно, функция V является положительно определенной относительно компонент векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{s}_0$ в окрестности точки $\bar{\omega}=0$, $\bar{s}_0=\bar{r}_0$. Полная производная этой функции неположительна $dV/dt=-\bar{\omega}^2$. Отсюда вытекает, что положение равновесия $\bar{\omega}=0$, $\bar{s}_0=\bar{r}_0$ обязательно устойчиво по Ляпунову.

Для доказательства асимптотической устойчивости этого положения равновесия установим сначала общее свойство движения твердого тела T_0 под действием момента (39.6), (39.9). А именно, любое движение твердого тела T_0, описываемое системой (39.10), является либо положением равновесия, либо асимптотически приближается к состоянию покоя. Короче говоря, утверждается: либо во все время движения $\bar{\omega}\equiv 0$, либо $\bar{\omega}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$. Покажем это. Пусть, напротив, для некоторого движения $\bar{\omega}^2\geqslant\alpha>0$ при $t\geqslant 0$, где α—некоторая константа. Тогда из уравнения (39.8) находим $dV/dt\leqslant-\alpha$, следовательно, $V\leqslant V_0-\alpha\cdot t$, где V_0—значение функции V при $t=0$. Из последнего неравенства вытекает: $V\xrightarrow[t\to+\infty]{}-\infty$, что невозможно, так как функция V является положительной.

Из полученного противоречия очевидно, что обязательно существует последовательность моментов времени $t_1, \ldots, t_k\to+\infty$ такая, что $\bar{\omega}(t_k)\to 0$ при $k\to+\infty$. Если $\bar{\omega}(t)$ не стремится к 0

при $t\to+\infty$, то обязательно существуют две величины α и β, $0<\alpha<\beta$, такие, что можно указать две последовательности τ_k, Θ_k, удовлетворяющие условию $\overline{\omega}^2(\tau_k)=\beta$, $\overline{\omega}^2(\Theta_k)=\alpha$, $k=1$, 2, ..., $\alpha<\overline{\omega}^2(t)<\beta$ при $t\in(\tau_k,\ \Theta_k)$. При этом $\tau_k\to+\infty$, $\Theta_k\to+\infty$ при $k\to+\infty$.

Так как векторные функции $\overline{\omega}$ и $\dot{\overline{\omega}}$ ограничены при $t\geqslant 0$, то $\frac{d}{dt}(\overline{\omega}^2)$ также ограничено, и поэтому величина $\Theta_k-\tau_k$ ограничена снизу положительной постоянной τ при любом $k=1, 2, \ldots$

Из уравнения (39.8) имеем $V=V_0-\int\limits_0^t\omega^2\,dt\leqslant V_0-n\tau\alpha$, где n — наибольшее значение k, удовлетворяющее неравенству $\Theta_k\leqslant t$. Ясно, что $n\to+\infty$ при $t\to+\infty$. Из этого вытекает, что $V\to-\infty$ при $t\to+\infty$, что невозможно. Отсюда следует, что имеет место лишь последняя возможность поведения функции $\overline{\omega}^2$, а именно $\overline{\omega}^2\to 0$ при $t\to+\infty$.

Покажем теперь, что на любом движении также будет $\overline{r}_0\times\overline{s}_0\to 0$ при $t\to+\infty$. Умножим обе части первой группы уравнений (39.10) на этот вектор скалярно. После некоторых преобразований получим

$$\frac{d}{dt}[(\overline{r}_0\times\overline{s}_0)\cdot\Theta\overline{\omega}]=[(\overline{r}_0\times\overline{s}_0)\cdot(\overline{\omega}-\overline{\omega}\times\Theta\overline{\omega})]+[\overline{r}_0\times\dot{\overline{s}}_0)\,\Theta\overline{\omega}]+(\overline{r}_0\times\overline{s}_0)^2.$$

Предположим, что оказалось $(\overline{r}_0\times\overline{s}_0)^2>\alpha>0$ при $t\geqslant 0$. Тогда существует такое число $T>0$, что будет $\frac{d}{dt}[(\overline{r}_0\times\overline{s}_0)\cdot\Theta\overline{\omega}]>\frac{\alpha}{2}$ при $t>T$. Из этого неравенства вытекает тогда $[(\overline{r}_0\times\overline{s}_0)\cdot\Theta\overline{\omega}]\to$ $\to+\infty$ при $t\to+\infty$, что невозможно в силу доказанного свойства $\overline{\omega}\to 0$ при $t\to+\infty$.

Таким образом, обязательно будет существовать последовательность $t_1, \ldots, t_k$: $t_k\xrightarrow[k\to\infty]{}\infty$, такая, что $\overline{r}_0\times\overline{s}_0(t_k)\to 0$ при $k\to\infty$. Если при этом оказывается $\overline{s}_0(t_k)\to\overline{r}_0$, то в силу установленной выше устойчивости по Ляпунову должно быть $\overline{s}_0(t)\to\overline{r}_0$ при $t\to+\infty$. Если же $\overline{s}_0(t_k)\to-\overline{r}_0$, то также должно быть $\overline{s}_0(t)\to-\overline{r}_0$ при $t\to+\infty$, что следует из устанавливаемой ниже неустойчивости положения равновесия $\overline{\omega}=0$, $\overline{s}_0=-\overline{r}_0$.

Выберем последовательность векторов $\overline{\omega}_k$ и $\overline{s}_{0k}$ так, чтобы $\overline{\omega}_k\to 0$, $\overline{s}_{0k}\to\overline{r}_0$ при $k\to+\infty$, и так, чтобы $V_1<0$, где

$$V_1=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)-\frac{1}{2}(\overline{r}_0+\overline{s}_0)^2.$$

Легко видеть, что функция V_1 удовлетворяет условию

$$dV_1/dt = W. \tag{39.11}$$

Построим интегральные кривые системы (39.10) при начальном условии $\bar{\omega}_k$, $\bar{s}_{0k}$. Из уравнения (39.11) $V_1 < V_0$ при $t \geqslant 0$. Кроме того, $\bar{\omega} \to 0$ при $t \to +\infty$. Отсюда во все время движения $(\bar{r}_0 + \bar{s}_0)^2 > \alpha > 0$. Тогда, по доказанному выше, должно быть $\bar{s}_0(t) \to \bar{r}_0$ при $t \to +\infty$. Следовательно, существуют интегральные кривые, начинающиеся в сколь угодно малой окрестности положения равновесия $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_0 = -\bar{r}_0$, которые покидают наперед заданную малую окрестность этой точки.

Отсюда вытекает факт неустойчивости положения равновесия.

Однако существуют интегральные кривые системы (39.10), отличные от положения равновесия, обладающие свойством

$$\bar{s}_0(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} -\bar{r}_0.$$

Действительно, рассмотрим систему (39.10) в отклонениях от положения равновесия

$$\bar{\omega} = 0, \qquad \bar{s}_0 = -\bar{r}_0.$$

$$\begin{aligned}
A\dot{p}' + (C-B)q'r' &= -p' - r_3 s_2' + r_2 s_3',\\
B\dot{q}' + (A-C)p'r' &= -q' + r_3 s_1' - r_1 s_3',\\
C\dot{r}' + (B-A)p'q' &= -r' - r_2 s_1' + r_1 s_2',\\
\dot{s}_1 &= -(s_3' - r_3)q' + (s_2' - r_2)r',\\
\dot{s}_2 &= (s_3' - r_3)p' - (s_1' - r_1)r',\\
\dot{s}_3 &= -(s_2' - r_2)p' + (s_1' - r_1)q'.
\end{aligned}$$

Характеристический многочлен линейного приближения для этой системы будет иметь вид

$$ABC\lambda^6 + (AC + BC + AB)\lambda^5 + \ldots$$

Очевидно, у этого многочлена существуют корни с отрицательными вещественными частями, следовательно, существуют интегральные кривые системы (39.10), отличные от положения равновесия $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_0 = -\bar{r}_0$, обладающие свойством

$$\bar{s}_0(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} -\bar{r}_0, \qquad \bar{\omega}(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0.$$

Теорема 39.1. *Управляющий момент $\bar{M}$ (39.6) можно выбрать так, чтобы тело T_0 было ориентировано в заданном направлении $\bar{s}_0$. При этом любое движение тела асимптотически*

приближается к состоянию покоя $\bar{\omega}=0$, $(\bar{s}_0\times\bar{r}_0)=0$. *Состояние покоя* $\bar{\omega}=0$, $\bar{s}_0=\bar{r}_0$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову, а состояние покоя* $\bar{\omega}=0$, $\bar{s}_0=-\bar{r}_0$ *неустойчиво по Ляпунову.*

Замечание 1. Выше было проведено исследование движений твердого тела под действием момента (39.6) при условии (39.9). Аналогично можно провести исследование в том случае, когда функция $(\bar{\omega}, \bar{\mu})$ W является отрицательно определенной функцией компонент вектора $\bar{\omega}$, а функция V является положительно определенной функцией величины $(\bar{s}_0-\bar{r}_0)^2$.

Замечание 2. В управляющий момент $\bar{M}$ входят проекции мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$. Для определения этих проекций, вообще говоря, необходимо иметь в составе приборов управления датчики угловой скорости. Поэтому такого рода управляющий момент оказывается невозможно создать, если указанных датчиков не имеется.

Предположим теперь, что известны лишь проекции вектора $\bar{s}_0$ в системе $Oxyz$. Требуется построить управляющий момент $\bar{M}$, стабилизирующий заданное направление $\bar{r}_0$ в теле по отношению к направлению $\bar{s}_0$, фиксированному в пространстве $O\xi\eta\zeta$. Проекции вектора $\bar{s}_0$ по-прежнему будут удовлетворять второй группе уравнений системы (39.10). Из этой системы можно установить следующие соотношения:

$$\bar{s}_0\times\dot{\bar{s}}_0=-[\bar{\omega}-\bar{s}_0(\bar{\omega}\cdot\bar{s}_0)]. \tag{39.12}$$

Рассмотрим управляющий момент

$$\bar{M}=-[\bar{\omega}-\bar{s}_0\cdot(\bar{\omega}\cdot\bar{s}_0)]+\bar{r}_0\times\bar{s}_0. \tag{39.13}$$

Уравнения движения твердого тела под действием момента (39.13) имеют вид

$$\begin{aligned}\Theta\dot{\bar{\omega}}+\bar{\omega}\times\Theta\bar{\omega}&=-[\bar{\omega}-\bar{s}_0\cdot(\bar{\omega}\cdot\bar{s}_0)]+\bar{r}_0\times\bar{s}_0,\\ \dot{\bar{s}}_0&=-\bar{\omega}\times\bar{s}_0.\end{aligned} \tag{39.14}$$

Умножая первое уравнение (39.14) скалярно на вектор $\bar{\omega}$, получим

$$dV/dt=-[\bar{\omega}^2-(\bar{\omega}\cdot\bar{s}_0)^2]. \tag{39.15}$$

Умножая первое уравнение (39.14) скалярно на вектор $\bar{s}_0$, находим

$$\bar{s}_0\cdot\Theta\bar{\omega}=k_0. \tag{39.16}$$

Покажем сначала, что любое движение системы уравнений (39.14)

обладает свойством

$$[\bar{\omega}^2-(\bar{\omega}\cdot\bar{s}_0)^2]\to 0, \quad \text{при } t\to+\infty,$$

откуда вытекает, что $\bar{\omega}-\bar{s}_0(\bar{\omega}\cdot\bar{s}_0)\to 0$ при $t\to+\infty$.

Из соотношения (39.15) ясно, что величина $\bar{\omega}^2-(\bar{\omega}\cdot\bar{s}_0)^2$ не может оставаться во все время движения больше некоторой положительной постоянной. В противном случае функция V на таком движении будет неограниченно убывать. В силу конечности угловой скорости и конечности вектора $\dot{\bar{\omega}}$ оказывается, что величина $\bar{\omega}^2-(\bar{\omega}\cdot\bar{s}_0)^2$ не может также становиться сколь угодно малой, не стремясь одновременно к нулю. Это обстоятельство устанавливается точно таким же образом, как и выше, в случае управляющего момента (39.6) при условии (39.9).

Таким образом, на любом движении системы (39.14)

$$\bar{\omega}^2-(\bar{\omega}\cdot\bar{s}_0)^2\to 0 \quad \text{при} \quad t\to+\infty.$$

Из этого следует, что $\bar{\omega}-\bar{s}_0(\bar{\omega}\cdot\bar{s}_0)\to 0$ при $t\to+\infty$. Отсюда $\bar{\omega}\times\bar{s}_0$ также $\to 0$ при $t\to+\infty$. Так как требуется стабилизировать орт $\bar{r}_0$ в направлении $\bar{s}_0$, то рассматриваемое движение должно обладать свойством $\bar{s}_0\to\bar{r}_0$ при $t\to+\infty$. Тогда $\bar{\omega}-\bar{r}_0(\bar{\omega}\cdot\bar{r}_0)$ также должно стремиться к нулю. Следовательно, из (39.16) находим $\bar{r}_0\cdot\Theta\bar{r}_0(\bar{\omega}_0\cdot\bar{r}_0)=k$, где k — некоторая постоянная.

Отсюда вытекает, что при $\bar{s}_0\to\bar{r}_0$ тело будет стремиться к равномерному вращению с угловой скоростью $\bar{\omega}=\lambda\bar{r}_0$, где λ — некоторая постоянная величина.

Подставляя полученные предельные значения в уравнение (39.14), находим, что должно быть

$$\bar{r}_0\times\Theta\bar{r}_0\lambda^2=0. \tag{39.17}$$

Соотношение (39.17) выполняется в случае, если $\lambda=0$, либо в случае, если $\bar{r}_0\times\Theta\bar{r}_0=0$. В первом случае тело приводится в состояние покоя $\bar{\omega}=0$. Второй случай может осуществляться тогда и только тогда для различных моментов A, B, C, когда вектор $\bar{r}_0$ направлен по одной из центральных осей тела.

Пусть для определенности $\bar{r}_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Найдем положения равновесия системы (39.14) $\bar{\omega}_*$, $\bar{s}_{0*}$. Из второго уравнения системы (39.14) вытекает, что в положении равновесия должно быть $\bar{\omega}_*\times\bar{s}_{0*}=0$; следовательно, $\bar{\omega}_*=\lambda\bar{s}_{0*}$. Тогда из первого уравнения

системы (39.14) имеем

$$\bar{s}_{0*}\times(\lambda^2\Theta\bar{s}_{0*}+\bar{r}_0)=0;$$

следовательно,

$$\lambda^2\Theta\bar{s}_{0*}+\bar{r}_0=\mu\bar{s}_{0*}$$

или

$$[\lambda^2\Theta\mu E]\,\bar{s}_{0*}=-\bar{r}_0, \tag{39.18}$$

где E — единичная матрица.

Из (39.18) и (39.16) следует, что система (39.14) может иметь три совокупности положений равновесия:

I.
$$\bar{\omega}_*=\lambda\bar{s}_{0*},\quad \bar{s}_{0*}=\bar{r}_0, \tag{39.19}$$

$$\bar{\omega}_*=\lambda\bar{s}_{0*},\quad \bar{s}_{0*}=-\bar{r}_0; \tag{39.20}$$

при этом

$$\mu=\pm 1+\lambda^2 A,$$

$$\lambda=\frac{k_0}{s_0\Theta s_0}=\frac{k_0}{A}. \tag{39.21}$$

II.
$$\bar{\omega}_*=\lambda\bar{s}_{0*},\quad \bar{s}_{0*}=\begin{pmatrix} s_1\\ s_2\\ 0\end{pmatrix}; \tag{39.22}$$

при этом

$$\mu=\lambda^2 B,\quad s_1=-\frac{1}{\lambda^2(A-B)},\quad s_2=\pm\sqrt{1-s_1^2},$$

$$\lambda\bar{s}_{0*}\cdot\Theta\bar{s}_{0*}=\lambda\left[\frac{1}{\lambda^4(A-B)}+B\right]=k_0, \tag{39.23}$$

$$\lambda^2>\frac{1}{|A-B|}. \tag{39.24}$$

III.
$$\bar{\omega}_*=\lambda\bar{s}_{0*},\quad \bar{s}_{0*}=\begin{pmatrix} s_1\\ 0\\ s_3\end{pmatrix}; \tag{39.25}$$

при этом

$$\mu=\lambda^2 C,\quad s_1=\frac{1}{\lambda^2(A-C)},\quad s_3=\pm\sqrt{1-s_1^2},$$

$$\lambda\bar{s}_{0*}\cdot\Theta\bar{s}_{0*}=\lambda\left[\frac{1}{\lambda^4(A-C)}+C\right]=k_0, \tag{39.26}$$

$$\lambda^2>\frac{1}{|A-C|}. \tag{39.27}$$

Для того чтобы система (39.14) могла иметь совокупности положений равновесия II или III, необходимо и достаточно, чтобы существовали вещественные решения уравнения (39.23) и (39.26), удовлетворяющие условиям (39.24) или (39.27) соответственно.

Перепишем уравнение (39.23) в виде

$$B\lambda^4 - k_0\lambda^3 + \frac{1}{A-B} = f(\lambda) = 0. \tag{39.28}$$

Так как из интеграла (39.16) следует, что $\lambda k_0 > 0$, то будем для определенности считать, что $\lambda > 0$, $k_0 > 0$. Рассмотрим функцию $f(\lambda)$. Для нее

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = \lambda^2 (4B\lambda - 3k_0).$$

При $\lambda > \frac{3k_0}{4B}$ имеем $\frac{df(\lambda)}{d\lambda} > 0$, при $\lambda = \frac{3k_0}{4B}$ функция $f(\lambda)$ достигает своего минимума, равного

$$f\left(\frac{3k_0}{4B}\right) = \left(\frac{3k_0}{4B}\right)^3 \left(\frac{3k_0}{4} - k_0\right) + \frac{1}{A-B} = -\left(\frac{3}{B}\right)^3 \left(\frac{k_0}{4}\right)^4 + \frac{1}{A-B}.$$

Легко проверить, что если

$$\begin{aligned} |k_0| &\leqslant \frac{A}{\sqrt{|A-B|}} && \left(A < \frac{4}{3}B\right), \\ |k_0| &\leqslant \frac{\frac{4}{3}B\sqrt[4]{\frac{3(A-B)}{B}}}{\sqrt{A-B}} && \left(A > \frac{4}{3}B\right), \end{aligned} \tag{39.29}$$

то все вещественные корни $f(\lambda)$, которые удовлетворяют условию $\lambda k_0 > 0$, если таковые существуют, находятся в промежутке $\left(0, \frac{1}{\sqrt{|A-B|}}\right]$, т. е. система (39.14) не может иметь совокупности положений равновесия II.

Аналогично исследуется уравнение (39.26).

Если

$$\begin{aligned} |k_0| &\leqslant \frac{A}{\sqrt{|A-C|}} && \left(A \leqslant \frac{4}{3}C\right), \\ |k_0| &\leqslant \frac{4C\sqrt{\frac{3(A-C)}{C}}}{3\sqrt{A-C}} && \left(A > \frac{4}{3}C\right), \end{aligned} \tag{39.30}$$

то все вещественные корни уравнения (39.26) такие, что $\lambda k_0 > 0$, если они существуют, находятся в промежутке $\left(0, \frac{1}{\sqrt{|A-C|}}\right]$, т. е. система (39.14) не может иметь совокупности положений равновесия III.

Если нарушено одно из условий (39.29), (39.30), то система (39.14) может иметь совокупность положений равновесия II или III соответственно. Если выполнены оба условия, то система (39.14) имеет лишь совокупность положений равновесия I.

Аналогично исследуется случай, когда A, B, C не все различны. При этом оказывается, что если $A=B=C$, то система (39.14) имеет лишь положения равновесия (39.19), (39.20), если $A=B\neq C$ или $A=C\neq B$, то система (39.14) имеет положения равновесия соответственно (39.19), (39.20), (39.25) и (39.19), (39.20), (39.22); если $B=C\neq A$, то система (39.14) имеет положения равновесия (39.19), (39.20), (39.31), где (39.31) имеет вид

$$\bar{\omega}_* = \lambda \bar{s}_{0*}, \qquad \bar{s}_{0*} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \tag{39.31}$$

причем $\mu=\lambda^2 B$, $s_1 = -\frac{1}{\lambda^2 (A-B)}$, $s_2^2+s_3^2=1-s_1^2$, а λ удовлетворяет соотношениям (39.23), (39.24). Если k_0 удовлетворяет соотношениям (39.29), (39.30), то в этом случае система (39.14) будет иметь лишь положения равновесия (39.19), (39.20).

Исследуем поведение решений системы (39.14) в окрестности положений равновесия (39.19), (39.20), (39.22), (39.25), (39.31). Положим

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_* + \bar{\omega}', \qquad \bar{s}_0 = \bar{s}_{0*} + \bar{s}'. \tag{39.32}$$

Рассмотрим функцию

$$V = \frac{1}{2}\left[\bar{\omega}\cdot\Theta\bar{\omega} + (\bar{s}_0 - \bar{r}_0)^2\right]$$

и для определенности будем считать, что $B \geqslant C$. Подставляя (39.32) в (39.5), (39.6) и в выражение для функции V, получим

$$\bar{s}'^2 + 2\bar{s}'\bar{s}_{0*} = s_1'^2 + s_2'^2 + s_3'^2 + 2(s_1's_1 + s_2's_2 + s_3's_3) = 0, \tag{39.33}$$

$$(\bar{s}' + \bar{s}_{0*})\cdot\Theta\bar{\omega}' + \bar{s}'\cdot\Theta\bar{\omega}_* = Ap'(s_1' + s_1) + Bq'(s_2' + s_2) + \\ + Cr'(s_3' + s_3) + \lambda(As_1's_1 + Bs_2's_2 + Cs_3's_3) = 0, \tag{39.34}$$

$$V = \frac{1}{2}[(\bar{\omega}' + \bar{\omega}_*)\cdot\Theta(\bar{\omega}' + \bar{\omega}_*) + (\bar{s}' + \bar{s}_{0*} - \bar{r}_0)^2] = \\ = V_1 + \frac{1}{2}[\bar{\omega}_*\cdot\Theta\bar{\omega}_* + (\bar{s}_{0*} - \bar{r}_0)^2],$$

$$V_1 = \frac{1}{2}\bar{\omega}'\cdot\Theta\bar{\omega}' + 2\bar{\omega}'\Theta\bar{\omega}_* + \bar{s}'^2 + 2\bar{s}'(\bar{s}_{0*} - \bar{r}_0). \tag{39.35}$$

Из интеграла (39.34) находим

$$p' = -\frac{1}{A(s_1' + s_1)}[Bq'(s_2' + s_2) + Cr'(s_3' + s_3) + \\ + \lambda(As_1's_1 + Bs_2's_2 + Cs_3's_3)]. \tag{39.36}$$

Подставляя выражение (39.36) в функцию (39.35), учитывая интеграл (39.33) и вычисляя минимум V_1 по переменным q', r',

получим

$$\min_{q', r'} V_1 = -\frac{1}{(\bar{s}' + \bar{s}_{0*})\cdot(\Theta)\cdot(\bar{s}' + \bar{s}_{0*})} \times$$
$$\times \frac{1}{2}[\bar{\omega}_*\Theta\bar{\omega}_* \cdot (\bar{s}'\Theta\bar{s}' + 2\bar{s}'\Theta\bar{s}_{0*}) + s_1'(\bar{s}' + \bar{s}_{0*})\Theta(\bar{s}' + \bar{s}_{0*})] =$$
$$= \frac{V_2}{(\bar{s}' + \bar{s}_{0*})\Theta(\bar{s}' + \bar{s}_{0*})}, \quad (39.37)$$

$$V_2 = -\left[\frac{1}{2}\bar{\omega}_*\Theta\bar{\omega}_* (\bar{s}'\Theta\bar{s}' + 2\bar{s}'\Theta\bar{s}_{0*}) + s_1'(\bar{s}' + \bar{s}_{0*})\Theta(\bar{s}' + \bar{s}_{0*})\right]. \quad (39.38)$$

1°. Пусть $\bar{\omega}_*$ и $\bar{s}_{0*}$ определяются из соотношений (39.19). Из интеграла (39.33) имеем

$$s_1' = -\frac{1}{2}\bar{s}'^2 = -1 + \sqrt{1 - s_2'^2 - s_3'^2}. \quad (39.39)$$

Подставляя выражение (39.39) в функцию (39.38) и учитывая соотношения (39.19), получим

$$V_2 = \frac{k_0}{2A}(A\bar{s}'^2 - \bar{s}'\Theta\bar{s}') + \frac{1}{2}\bar{s}'^2(A + \bar{s}'\Theta\bar{s}' - A\bar{s}'^2) =$$
$$= \frac{1}{2A}[(A^2 + k_0^2(A-B))s_2'^2 + (A^2 + k_0^2(A-C))s_3'^2] +$$
$$+ \frac{1}{2}(s_2'^2 + s_3'^2)\left[\left(B - \frac{3}{4}A\right)s_2'^2 + \left(C - \frac{3}{4}A\right)s_3'^2\right] + 0[(s_3'^2 + s_2'^2)].$$

Отсюда видно, что V_2 при достаточно малых s_2', s_3' является определенно положительной функцией этих величин, если

$$\begin{aligned} &k_0 \text{ произвольно} && (A \geqslant B), \\ &|k_0| \leqslant \frac{A}{\sqrt{B-A}} && (A < B). \end{aligned} \quad (39.40)$$

Следовательно, функция V_1 будет также положительно определенной при достаточно малых s_2', s_3', q', r'. Так как полная производная по времени от V_1, равная $\{-[\bar{\omega}^2 - (\bar{\omega}\cdot\bar{s}_0)^2]\}$, неположительна, то рассматриваемое положение равновесия условно устойчиво по Ляпунову. Так как $\bar{\omega}^2 - (\bar{\omega}\cdot\bar{s}_0)^2 \to 0$ и в достаточно малой окрестности положения равновесия (39.19) нет других положений равновесия системы (39.14), (39.5), (39.16), то рассматриваемое положение равновесия является условно асимптотически устойчивым по Ляпунову. Если (39.40) не выполняется, то функция V_2, а вместе с ней и V_1 не являются знакопостоянными положительными, т. е. в этом случае положение равновесия (39.19) неустойчиво.

2°. Пусть $\bar{\omega}_*$ и $\bar{s}_{0*}$ определяются из (39.20). Из (39.33) имеем

$$s_1' = \frac{1}{2}\bar{s}'^2 = 1 - \sqrt{1 - s_2'^2 - s_3'^2}. \quad (39.41)$$

Подставляя (39.41) в (39.38) и учитывая (39.20), получим

$$V_2 = \frac{1}{2A}\left[-A^2 + k_0^2(A-B))s_2'^2 + (-A^2 + k_0^2(A-C))s_3'^2\right] - \\ -\frac{1}{2}(s_2'^2 + s_3'^2)\left[\left(B - \frac{3}{4}A\right)s_2'^2 + \left(C - \frac{3}{4}A\right)s_3'^2\right] - \\ -\frac{1}{8}(s_2'^2 + s_3'^2)^2\left[\left(B - \frac{1}{2}A\right)s_2'^2 + \left(C - \frac{1}{2}A\right)s_3'^2\right] + o\left[(s_2'^2 + s_3'^2)\right].$$

Отсюда следует, что V_2 для достаточно малых s_2', s_3' является положительно определенной функцией этих переменных, если $A > B$,

$$|k_0| > \frac{A}{\sqrt{A-B}} \quad \left(A \leqslant \frac{4}{3}B\right), \\ |k_0| \geqslant \frac{A}{\sqrt{A-B}} \quad \left(A > \frac{4}{3}B\right). \tag{39.42}$$

Если хотя бы одно условие из (39.42) нарушено, то функция V_2 не является знакопостоянной положительной.

Таким образом, аналогично пункту 1° устанавливаем, что если выполнены условия (39.42), то положение равновесия (39.20) условно асимптотически устойчиво по Ляпунову; в противном случае положение равновесия (1.20) неустойчиво.

3°. Пусть $\bar{\omega}_*$ и $\bar{s}_{0*}$ определяются из соотношений (39.22), т. е. мы рассматриваем случай

$$A \neq B, \quad B > C. \tag{39.43}$$

Из интеграла (39.33) находим

$$2s_2s_2' = -2s_1s_1' - \bar{s}'^2. \tag{39.44}$$

Подставляя выражение (39.44) в функцию (39.38) и учитывая равенство (39.23), получим

$$V_2 = \frac{1}{2}(\lambda k_0 + 2s_1')\left[(B-A)s_1'^2 + (B-C)s_3'^2\right] + 2(B-A)s_1s_1'^2 = \\ = \frac{1}{2\lambda^2}(4 + (B-A)k_0\lambda^3 + 2(B-A)\lambda^2 s_1')s_1'^2 + \frac{1}{2}(k_0\lambda + 2s_1')(B-C)s_3'^2. \tag{39.45}$$

Рассмотрим величину $[4 + (B-A)k_0\lambda^3]$. Она положительна, если

$$k_0 \text{ произвольно} \quad (A < B), \\ (A-B)k_0\lambda^3 < 4 \quad (A > B). \tag{39.46}$$

Кроме того, k_0 и λ должны удовлетворять соотношениям (39.23) и (39.24). Соотношения (39.23), (39.24) и (39.46) совместимы,

если k_0 удовлетворяет условию

$$|k_0| > \frac{A}{\sqrt{B-A}} \qquad (B > A),$$
$$|k_0| \in \left(\frac{\frac{4}{3} B \sqrt[4]{\frac{3(A-B)}{B}}}{\sqrt{A-B}}, \ \frac{A}{\sqrt{A-B}} \right) \qquad \left(A > \frac{4}{3} B \right). \tag{39.47}$$

Отсюда следует, что если выполнены условия (39.47) и (39.43), то V_2 для достаточно малых s_1' и s_3' является определенно положительной функцией этих переменных; если хотя бы одно из условий (39.43), (39.47) нарушено, то функция V_2 не является знакопостоянной положительной.

Таким образом, аналогично пункту 1° получим, что если выполнено условие (39.47), то положение равновесия (39.22) условно асимптотически устойчиво по Ляпунову; в противном случае положение равновесия (39.22) неустойчиво.

4°. Пусть $\bar{\omega}_*$ и $\bar{s}_{0*}$ определяются из (39.25), т. е. мы рассматриваем случай

$$A \neq C, \quad B > C. \tag{39.48}$$

Из (39.33) имеем

$$2s_3s_3' = -2s_1s_1' - \bar{s}'^2. \tag{39.49}$$

Подставляя (39.49) в (39.33) и учитывая (39.26), получим

$$V_2 = \frac{1}{2\lambda^2}(4 + (C-A)k_0\lambda^3 + 2(C-A)\lambda^2 s_1')s_1'^2 + \frac{1}{2}(k_0\lambda + 2s_1')(C-B)s_2'^2.$$

Так как имеет место соотношение (39.48), то функция V_2 не является знакопостоянной положительной, так что положение равновесия (39.25) будет неустойчивым.

5°. Пусть $\bar{\omega}_*$ и $\bar{s}_{0*}$ определяются из (39.31), т. е. пусть рассматривается случай

$$B = C \neq A. \tag{39.50}$$

Из (39.33) имеем

$$2(s_2s_2' + s_3s_3') = -2s_1s_1' - \bar{s}'^2. \tag{39.51}$$

Подставляя (39.51) в (39.38) и учитывая (39.33) и (39.50), получим

$$V_2 = \frac{1}{2\lambda^2}(4 + (B-A)k_0\lambda^3 + 2(B-A)\lambda^2 s_1')s_1'^2,$$

т. е. V_2 не может быть знакоопределенной функцией величин s_i' ($i = 1, 2, 3$), удовлетворяющих соотношению (39.33), но для достаточно малых s_1' V_2 является положительно определенной

функцией переменной s_1', если

$$|k_0| > \frac{A}{\sqrt{B-A}} \qquad (B > A),$$

$$|k_0| \in \left(\frac{\frac{4}{3} B \sqrt[4]{\frac{3(A-B)}{B}}}{\sqrt{A-B}}, \frac{A}{\sqrt{A-B}} \right) \qquad \left(A > \frac{4}{3} B \right). \tag{39.52}$$

Если же (39.52) не выполнено, то функция V_1 не является знакопостоянной положительной. Здесь мы учли то обстоятельство, что k_0 и λ должны удовлетворять соотношениям (39.23) и (39.24).

Таким образом, если выполнено условие (39.52), то V_1 является знакопостоянной положительной функцией переменных q', r', s_1' и $(s_2 s_2' + s_3 s_3')$. Так как полная производная по времени от V_1, равная $\{-[\overline{\omega}^2 - (\overline{\omega} \cdot \overline{s}_0)^2]\}$, неположительна, то во все время движения будут выполняться неравенства

$$0 \leqslant V_1 \leqslant V_{10}, \tag{39.53}$$

где через V_{10} обозначено значение функции V_1 в начальный момент времени $t = 0$, причем величина V_{10} за счет выбора начальных данных может быть сделана сколь угодно малой.

На основании (39.53) мы заключаем, что для достаточно малых $|\overline{s}'|$, $|\overline{\omega}'|$ любое движение системы (39.14) стремится к одному из положений равновесия (39.31); а поскольку имеет место соотношение (39.33), то мы приходим к выводу, что исследуемое положение равновесия (39.31) будет условно устойчиво по Ляпунову. Если условие (39.52) нарушено, то положение равновесия (39.31) будет неустойчивым.

Теорема 39.2. *Под действием момента* (39.13) *твердое тело T либо находится в одном из положений равновесия* (39.19), (39.20), (39.22), (39.25), (39.31), *либо стремится к одному из них. При этом:*

1) *если выполнено условие* (39.40), *то положенце равновесия* (39.19) *условно асимптотически устойчиво по Ляпунову; если условие* (39.40) *нарушено, то положение равновесия* (39.19) *неустойчиво;*

2) *если выполнены условия* (39.42), *то положение равновесия* (39.20) *условно асимптотически устойчиво по Ляпунову; если хотя бы одно из этих условий нарушено, то положение равновесия* (39.20) *будет неустойчивым;*

3) *если выполнено условие* (39.47), *то положение равновесия* (39.22) *условно асимптотически устойчиво по Ляпунову; если это условие нарушено, то положение равновесия* (39.22) *неустойчиво;*

4) *положение равновесия* (39.25) *неустойчиво по Ляпунову;*

5) *если выполнено условие* (39.52), *то положение равновесия* (39.31) *условно устойчиво по Ляпунову, а если* (39.52) *нарушено, то положение равновесия* (39.31) *неустойчиво.*

Замечание 1. Пусть нам известно, что

$$\bar{\omega}^2(0) < R^2. \tag{39.54}$$

Выберем момент $\bar{M}$ в виде

$$\bar{M} = -[\bar{\omega} - \bar{s}_0(\bar{\omega}\cdot\bar{s}_0)] + l(\bar{r}_0 \times \bar{s}_0). \tag{39.55}$$

Здесь R и l—положительные постоянные.

Обозначим через k_{0*} такую положительную константу, что при $|k_0| < k_{0*}$ выполнены условия (39.29), (39.30), а при $|k_0| > k_{0*}$ хотя бы одно из них нарушено.

При выборе момента $\bar{M}$ в виде (39.55) условия (39.29), (39.30) запишутся соответственно

$$|k_0| \leqslant \frac{lA}{\sqrt{|A-B|}} \qquad \left(A \leqslant \frac{4}{3}B\right), \tag{39.56}$$

$$|k_0| \leqslant \frac{l4B\sqrt[4]{\frac{3(A-B)}{B}}}{3\sqrt{A-B}} \qquad \left(A > \frac{4}{3}B\right),$$

$$|k_0| \leqslant \frac{lA}{\sqrt{|A-C|}} \qquad \left(A \leqslant \frac{4}{3}C\right), \tag{39.57}$$

$$|k_0| \leqslant \frac{l4C\sqrt[4]{\frac{3(A-C)}{C}}}{3\sqrt{A-C}} \qquad \left(A > \frac{4}{3}C\right).$$

При $|k_0| < lk_{0*}$ условия (39.56), (39.57) будут выполнены.

Из (39.16) следует, что $|\omega(0)| \geqslant \frac{|k_0|}{\max(A, B, C)}$. Если $|\omega(0)| < \frac{lk_{0*}}{\max(A, B, C)}$, то для $|k_0|$ будут выполнены условия (39.56), (39.57), т. е. система (39.14) будет иметь лишь совокупность положений равновесия I.

Т. е. если l таково, что $R \leqslant \frac{lk_{0*}}{\max(A, B, C)}$, то система (39.14) имеет только совокупность положений равновесия I, причем положение равновесия (39.19) условно асимптотически устойчиво, а положение равновесия (39.20) неустойчиво по Ляпунову.

Замечание 2. Управляющий момент $\bar{M}$ можно выбрать более общего вида, однако характер движения твердого тела будет таким же, как под действием момента (39.13), а именно:

можно взять $\overline{M}=\overline{\mu}+\overline{s}_0\times \operatorname{grad} U$, где $\overline{\mu}=[\overline{s}_0\times\dot{\overline{s}}_0]\cdot\varphi$. Здесь U — положительно определенная функция величины и φ — положительно определенная функция компонент вектора

$$[\overline{s}_0\times\dot{\overline{s}}_0]=-[\overline{\omega}-\overline{s}_0(\overline{\omega}\cdot s_0)].$$

§ 40. Ориентация осей, связанных с телом

Пусть заданы два ортогональных орта $\overline{s}_{01}$, $\overline{s}_{02}$, занимающих неизменное положение в абсолютном пространстве $O\xi\eta\zeta$, и пусть заданы два ортогональных орта $\overline{r}_{01}$ и $\overline{r}_{02}$, занимающих неизменное положение в теле T_0. Требуется найти управляющий момент $\overline{M}$, позволяющий стабилизировать орт $\overline{r}_{01}$ в направлении $\overline{s}_{01}$, орт $\overline{r}_{02}$ в направлении $\overline{s}_{02}$. Положим $\overline{s}_{03}=\overline{s}_{01}\times\overline{s}_{02}$, $\overline{r}_{03}=\overline{r}_{01}\times\overline{r}_{02}$:

$$\overline{M}=\overline{\mu}+\sum_{i=1}^{3}\overline{s}_{0i}\times\operatorname*{grad}_{\overline{s}_{0i}} u, \tag{40.1}$$

где $\overline{\mu}$ — некоторый момент такой, что $(\overline{\omega}\cdot\overline{\mu})=W$, W — отрицательно определенная функция относительно компонент ω; u — положительно определенная функция относительно векторов $\overline{s}_{0i}-\overline{r}_{0i}$ $(i=1, 2, 3)$.

В формуле (40.1) $\operatorname*{grad}_{\overline{s}_{0i}} u$ означает, что $\operatorname{grad} u$ берется по компонентам вектора $\overline{s}_{0i}$ в системе $Oxyz$, связанной с телом (см. § 39). Вращательное движение берется по компонентам вектора s_{0i}. Вращательное движение твердого тела под действием момента (40.1) будет описываться системой дифференциальных уравнений (см. § 39)

$$\begin{gathered}\Theta\dot{\overline{\omega}}+\overline{\omega}\times\Theta\overline{\omega}=\overline{M},\\ \dot{\overline{s}}_{0i}=-\overline{\omega}\times\overline{s}_{0i}\qquad(i=1,\ 2,\ 3).\end{gathered} \tag{40.2}$$

Умножив первое уравнение скалярно на вектор $\overline{\omega}$, получим

$$dV/dt=W, \tag{40.3}$$

где

$$V=\frac{1}{2}[Ap^2+Bq^2+Cr^2]+u$$

и p, q, r — проекции $\overline{\omega}$ на о и системы $Oxyz$.

Положим для определенности

$$u=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}a_i[\overline{s}_{0i}-\overline{r}_{0i}]^2,\quad \overline{\mu}=-\overline{\omega}. \tag{40.4}$$

Здесь a_i — различные положительные числа.

Легко видеть, что система (40.2) при условии (40.4) будет отличаться от системы (39.6) лишь тем, что в правой части вместо компонент одного вектора $\bar{s}_0 \times \operatorname{grad} V$ выписывается сумма трех аналогичных векторов $\bar{s}_{0i} \times \operatorname{grad} V$. Поэтому система (40.2) имеет положения равновесия $\omega = 0$, $\bar{s}_{01} = \pm \bar{r}_{01}$, $\bar{s}_{02} = \pm \bar{r}_{02}$, $\bar{s}_{03} = \bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02}$, и при этом других положений равновесия в системе (40.2) не будет.

Покажем, что положение равновесия $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_{0i} = \bar{r}_{0i}$, $i = 1, 2, 3$, асимптотически устойчивы по Ляпунову и что остальные положения равновесия системы (40.2) обязательно являются неустойчивыми.

В силу положительной определенности функции V относительно компонент вектора $\bar{\omega}$ и компонент векторов $\bar{s}_{0i} - \bar{r}_{0i}$ и в силу отрицательной определенности функции W относительно компонент вектора $\bar{\omega}$ из (40.3) можно установить, что упомянутое положение равновесия будет обязательно устойчивым по Ляпунову. Далее с помощью тех же рассуждений, что и в § 39, можно установить, что $\bar{\omega}^2 \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, а также $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i (\bar{r}_{0i} - \bar{s}_{0i}) \to \bar{0}$ при $t \to +\infty$, ибо при условии (40.4) $\bar{M} = -\bar{\omega} + \sum\limits_{i=1}^{3} a_i (\bar{r}_{0i} - \bar{s}_{0i})$.

Из этого обстоятельства и из устойчивости рассматриваемого положения равновесия вытекает, что $\bar{s}_{0i} \to \bar{r}_{0i}$ при $t \to +\infty$ ($i = 1, 2, 3$). Покажем теперь, что любое из оставшихся положений равновесия неустойчиво по Ляпунову.

Рассмотрим, например, положение равновесия $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_{01} = -\bar{r}_{01}$, $\bar{s}_{02} = \bar{r}_{02}$, $\bar{s}_{03} = -\bar{r}_{03}$. Построим функцию

$$V_1 = \frac{1}{2} [Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - a_1 (\bar{s}_{01} + \bar{r}_{01})^2 + a_2 (\bar{s}_{02} - \bar{r}_{02})^2 - a_3 (\bar{s}_{03} + \bar{r}_{03})^2].$$

Легко показать, что $\dot{V}_1 = W$. Возьмем последовательность начальных данных $\bar{\omega}_k \to 0$, $\bar{s}_{01k} \to -\bar{r}_{01}$, $\bar{s}_{02k} \to \bar{r}_{02}$, $\bar{s}_{03k} \to -\bar{r}_{03}$ так, чтобы было $V_1 < 0$ при $t = 0$. Так как функция V_1 убывает, то при $t \geqslant 0$ будет $V_1 \leqslant V_{10} < 0$, где V_{10} — значение функции V_1 при $t = 0$. С другой стороны, $\bar{\omega}^2 \to 0$ при $t \to +\infty$ и $\sum\limits_{i=1}^{3} a (\bar{r}_{0i} \times \bar{s}_{0i}) \to \bar{0}$ при $t \to +\infty$ на любом движении системы (40.2) при условии (40.4). Но из предыдущего вытекает, что $a_1 (\bar{s}_{01} + \bar{r}_{01})^2 + a_3 (\bar{s}_{03} + \bar{r}_{03})^2$ не стремится к нулю при $t \to +\infty$. Это означает, что интегральные кривые, начинающиеся в сколь угодно малой окрестности выбранного положения равновесия, покидают некоторую фикси-

рованную окрестность при возрастании времени, что свидетельствует о неустойчивости по Ляпунову.

Теорема 40.1. *При управлении* (40.1) *любое движение твердого тела либо является состоянием покоя, либо стремится к такому состоянию, причем положение равновесия* $\bar{\omega}=0$, $\bar{s}_{0i}=\bar{r}_{0i}=1, 2, 3$, *асимптотически устойчиво по Ляпунову, а любое другое положение равновесия, отличное от этого, обязательно будет неустойчивым.*

Предположим теперь, что тройка ортов $\bar{s}_{01}$, $\bar{s}_{02}$, $\bar{s}_{03}$ вращается как твердое тело с угловой скоростью ω_1 по отношению к абсолютной системе координат $O\xi\eta\zeta$. Требуется управляющий момент $\bar{M}$ выбрать так, чтобы стабилизировать оси $\bar{r}_{01}$, $\bar{r}_{02}$, $\bar{r}_{03}$, связанные с телом, в направлении соответствующих осей.

Обозначим через $\bar{\omega}_2$ угловую скорость управляемого тела T_0. Положим

$$\bar{M}=-[\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1]+\Theta\cdot\dot{\bar{\omega}}_1+\bar{\omega}_1\times\Theta\bar{\omega}_2+\sum_{i=1}^{3}a_i[\bar{r}_{0i}\times\bar{s}_{0i}]. \qquad (40.5)$$

Тогда вращательное движение твердого тела будет описываться системой уравнений

$$\begin{gathered}\Theta\cdot\dot{\bar{\omega}}_2+\bar{\omega}_2\times\Theta\bar{\omega}_2=\bar{M},\\ \dot{\bar{s}}_{0i}=[\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2]\times\bar{s}_{0i}.\end{gathered} \qquad (40.6)$$

Система (40.6) имеет семейство установившихся движений: $\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_1$, $\bar{s}_{0i}=\pm\bar{r}_{0i}$, $\bar{s}_{03}=\bar{s}_{01}\times\bar{s}_{02}$, причем установившееся движение $\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_1$, $\bar{s}_{0i}=\bar{r}_{0i}$ асимптотически устойчиво по Ляпунову. Остальные из упомянутых установившихся движений обязательно неустойчивы.

Положим $\bar{\omega}=\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1$. Тогда система (40.6) может быть представлена также в форме

$$\begin{gathered}\Theta\dot{\bar{\omega}}+\bar{\omega}\times\Theta\bar{\omega}_2=-\bar{\omega}+\sum_{i=1}^{3}a_i[\bar{r}_{0i}\times\bar{s}_{0i}],\\ \dot{\bar{s}}_{0i}=-\bar{\omega}\times\bar{s}_{0i}.\end{gathered} \qquad (40.7)$$

Умножая первое из уравнений (40.7) скалярно на $\bar{\omega}$, найдем

$$dV/dt=-\bar{\omega}^2, \qquad (40.8)$$

где

$$V=\frac{1}{2}\left[\bar{\omega}\cdot\Theta\bar{\omega}+\sum_{i=1}^{3}a_i(\bar{s}_{0i}-\bar{r}_{0i})^2\right].$$

Из равенства (40.8) вытекает, что упомянутое установившееся движение обязательно устойчиво по Ляпунову. Как и в § 39, можно показать, что $\bar{\omega}^2 \to 0$ при $t \to +\infty$ и что $\sum_{i=1}^{3} a_i (\bar{r}_{0i} \times \bar{s}_{0i}) \to \bar{0}$ при $t \to +\infty$. При помощи рассуждений, аналогичных предыдущим, приходим к выводу, что другие установившиеся движения, упомянутые выше, будут неустойчивы по Ляпунову.

Теорема 40.2. *Любое движение твердого тела T_0 под действием момента* (40.5) *является либо установившимся;* $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1$ *и* $\bar{s}_{0i} = \pm \bar{r}_{0i}$, $\bar{s}_{03} = \bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02}$ *либо стремится к установившемуся. При этом установившееся движение* $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1$, $\bar{s}_{0i} = \bar{r}_{0i}$ $(i = 1, 2, 3)$ *является асимптотически устойчивым по Ляпунову. Остальные установившиеся движения неустойчивы.*

Замечание 1. Теорема 40.1 является частным случаем теоремы 40.2. Однако теорема 40.2, так же как и теорема 40.1, сохраняется при управляющем моменте более общего вида, а именно:

$$\bar{M} = \bar{\mu} + \Theta \dot{\bar{\omega}}_1 + \bar{\omega}_1 \times \Theta \bar{\omega}_2 + \sum_{i=1}^{3} \bar{s}_{0i} \times \operatorname{grad}_{\bar{s}_{0i}} u,$$

где u — положительно определенная функция величин $(\bar{s}_{0i} - \bar{r}_{0i})^2$ и функция $W = [(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1) \cdot \bar{\mu}]$ является функцией, отрицательно определенной относительно компонент вектора $[\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1]$.

Замечание 2. Если в системе управления телом T_0 нет датчиков угловых скоростей, то достаточно в связанной системе координат $Oxyz$ измерять составляющие ортов $\bar{s}_{01}$, и $\bar{s}_{02}$, так как $\bar{s}_{03} = \bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02}$ и $-\bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} [\bar{s}_{0i} \times \dot{\bar{s}}_{0i}]$.

Замечание 3. При ориентации связанных осей в направлении подвижной тройки векторов $\bar{s}_{01}$, $\bar{s}_{02}$, $\bar{s}_{03}$ возникает вопрос о построении управляющего момента еще и по причине вхождения туда угловой скорости $\bar{\omega}_1$ этой тройки векторов, так как проекции угловой скорости $\bar{\omega}_1$ известны, вообще говоря, в системе координат, связанной с векторами $\bar{s}_{0i}$, $i = 1, 2, 3$.

Пусть $\bar{\omega}_1'$ есть вектор-столбец компонент вектора $\bar{\omega}_1$ в системе $\bar{s}_{01}$, $\bar{s}_{02}$, $\bar{s}_{03}$, и пусть $\bar{\omega}_1''$ есть вектор-столбец компонент того же вектора в системе $Oxyz$, оси которой являются главными центральными осями тела T_0.

Тогда $\bar{\omega}_1'' = A \bar{\omega}_1'$, где A — матрица перехода. Столбцами этой матрицы являются компоненты векторов $\bar{s}_{01}$, $\bar{s}_{02}$, $\bar{s}_{03}$ в системе $Oxyz$.

Это обстоятельство дает возможность строить управляющий момент $\overline{M}$ фактически по проекциям векторов $\bar{s}_{01}$ и $\bar{s}_{02}$ в системе $Oxyz$.

Остановимся теперь на решении задачи сканирования осей твердого тела $Oxyz$. Пусть задан орт $\bar{s}_0$, неизменный в системе $O\xi\eta\zeta$, и пусть $\bar{\omega}_1$ — мгновенная угловая скорость, задающая сканирование осей $Oxyz$ в системе $O\xi\eta\zeta$. Обозначим через $\bar{\sigma}_0$ вектор-столбец компонент орта $\bar{s}_0$ в системе $Oxyz$; тогда $\dot{\bar{\sigma}}_0 = -\bar{\omega}_1 \times \bar{\sigma}_0$.

Начальное положение вектора $\bar{s}_0$ в системе $Oxyz$ при $t = 0$ и это уравнение единственным образом определяют вектор $\bar{\sigma}_0(t)$. Требуется построить управляющий момент $\overline{M}$ так, чтобы заданное сканирование осей $Oxyz$ было устойчивым. Обозначим через $\bar{\omega}_2$ угловую скорость твердого тела и положим $\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1$.

Рассмотрим управляющий момент $\overline{M}$ вида

$$\overline{M} = -\bar{\omega} + \Theta\dot{\bar{\omega}}_1 + \bar{\omega}_1 \times \Theta\bar{\omega}_2 + \bar{\sigma}_0 \times \bar{s}_0. \tag{40.9}$$

Уравнения движения твердого тела и ортов имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta\dot{\bar{\omega}}_2 + \bar{\omega}_2 \times \Theta\bar{\omega}_2 &= \overline{M}, \\ \dot{\bar{s}}_0 &= -\bar{\omega}_2 \times \bar{s}_0, \\ \dot{\bar{\sigma}}_0 &= -\bar{\omega}_1 \times \bar{\sigma}_0. \end{aligned} \tag{40.10}$$

Легко видеть, что система (40.10) имеет два установившихся движения:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_2 &= \bar{\omega}_1, \\ \bar{s}_0 &= \bar{\sigma}_0 \end{aligned} \tag{40.11}$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_2 &= \bar{\omega}_1, \\ \bar{s}_0 &= -\bar{\sigma}_0. \end{aligned} \tag{40.12}$$

Покажем, что установившееся движение (40.11) обязательно асимптотически устойчиво по Ляпунову, а установившееся движение (40.12) неустойчиво по Ляпунову.

Для доказательства этих утверждений сделаем в системе (40.10) замену искомых функций по формуле

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1;$$

тогда получим

$$\Theta\dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega}\cdot\Theta\bar{\omega}_2 = -\bar{\omega} + \bar{\sigma}_0 \times \bar{s}_0, \tag{40.13}$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{s}}_0 &= -\bar{\omega}_2 \times \bar{s}_0, \\ \dot{\bar{\sigma}}_0 &= -\bar{\omega}_1 \times \bar{\sigma}_0. \end{aligned} \tag{40.14}$$

Умножая обе части (40.13) скалярно на вектор $\bar{\omega}$, найдем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\bar{\omega}\cdot\Theta\bar{\omega}) = -\bar{\omega}^2 + \bar{\omega}(\bar{\sigma}_0 \times \bar{s}_0). \tag{40.15}$$

Вычислим величину $\bar{\omega}\cdot(\bar{\sigma}_0 \times \bar{s}_0)$:

$$\bar{\omega}\cdot(\bar{\sigma}_0 \times \bar{s}_0) = \bar{\omega}_2(\bar{\sigma}_0 \times \bar{s}_0) - \bar{\omega}_1(\bar{\sigma}_0 \times \bar{s}_0) =$$

$$= (\bar{\sigma}_0\cdot\dot{\bar{s}}_0 + \dot{\bar{\sigma}}_0\cdot\bar{s}_0) = -\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(\bar{s}_0 - \bar{\sigma}_0)^2.$$

Здесь использован тот факт, что $\bar{s}_0^2 = \bar{\sigma}_0^2 = 1$. Из (40.15) находим теперь

$$dV/dt = W, \tag{40.16}$$

где

$$V = \frac{1}{2}\left[\bar{\omega}\cdot\Theta\bar{\omega} + (\bar{s}_0 - \bar{\sigma}_0)^2\right] \quad \text{и} \quad W = -\bar{\omega}^2.$$

Функция V является положительно определенной относительно компонент векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{s}_0 - \bar{\sigma}_0$. Полная производная этой функции знакопостоянно отрицательна; следовательно, установившееся движение (40.11) устойчиво по Ляпунову. Далее любое движение системы (40.13), (40.14) обладает свойством $W \to 0$ и $\bar{\sigma}_0 \times \bar{s}_0 \to \bar{0}$ при $t \to +\infty$. Это утверждение доказывается тем же способом, что и в § 39. Отсюда вытекает, что установившееся движение (40.11) также асимптотически устойчиво по Ляпунову. Легко видеть, что функция $V_1 = \frac{1}{2}\left[\bar{\omega}\cdot\Theta\bar{\omega} - (\bar{s}_0 + \bar{\sigma}_0)^2\right]$ удовлетворяет условию $dV_1/dt = W$. Поэтому можно доказать тем же способом, как это было сделано выше, что установившееся движение (40.12) обязательно неустойчиво. Здесь, разумеется, всюду предполагается, что угловая скорость сканирования $\bar{\omega}_1$ является векторной функцией, заданной при $t \geqslant 0$, всюду непрерывно дифференцируемой и ограниченной вместе со своей производной.

Теорема 40.3. *Тело T_0 под действием управляющего момента* (40.9) *либо находится в установившемся движении* (40.11), (40.12), *либо неограниченно приближается к этим движениям. При этом установившееся движение* (40.11) *асимптотически устойчиво по Ляпунову и установившееся движение* (40.12) *неустойчиво по Ляпунову.*

Замечание. При формировании управляющего момента (40.9) используется ряд величин. Если во время движения измерять лишь проекции компонент вектора $\bar{s}_0$, то построение управляющего момента (40.9) невозможно.

Если же среди аппаратуры управления имеется датчик проекций угловой скорости на направление $\bar{s}_0$, то построение момента (40.9) оказывается возможным. При этом считается, что векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\sigma}_0$ являются заданными функциями времени. В самом деле, угловая скорость $\bar{\omega}_2$ действительного движения твердого тела может быть вычислена по формуле

$$\bar{\omega}_2=\bar{s}_0\cdot(\bar{\omega}_2\cdot\bar{s}_0)-\bar{s}_0\times\dot{\bar{s}}_0.$$

Остановимся теперь на построении угловой скорости сканирования $\bar{\omega}_1$ и вектора $\bar{\sigma}_0$. Направим ось $O\eta$ абсолютной системы координат по вектору $\bar{s}_0$, и пусть в начальный момент система $Oxyz$ совпадает с системой $O\xi\eta\zeta$.

Для описания положения $Oxyz$ в абсолютной системе координат $O\xi\eta\zeta$ введем в рассмотрение три угла. Обозначим через ψ угол поворота системы $Oxyz$ вокруг оси $O\eta$. Пусть при этом ось Oz займет новое положение Oz_1. Повернем систему осей вокруг оси Oz_1 на угол θ, в результате этого поворота получим положение оси Oy. Повернем далее систему на угол φ вокруг оси Oy до совмещения с системой $Oxyz$. Будем считать, что все повороты происходят против часовой стрелки, если смотреть с вершины ортов, определяющих те оси, вокруг которых происходит поворот. Тогда матрица перехода будет иметь вид $A=A_3(\varphi)A_2(\theta)A_1(\psi)$, где

$$A_1(\psi)=\begin{pmatrix}\cos\psi & 0 & \sin\psi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi\end{pmatrix},\quad A_2(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$A_3(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

При этом столбцы матрицы A представляют собой проекции ортов ξ_0, η_0, ζ_0 системы $O\xi\eta\zeta$ в системе $Oxyz$. Положим теперь $\psi=k_1t$, $\theta=k_2t$, $\varphi=k_3t$, где k_1, k_2, k_3 — некоторые постоянные; тогда

$$\bar{\omega}_1=k_1\bar{\eta}_0+k_2\bar{z}_{10}+k_3\bar{y}_0.$$

Здесь через $\bar{\eta}_0$, $\bar{z}_{10}$, $\bar{y}_0$ обозначим соответственно орты осей $O\eta$, Oz_1, Oy. Ясно, что $\bar{z}_{10}=\bar{\eta}_0\times\bar{y}_0$. Проектируя угловую скорость $\bar{\omega}_1$

на оси связанной системы, получим

$$(\bar{x}_0, \bar{\omega}_1) = p_1 = k_1(\bar{\eta}_0, \bar{x}_0) + k_2(\bar{z}_{10}, \bar{x}_0),$$
$$(\bar{y}_0, \bar{\omega}_1) = q_1 = k_1(\bar{y}_0, \bar{\eta}_0) + k_3,$$
$$(\bar{z}_0, \bar{\omega}_1) = r_1 = k_1(\bar{\eta}_0, \bar{z}_0) + k_2(\bar{z}_{10}, \bar{z}_0).$$

Вектор $\bar{\sigma}_0$ представляет собой вектор проекций орта $\bar{\eta}_0$ в системе $Oxyz$; отсюда

$$p_1 = k_1\sigma_1 - k_2\sigma_3,$$
$$q_1 = k_1\sigma_2 + k_3,$$
$$r_1 = k_1\sigma_3 + k_2\sigma_1.$$

Из предыдущего построения вытекает, что проекции вектора $\bar{\sigma}_0$ совпадают с соответствующими элементами второго столбца матрицы A. Поэтому имеем $\sigma_1 = a_{12}$, $\sigma_2 = a_{22}$, $\sigma_3 = a_{23}$, где

$$a_{12} = \cos\varphi \sin\theta, \qquad a_{22} = \cos\theta, \qquad a_{23} = -\sin\theta \sin\varphi.$$

Положим далее $k_3 = nk_1$, $k_2 = \frac{k_1}{m}$, где n и m — некоторые целые числа; тогда за то время, в течение которого линия узлов On совершает полный оборот вокруг оси $O\eta$, ось Ox опишет n оборотов вокруг оси Oy, а угол нутации изменится на величину $2\pi/m$.

Предположим, что вокруг точки O описана сфера единичного радиуса, и пусть на этой сфере указана некоторая область S. Числа m и n можно выбрать так, что конец орта $\bar{x}_0$ оси Ox обязательно попадает в указанную область S, причем это попадание будет происходить периодически, так как матрица ориентации A в рассматриваемом случае периодическая.

В силу теоремы 40.5 тело T_0 будет двигаться под действием управляющего момента (40.90) таким образом, что его ось Ox обязательно будет пересекать область S на упомянутой единичной сфере.

§ 41. Уравнения движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки и содержащего маховики

Пусть задано тело T_0, несущее маховики T_j ($j = 1, \ldots, k$). Будем считать, что маховики T_j и тело T_0 являются твердыми телами. Пусть центр инерции T_j лежит на оси i_j, вокруг которой тело T_j может свободно вращаться. Будем считать, что ось i_j занимает неизменное положение в теле T_0, тогда центр инерции всей системы тел будет занимать неизменное положение в теле T_0. Обозначим этот центр инерции через O и будем считать O неподвижной точкой. Для вывода уравнения движения поступим

обычным образом, а именно, заменим систему тел системой материальных точек M_i с массами m_i.

Предположим, что на точку M_i действует сила $\overline{F}_i$, которая представляет собой совокупность всех сил, действующих на эту точку. Если через $\overline{r}_i$ обозначить радиус-вектор точки M_i относительно O, тогда можно написать уравнения движений систем материальных точек

$$m_i\ddot{\overline{r}}_i=\overline{F}_i \quad (i=1,\ \ldots,\ N), \tag{41.1}$$

где N — число материальных точек.

Умножая обе части системы (41.1) векторно на $\overline{r}_i$ и суммируя, находим

$$\sum_{i=1}^{N}\overline{r}_i\times m_i\ddot{\overline{r}}_i=\sum_{i=1}^{N}[\dot{\overline{r}}_i\times m_i\dot{\overline{r}}_i]=\dot{\overline{K}}=\overline{M}.$$

Здесь через $\overline{K}$ обозначен момент количества движения системы материальных точек

$$\overline{K}=\sum_{i=1}^{N}\overline{r}_i\times m_i\dot{\overline{r}}_i,$$

а через $\overline{M}$ обозначен главный момент всех сил, действующих на системы материальных точек:

$$\overline{M}=\sum_{i=1}^{N}\overline{r}_i\times\overline{F}_i.$$

Таким образом, имеем

$$\dot{\overline{K}}=\overline{M}. \tag{41.2}$$

Вычислим момент количества движения $\overline{K}$ рассматриваемой системы материальных точек.

Точки M_i могут принадлежать как телу T_0, так и телам T_j, следовательно, момент количества движения можно представить в форме

$$\overline{K}=\sum_{T_0}r_i\times m_i\dot{\overline{r}}_i+\sum_{j=1}^{k}\sum_{T_j}r_i\times m_i\dot{\overline{r}}_i.$$

Здесь $\sum\limits_{T_0}$ или $\sum\limits_{T_j}$ означает, что суммирование происходит по тем i, для которых точки $\in T_0$ или T_j.

Обозначим через $\overline{\omega}$ — угловую скорость тела T_0 и через $\overline{\omega}_j$ — угловую скорость T_j относительно T_0. Ясно, что $\overline{\omega}_j=\dot{\varphi}_j\cdot\overline{i}_{j_0}$, где

φ_j — угол поворота тела T_j относительно тела T_0 вокруг оси i_j. Здесь через $\bar{\mathbf{i}}_{j_0}$ обозначен орт оси i_j.

Если $M_i \in T_0$, то $\dot{\bar{\mathbf{r}}}_i = \bar{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}_i$; если $M_i \in T_j$, то $\dot{\bar{\mathbf{r}}}_i = \dot{\bar{\mathbf{r}}}_{jC} + \dot{\bar{\rho}}_i = \bar{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}_{jC} + (\bar{\omega} + \bar{\omega}_j) \times \bar{\rho}_i$, где $\bar{\mathbf{r}}_{jC}$ — радиус-вектор центра инерции тела T_j относительно O и $\bar{\rho}_i$ — радиус-вектор точки M_i относительно центра инерции тела T_j.

Из этих соотношений имеем

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum_{T_0} \bar{\mathbf{r}}_i \times m_i (\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}_i) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{T_j} \mathbf{r}_i \times m_i [\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}_{jC} + (\bar{\omega} + \bar{\omega}_j) \times \bar{\rho}_i] =$$
$$= \sum_{T_0 + \ldots + T_k} \bar{\mathbf{r}}_i \times m_i (\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}_i) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{T_j} \bar{\mathbf{r}}_i + m_i (\bar{\omega}_j \times \bar{\rho}_i);$$

так как ρ_i представляют собой радиусы-векторы точек M_i относительно центра инерции T_j, то будем иметь $\sum_{T_j} m_i \bar{\rho}_i = 0$; отсюда

$$\sum_{T_j} \bar{\mathbf{r}}_i \times m_i (\bar{\omega}_j \times \bar{\rho}_i) = \sum_{T_j} \bar{\rho}_i \times m_i (\bar{\omega}_j \times \bar{\rho}_i).$$

Отсюда имеем

$$\bar{\mathbf{K}} = \Theta_0 \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{k} \Theta_j \bar{\omega}_j, \tag{41.3}$$

где Θ_0 — тензор инерции всей системы тел $T_0, T_1, \ldots, T_k$ при условии $\omega_j = 0$ $(j = 1, \ldots, k)$, взятый относительно точки O, Θ_j — тензор инерции тела T_j, взятый относительно центра инерции этого тела.

Умножим векторно на $\bar{\rho}_i$ уравнения (41.1) и просуммируем по тем точкам M_i, которые относятся к телу T_j; тогда найдем

$$\sum_{T_j} \bar{\rho}_i \times m_i \ddot{\bar{\mathbf{r}}}_i = \bar{\mathbf{M}}_j,$$

где через $\mathbf{M}_j$ — обозначим главный момент сил, приложенных к точкам M_i и взятый относительно центра инерции тела T_j:

$$\bar{\mathbf{M}}_j = \sum_{T_j} \bar{\rho}_i \times \bar{\mathbf{F}}_i.$$

Обозначим через $\bar{\mathbf{K}}_j$ момент количества движения точек M_i, относящихся к телу T_j, взятый относительно инерции этого тела, тогда получим

$$\dot{\bar{\mathbf{K}}}_j = \bar{\mathbf{M}}_j. \tag{41.4}$$

Легко видеть, что

$$\overline{K}_j=\sum_{T_j}\overline{\rho}_i\times m_i\dot{\overline{\rho}}_i=\Theta_j(\overline{\omega}+\overline{\omega}_j), \tag{41.5}_1$$

Θ_j — матрица.

Из (41.3)—(41.5) имеем

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left(\Theta_0\overline{\omega}+\sum_{j=1}^{k}\Theta_j\overline{\omega}_j\right)=\overline{M}_0,\\ \frac{d}{dt}[\Theta_j(\overline{\omega}+\overline{\omega}_j)]=\overline{M}_j.\end{gathered} \tag{41.6}$$

Проведем упрощение записи системы (41.6), используя следующие предположения:

1) будем считать, что тела T_j динамически симметричны и что орты их вращения i_j являются осями динамической симметрии;

2) тело T_j вращается вокруг оси i_j с угловой скоростью $\dot{\overline{\varphi}}_j$;

3) с телом T_0 неизменно связана система координат $Oxyz$. Оси этой системы будем считать главными осями инерции всей системы тел при условии $\dot{\overline{\varphi}}_j=0$, $j=1, \ldots, k$.

Обозначим через A, B, C главные моменты инерции упомянутой системы тел. Обозначим через C_j осевой и через A_j экваториальный моменты инерции тела T_j, тогда найдем

$$\Theta_0=\begin{pmatrix}A&&\\&B&\\&&C\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad\Theta_j=A_jE-(C_j-A_j)\,\overline{\mathrm{i}}_j\overline{\mathrm{i}}_j^*;$$

отсюда

$$\begin{gathered}\overline{K}=\Theta_0\overline{\omega}+\sum_{j=1}^{k}C_j\dot{\overline{\varphi}}_j\cdot\overline{\mathrm{i}}_j,\\ \overline{K}_j=[A_jE-(A_j-C_j)\,\overline{\mathrm{i}}_j\cdot\overline{\mathrm{i}}_j^*](\overline{\omega}+\overline{\omega}_j),\end{gathered}$$

откуда имеем систему уравнений

$$\Theta_0\dot{\overline{\omega}}+\overline{\omega}\times\Theta_0\overline{\omega}+\sum_{j=1}^{k}[\ddot{\overline{\varphi}}_j\overline{\mathrm{i}}_j+\dot{\overline{\varphi}}_j(\overline{\omega}\times\overline{\mathrm{i}}_j)]C_j=\overline{M}_0. \tag{41.7}$$

Далее имеем также

$$\begin{gathered}\dot{\overline{K}}_j=[A_jE-(A_j-C_j)\overline{\mathrm{i}}_j\cdot\overline{\mathrm{i}}_j^*]\times\\ \times[\dot{\overline{\omega}}+\ddot{\overline{\varphi}}_j i_j-(A_j-C_j)(\dot{\overline{\mathrm{i}}}_j\overline{\mathrm{i}}_j^*+\overline{\mathrm{i}}_j\dot{\overline{\mathrm{i}}}_j^*)(\overline{\omega}+\overline{\varphi}_j\mathrm{i}_j)=\overline{M}_j.\end{gathered} \tag{41.8}$$

Спроектируем теперь обе части уравнения (41.7) на оси системы $Oxyz$, а обе части системы (41.8) на соответствующую ось

вращения $\mathbf{i}_j$; тогда получим:

$$
\begin{aligned}
&A\dot{p}+(C-B)qr+\sum_{j=1}^{k} C_j[\alpha_j\ddot{\varphi}_j+\dot{\varphi}_j(q\gamma_j-r\beta_j)]=M_{0x},\\
&B\dot{q}+(A-C)pr+\sum_{j=1}^{k} C_j[\beta_j\ddot{\varphi}_j+\dot{\varphi}_j(r\alpha_j-p\gamma_j)]=M_{0y},\\
&C\dot{r}+(B-A)pq+\sum_{j=1}^{k} C_j[\gamma_j\ddot{\varphi}_j+\dot{\varphi}_j(p\beta_j-q\alpha_j)]=M_{0z},\\
&\qquad C_j(\ddot{\varphi}_j+\dot{p}\alpha_j+\dot{q}\beta_j+\dot{r}\gamma_j)=\Theta_j,
\end{aligned} \tag{41.9}
$$

где α_j, β_j, γ_j — составляющие орта $\bar{\mathbf{i}}_{j_0}$ в системе $Oxyz$; M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} — проекции момента $\overline{\mathbf{M}}_0$ на те же оси; Θ_j — проекция момента $\overline{\mathbf{M}}_j$ на ось $\mathbf{i}_j$. Здесь p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ тела T_0 на оси $Oxyz$.

§ 42. Решение задачи ориентации заданного направления с помощью маховиков

Пусть в системе $O\xi\eta\zeta$ задано неизменное направление, характеризуемое ортом $\bar{\mathbf{s}}_0$, и пусть в теле T_0 задан орт $\bar{\mathbf{r}}_0$, неизменно связанный с этим телом. Требуется построить управляющие моменты, приложенные к маховикам T_j, такие, чтобы орт $\bar{\mathbf{r}}_0$ был стабилизован в заданном направлении $\mathbf{s}_0$.

Теорема 42.1. *Существуют управляющие моменты, приложенные к T_j и обладающие следующим свойством: тело T_0 либо находится в относительном покое*

$$\omega=0,\quad \bar{\mathbf{s}}_0=\bar{\mathbf{r}}_0, \tag{42.1}$$

$$\omega=0,\quad \bar{\mathbf{s}}_0=-\bar{\mathbf{r}}_0, \tag{42.2}$$

либо неограниченно приближается к положению относительного покоя, причем положение (42.1) относительного покоя асимптотически устойчиво по Ляпунову, а положение (42.2) относительного покоя обязательно неустойчиво. Других положений относительного покоя тело T_0 не имеет.

Для доказательства этого утверждения, а главное, для фактического построения управляющих моментов рассмотрим систему уравнений, описывающих движение T_0 с маховиками $T_1, \ldots, T_k$:

$$\Theta_0\dot{\bar{\omega}}+\bar{\omega}\times\Theta_0\bar{\omega}+\sum_{j=1}^{k} c_j[\bar{\mathbf{i}}_{j_0}\ddot{\varphi}_j+\dot{\varphi}_j(\bar{\omega}\times\bar{\mathbf{i}}_{j_0})]=\overline{\mathbf{M}}_0, \tag{42.3}$$

$$c_j[\ddot{\varphi}_j+(\dot{\bar{\omega}},\ \bar{\mathbf{i}}_{j_0})]=Q_j,\quad j=1,\ \ldots,\ k.$$

Покажем, что при $k=3$ можно построить указанные в теореме 41.6 управляющие моменты, приложенные к телам T_1, T_2, T_3.

Положим далее $q_j = c_j\dot{\varphi}_j$ и $\bar{q}=\sum_{j=1}^{3} q_j \mathbf{i}_{j_0}$; положим также $\mathbf{Q}=\sum_{i=1}^{3} Q_j \bar{\mathbf{i}}_{j_0}$; тогда будем иметь

$$\begin{gathered}\Theta_0\dot{\bar{\omega}}+\bar{\omega}\times\Theta_0\bar{\omega}+\dot{\bar{\mathbf{q}}}+\bar{\omega}\times\bar{\mathbf{q}}=\bar{\mathbf{M}}_0,\\ \dot{\bar{\mathbf{q}}}+D\dot{\bar{\omega}}=\bar{\mathbf{Q}}.\end{gathered} \tag{42.4}$$

Здесь через D обозначена матрица $D=LCL^*$, где C—диагональная матрица:

$$C=\begin{pmatrix} C_1 & & 0\\ & C_2 & \\ 0 & & C_3\end{pmatrix},$$

а L—матрица, j-й столбец которой составлен из компонент $\bar{l}_{ji}$, взятый в системе $Oxyz$.

Выберем векторную функцию Q так, чтобы было

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}}+\bar{\omega}\times\bar{\mathbf{q}}=\bar{\mathbf{M}}_0-\bar{\mathbf{M}}, \tag{42.5}$$

где $\bar{\mathbf{M}}$—некоторый момент; тогда из (42.5) находим

$$\Theta_0\dot{\bar{\omega}}+\bar{\omega}\times\Theta_0\bar{\omega}=\bar{\mathbf{M}}. \tag{42.6}$$

Из (42.6) находим далее

$$D\dot{\bar{\omega}}=D\Theta_0^{-1}\bar{\mathbf{M}}-D\Theta_0^{-1}(\bar{\omega}\times\Theta_0\bar{\omega}). \tag{42.7}$$

Используя (42.5) и (42.7), найдем после подстановки во второе уравнение (42.4)

$$\bar{\mathbf{Q}}=[D\Theta_0^{-1}-E]\bar{\mathbf{M}}+\bar{\mathbf{M}}_0-\bar{\omega}\times\bar{\mathbf{q}}-D\Theta_0^{-1}(\bar{\omega}\times\Theta_0\bar{\omega}). \tag{42.8}$$

Рассмотрим систему (42.4) при условии (42.8); тогда будем иметь

$$\begin{gathered}\Theta_0\dot{\bar{\omega}}+\bar{\omega}\times\Theta_0\bar{\omega}+\dot{\bar{\mathbf{q}}}+\bar{\omega}\times\bar{\mathbf{q}}=\bar{\mathbf{M}}_0,\\ \dot{\bar{\mathbf{q}}}+D\dot{\bar{\omega}}=[D\Theta_0^{-1}-E]\bar{\mathbf{M}}+\bar{\mathbf{M}}_0-\bar{\omega}\times\bar{\mathbf{q}}-D\Theta_0^{-1}(\bar{\omega}\times\Theta_0\bar{\omega}).\end{gathered} \tag{42.9}$$

Положим в системе (42.9)

$$\bar{\mathbf{M}}=\bar{\mu}+\bar{\mathbf{s}}_0\times\underset{\bar{\mathbf{s}}_0}{\operatorname{grad}}\, u, \tag{42.10}$$

где $\bar{\mu}$ — некоторый момент такой, что $\bar{\omega}\cdot\bar{\mu}=W$ есть отрицательно определенная функция вектора $\bar{\omega}$, а u есть положительно определенная функция компонент вектора $\bar{s}_0-\bar{r}_0$, например, $\bar{\mu}=-\bar{\omega}$, а $u=\frac{1}{2}(\bar{s}_0-\bar{r}_0)^2$; тогда (42.10) примет вид

$$\bar{M}=-\bar{\omega}+\bar{s}_0\times\bar{r}_0. \tag{42.11}$$

Легко видеть, что при выборе момента $\mathbf{M}$ в виде (42.11) система (42.9) будет иметь положение равновесия $\bar{\omega}=0$, $\bar{s}_0=\pm\bar{r}_0$, $\bar{q}=\bar{q}_0$, где $\bar{q}_0$ — постоянный вектор. Это положение равновесия соответствует тому случаю, когда тело T_0 не вращается, орт $\bar{r}_0$ коллинеарен $\bar{s}_0$, а тела T_j ($j=1, 2, 3$) находятся в равномерном вращении. Легко видеть, что других положений относительного покоя тело при таком управлении маховиками не имеет.

Формула (42.6) и момент (42.11) показывают, что рассмотрение поведения движения твердого тела T_0 можно осуществить, как и в § 39; с помощью функции

$$V=\frac{1}{2}[Ap^2+Bq^2+Cr^2+(\bar{s}_0-\bar{r}_0)^2],$$

причем будет

$$dV/dt=W=-\bar{\omega}^2.$$

Это обстоятельство приводит с помощью уже известных из § 39 рассуждений к полному доказательству утверждений теоремы 42.1.

Замечание. В формуле (42.8), если задан момент (42.11), все величины можно считать известными, если известны компоненты угловой скорости $\bar{\omega}$, компоненты вектора $\bar{q}$ и компоненты вектора $\bar{s}_0$ в системе $Oxyz$.

Для измерения этих величин необходимо в системе управления телом T_0 иметь специальные датчики, а именно: датчики угловых скоростей маховиков относительно тела T_0 и датчики угловых скоростей тела T_0 относительно его главных центральных осей, а также датчики проекций вектора $\bar{s}_0$ в системе $Oxyz$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть с телом T_0 каким-либо образом связана система материальных точек, положение которых по отношению к телу T_0 единственным образом определяется с помощью обобщенных координат $q_1, \ldots, q_k$. При этих предположениях уравнения движения можно записать в следующей форме:

$$\Theta\dot{\bar{\Omega}}+\bar{\Omega}\times\Theta\bar{\Omega}=\bar{M}+\bar{M}_k-\bar{M}_0, \tag{42.12}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j+(\dot{\Omega}, \bar{E}_j)+P_j+R_j, \quad j=1, \ldots, k,$$

где Θ — тензор инерции всей системы, рассматриваемой как единое твердое тело; T — кинетическая энергия относительных движений; M_k — момент кориолисовых сил инерции, M_0 — момент относительных количеств движений. Величины $P_j = P_j(q_1, \ldots, q_k, \Omega)$ зависят от центробежных сил, величины $R_j = R_j(q_1, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k, \Omega)$ зависят от кориолисовых сил инерции. Q_j — обобщенная сила, отнесенная к обобщенной координате q_j; $\overline{\mathbf{E}}_j$ — некоторый вектор, $\overline{\mathbf{E}}_j = \overline{\mathbf{E}}_j(q_1, \ldots, q_k)$; через $\mathbf{M}$ обозначен момент сил, действующих на систему.

Предположим, что выполнены следующие условия:

а) система (42.12) разрешима относительно компонент вектора $\dot{\overline{\Omega}}$ и величин $\ddot{q}_j$, так что имеем

$$\dot{\overline{\Omega}} = \overline{\mathbf{A}}_0 + \sum_{i=1}^{k} \overline{\mathbf{A}}_i Q_i,$$

$$\ddot{q}_j = b_{0j} + \sum_{i=1}^{k} b_{ji} Q_i, \quad j = 1, \ldots, k;$$

б) среди векторов $\overline{\mathbf{A}}_i$ существует три линейно назависимых.

Выберем обобщенные силы Q_j так, чтобы было выполнено соотношение

$$\Theta\overline{\mathbf{A}}_0 + \sum_{i=1}^{k} \Theta\overline{\mathbf{A}}_i Q_i + \overline{\Omega} \times \Theta\overline{\Omega} = \overline{\mathbf{M}}. \qquad (42.13)$$

Пусть теперь $\overline{\mathbf{s}}$ — орт, неизменный в абсолютном пространстве, и пусть $\overline{\mathbf{R}}$ — орт, неизменно связанный с телом T_0.

Теорема 42.2. *Если выполнены условия* а) *и* б) *и если обобщенные силы удовлетворяют соотношению* (42.13), *где* $\overline{\mathbf{M}} = -\overline{\Omega} + l\overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{S}}$, *то тело* T_0 *будет иметь положение относительного равновесия* $\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{S}}$, $\overline{\Omega} = 0$.

При этом каждое движение, не совпадающее с другим относительным равновесием $\overline{\mathbf{R}} = -\overline{\mathbf{S}}$, $\overline{\Omega} = 0$ *будет обладать свойством* $\overline{\mathbf{R}} \to \overline{\mathbf{S}}$, $\overline{\Omega} \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *при надлежащем выборе положительной постоянной* $l > 0$.

Теорема 42.3. *Если выполнены условия* а) *и* б) *и обобщенные силы удовлетворяют соотношению* (42.13), *где* $\overline{\mathbf{M}} = -(\overline{\Omega} - \overline{\Omega}_0) + \Theta\dot{\overline{\Omega}}_0 + \overline{\Omega}_0 \times \Theta\overline{\Omega} + l\overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{S}}_0$, $\overline{\mathbf{S}}_0$ — *орт, вращающийся в абсолютном пространстве с угловой скоростью* $\overline{\Omega}_0$, *то система* (42.12) *будет иметь положение относительного динамического равновесия*

$$\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{S}}_0, \quad \overline{\Omega} = \overline{\Omega}_0.$$

Каждое движение, не совпадающее с $\overline{R}=-\overline{S}_0$, $\overline{\Omega}=\overline{\Omega}_0$, *будет обладать свойством* $\overline{\Omega}\to\overline{\Omega}_0$, $\overline{R}\to\overline{S}_0$ *при* $t\to+\infty$ *при надлежащем выборе* $l>0$.

Теорема 42.4. *Если выполнены условия* а) *и* б) *и обобщенные силы удовлетворяют соотношению* (42.13), *где*

$$\overline{M}=-(\overline{\Omega}-\overline{S}\cdot(\overline{\Omega}\cdot\overline{S}))+l\overline{R}\times\overline{S},$$

то система (42.12) *будет иметь две системы относительных положений равновесия*:

$$\overline{R}=\overline{S},\quad \overline{\Omega}=\lambda\overline{S}\quad и\quad \overline{R}=-\overline{S},\ \overline{\Omega}=\mu\overline{S},$$

где λ *и* μ — *вещественные параметры. Каждое движение твердого тела* T_0, *не совпадающее с положениями относительного равновесия второй группы, будет обладать свойством* $\overline{R}\to\overline{S}$, $\overline{\Omega}\to\lambda\overline{S}$ *при* $t\to+\infty$ *при надлежащем выборе числа* $l>0$.

Доказательство приведенных утверждений осуществляется путем построения функции Ляпунова и использования первых интегралов системы (42.12).

§ 43. Решение задачи об ориентации осей тела с помощью маховиков

Пусть в системе $O\xi\eta\zeta$ заданы два постоянных ортогональных орта $\overline{s}_{01}$ и $\overline{s}_{02}$, положим $\overline{s}_{03}=\overline{s}_{01}\times\overline{s}_{02}$. Пусть с телом T_0 неизменно связано два ортогональных орта $\overline{r}_{01}$, $\overline{r}_{02}$, положим $\overline{r}_{03}=\overline{r}_{01}\times\overline{r}_{02}$. Требуется выбрать моменты, управляющие движением маховиков T_1, T_2, T_3 так, чтобы стабилизировать систему векторов $\overline{r}_{01}$, $\overline{r}_{02}$, $\overline{r}_{03}$ по отношению к системе векторов $\overline{s}_{01}$, $\overline{s}_{02}$, $\overline{s}_{03}$.

Теорема 43.1. *Существуют моменты, управляющие движением маховиков, такие, что тело* T_0 *либо будет находиться в положении относительного равновесия*:

$$\omega=0,\qquad s_{0i}=\pm r_{0i}\qquad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{43.1}$$

либо будет стремиться к положению относительного равновесия при неограниченном возрастании времени. При этом положении относительное равновесие

$$\overline{\omega}=0,\qquad \overline{s}_{0i}=\overline{r}_{0i}\qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{43.2}$$

асимптотически устойчиво, остальные положения равновесия из числа указанных в (43.1) *неустойчивы; других положений относительного равновесия, кроме* (43.1), *тело* T_0 *не имеет.*

Для доказательства этого утверждения положим в (42.9)

$$\overline{M}=\overline{\mu}+\sum_{i=1}^{3}\overline{s}_{0i}\times \operatorname{grad}_{\overline{s}_{0i}} u, \qquad (43.3)$$

где $\overline{\mu}$ — некоторый момент такой, что $\overline{\omega}\cdot\overline{\mu}=W$ есть отрицательно определенная функция компонент вектора $\overline{\omega}$, а u — положительно определенная функция компонент векторов $\overline{s}_{0i}$ и $\overline{r}_{0i}$. Например:

$$\overline{\mu}=-\overline{\omega}, \qquad u=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\overline{s}_{0i}-\overline{r}_{0i})^2. \qquad (43.4)$$

При условии (43.4) легко проверить, что тело T_0, кроме положений относительного равновесия (43.1), других положений относительного равновесия не имеет.

Анализ движения тела T_0 можно осуществить, опираясь на уравнение (42.6) так же, как это было сделано в § 40. При этом надо использовать функции

$$v=\frac{1}{2}\left[Ap^2+Bq^2+Cr^2+\sum_{i=1}^{3}(\overline{s}_{0i}-\overline{r}_{0i})^2\right].$$

Легко видеть, что будет $dv/dt=W=-\overline{\omega}^2$.

Замечание. Если существуют датчики, измеряющие проекции векторов $\overline{s}_{01}$, $\overline{s}_{02}$ на оси $Oxyz$, то для построения моментов, управляющих движением маховиков и удовлетворяющих условиям теоремы, можно не пользоваться датчиками угловых скоростей тела T_0 относительно осей $Oxyz$, так как

$$\overline{\omega}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\overline{s}_{0i}\times\dot{\overline{s}}_{0i}.$$

При этом датчики угловых скоростей маховиков относительно тела T_0 остаются необходимыми для реализации упомянутых управлений.

Пусть теперь трехвекторник $\overline{s}_{01}$, $\overline{s}_{02}$, $\overline{s}_{03}$ совершает вращательное движение как твердое тело вокруг неподвижной точки O с угловой скоростью $\overline{\omega}_1$. Требуется построить моменты, управляющие движением маховиков так, чтобы стабилизировать трехвекторник $\overline{r}_{01}$, $\overline{r}_{02}$, $\overline{r}_{03}$ в направлении $\overline{s}_{01}$, $\overline{s}_{02}$, $\overline{s}_{03}$. Обозначим через $\overline{\omega}_2$ угловую скорость тела T_0 при его действительном движении и через $\overline{\varkappa}_2$ значение вектора $\overline{\varkappa}$ в этом движении; тогда получим

из (42.9) систему уравнений

$$\begin{gathered}\Theta_0\dot{\bar\omega}_2+\bar\omega_2\times\Theta_0\bar\omega_2+\dot{\bar\varkappa}_2+\bar\omega_2\times\bar\varkappa_2=\bar{M}_0,\\ \dot{\bar\varkappa}_2+D\dot{\bar\omega}_2=[D\Theta_0^{-1}-E]\bar{M}+\bar{M}_0-\bar\omega_2\times\bar\varkappa_2-D\Theta_0^{-1}(\bar\omega_2\times\Theta\bar\omega_2).\end{gathered}\tag{43.5}$$

Положим в (43.5)

$$\bar{M}=\bar\mu+\Theta_0\dot{\bar\omega}_1+\bar\omega_1\times\Theta_0\bar\omega_2+\sum_{i=1}^{3}\bar{s}_{0i}\times\operatorname{grad}_{\bar{s}_{0i}}u,\tag{43.6}$$

где $\bar\mu$ — некоторый момент такой, что функция $(\bar\omega_2-\bar\omega_1)\bar\mu=W$ является отрицательно определенной относительно компонент вектора $\bar\omega_2-\bar\omega_1$ и функция u является положительно определенной относительно компонент векторов

$$\bar{s}_{0i}-\bar{r}_{0i}\qquad(i=1,\ 2,\ 3).$$

Покажем, что система (43.5) при управлении (43.6) имеет динамическое положение равновесия вида

$$\begin{aligned}&\bar\omega_2=\bar\omega_1,\qquad \bar{s}_{0i}=\pm\bar{r}_{0i}\qquad(i=1,\ 2,\ 3),\\ &\bar\varkappa_2=\bar\varkappa_1,\end{aligned}$$

где $\bar\varkappa_1$ есть некоторое решение уравнения

$$\dot{\bar\varkappa}_1+\bar\omega_1\times\bar\varkappa_1=\bar{M}_0-\Theta\dot{\bar\omega}_1-\bar\omega_1\times\Theta_0\bar\omega_1.\tag{43.7}$$

Покажем это; пусть для определенности

$$\bar\mu=-[\bar\omega_2-\bar\omega_1]\quad\text{и}\quad u=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\bar{s}_{0i}-\bar{r}_{0i})^2.$$

Подставляя в (43.5) вместо $\bar\omega_2$, $\bar\varkappa_2$ величины $\bar\omega_1$, $\bar\varkappa_1$ и учитывая уравнение (43.7), а также соотношения $\bar{s}_{0i}=\pm\bar{r}_{0i}$, приходим к тождествам.

Теорема 43.2. *При управлении*

$$\begin{gathered}\bar\Theta=[D\Theta_0^{-1}-E]\bar{M}+\bar{M}_0-\bar\omega_2\times\bar\varkappa_2-D\Theta_0^{-1}\bar\omega_2\times\Theta\bar\omega_2,\\ \bar{M}=\bar\mu+\Theta_0\dot{\bar\omega}_1+\bar\omega_1\times\Theta_0\bar\omega_2+\sum_{i=1}^{3}[\bar{s}_{0i}\times\operatorname{grad}_{\bar{s}_{0i}}u]\end{gathered}$$

тело T_0 либо находится в положении относительного динамического равновесия $\bar\omega_2=\bar\omega_1$, $\bar{s}_{0i}=\pm\bar{r}_{0i}$, либо неограниченно приближается к такому положению. При этом положение относительного динамического равновесия $\bar\omega_2=\bar\omega_1$, $\bar{s}_{0i}=\bar{r}_{0i}$ условно асимптотически устойчиво. Другие положения относительного динамического равновесия из указанных выше будут обязательно неустойчивы.

Доказательство. Пусть функции $\bar{\omega}_2$, $\bar{\varkappa}_2$, $\bar{s}_{0i}$ ($i=1, 2, 3$) описывают некоторое движение рассматриваемой системы тел. При этом функции $\bar{s}_{0i}$ удовлетворяют уревнениям

$$d\bar{s}_{0i}/dt = [\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2] \times \bar{s}_{0i} \qquad (i=1, 2, 3). \tag{43.8}$$

Вычтем из первого уравнения (43.5) второе уравнение системы (43.5). Тогда после некоторых преобразований получим

$$[E - D\Theta_0^{-1}][\Theta_0\dot{\bar{\omega}}_2 + \bar{\omega}_2 \times \Theta_0\bar{\omega}_2 - \bar{M}] = 0. \tag{43.9}$$

Через E здесь обозначена единичная матрица, а матрица $E - D\Theta_0^{-1}$ является неособой. Поэтому из (43.9) обязательно будем иметь

$$\Theta_0\dot{\bar{\omega}}_2 + \bar{\omega}_2 \times \Theta_0\bar{\omega}_2 = \bar{M}. \tag{43.10}$$

Сделаем в уравнении (43.10) замену

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega} + \bar{\omega}_1.$$

Тогда получим

$$\Theta_0\dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \Theta_0\bar{\omega}_2 = -\bar{\omega} + \sum_{i=1}^{3} \bar{r}_{0i} \times \bar{s}_{0i}. \tag{43.11}$$

Умножая обе части (43.11) скалярно на $\bar{\omega}$ и учитывая, что $\bar{\omega} \times \bar{s}_{0i} = -d\bar{s}_{0i}/dt$, найдем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[Ap + Bq + Cr^2 + \sum_{i=1}^{3} (\bar{s}_{0i} - \bar{r}_{0i})^2\right] = -\bar{\omega}^2. \tag{43.12}$$

Из (43.12), как и в § 40, найдем, что обязательно

$$\bar{\omega} \to 0 \quad \text{и} \quad s_{0i} \times \bar{r}_{0i} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{43.13}$$

и далее найдем, что положение $\bar{\omega}=0$, $\bar{s}_{0i} = \bar{r}_{0i}$ ($i=1, 2, 3$) асимптотически устойчиво по Ляпунову, следовательно, положение относительного динамического равновесия тела T_0 будет условно асимптотически устойчиво; при этом условность заключается в рассмотрении вопроса об устойчивости лишь по части координат.

И далее, любое положение относительного динамического равновесия $\bar{\omega}=0$, $\bar{s}_{0i} = \pm\bar{r}_{0i}$, отличное от (43.13), будет неустойчивым.

Замечание. Управляющие моменты, о которых идет речь в теореме 43.2, можно построить, не используя датчики угловых скоростей тела T_0, а используя лишь датчики угловых скоростей маховиков T_1, T_2, T_3 относительно тела T_0 и датчики проекций

векторов $\bar{s}_{01}$, $\bar{s}_{02}$ в системе $Oxyz$. Действительно, $\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_1-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\bar{s}_{0i}\times\dot{\bar{s}}_{0i}$, угловая скорость $\bar{\omega}_1$ трехвекторника $\bar{s}_{01}$, $\bar{s}_{02}$, $\bar{s}_{03}$ известна в проекциях на этот трехвекторник, следовательно, проекции $\bar{\omega}_1$ могут быть найдены также на оси $Oxyz$, так как матрица перехода A между этими системами координат имеет в качестве столбцов компоненты векторов $\bar{s}_{0i}$.

Остановимся теперь на решении задачи сканирования. Именно, предположим, что система $Oxyz$ совершает заданное движение по отношению к системе $O\xi\eta\zeta$ с угловой скоростью $\bar{\omega}$. Тогда вектор $\bar{s}_0$, занимающий неизменное положение по отношению к системе $O\xi\eta\zeta$, будет вращаться по отношению к наблюдателю, находящемуся в системе $Oxyz$, с угловой скоростью $-\bar{\omega}$, и будет единственным образом определяться в системе $Oxyz$ с помощью дифференциального уравнения

$$d\bar{s}_0/dt=-\bar{\omega}\times\bar{s}_0 \tag{43.14}$$

и своих начальных проекций при $t=0$.

Обозначим через $\bar{\sigma}_0(t)$ получающийся таким образом вектор. Обозначим, как и выше, через $\bar{\omega}_2$ и $\bar{\varkappa}_2$ действительное движение системы тел, через $\bar{s}_0(t)$ — вектор-столбец, образованный из проекции вектора $\bar{s}_0$ на оси $Oxyz$ при этом движении; тогда

$$d\bar{s}_0/dt=-\bar{\omega}_2\times\bar{s}_0. \tag{43.15}$$

Положим в (43.5)

$$\bar{M}=\bar{\mu}+\bar{\sigma}_0\times\bar{s}_0, \tag{43.16}$$

где $\bar{\mu}$ — некоторый момент, такой, что $(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1)\bar{\mu}=W$ — есть отрицательно определенная функция относительно компонент вектора $\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1$. Для определенности можно считать

$$\bar{\mu}=-(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1).$$

Теорема 43.3. *При управлении*

$$\dot{\bar{\Theta}}=[D\Theta_0^{-1}-E]\,\bar{M}+\bar{M}_0-\bar{\omega}_2\times\bar{\varkappa}_2-D\Theta_0^{-1}\bar{\omega}_2\times\Theta\bar{\omega}_2,$$
$$\bar{M}=\bar{\mu}+\bar{\sigma}_0\times\bar{s}_0$$

тело T_0 либо движется в режиме сканирования $\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_1$, $\bar{s}_0=\pm\bar{\sigma}_0$, либо стремится к такому движению. При этом движение $\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_1$, $\bar{s}_0=\bar{\sigma}_0$ условно асимптотически устойчиво. Движение $\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_1$, $\bar{s}_0=-\bar{\sigma}_0$ неустойчиво.

Доказательство теоремы 43.3 осуществляется тем же приемом, который был применен в теореме 43.2 и с использованием результатов § 40.

Замечание. Для решения задачи сканирования в предлагаемой форме в системе управления телом T_0 необходимо иметь датчики проекций угловых скоростей тела T_0 на оси $Oxyz$, датчики угловых скоростей маховиков и датчики проекций вектора $\bar{s}_0$.

Однако датчики проекций угловой скорости тела T_0 на оси $Oxyz$ можно исключить, если использовать датчики проекций двух векторов $\bar{s}_{01}$ и $\bar{s}_{02}$ на оси системы $Oxyz$.

§ 44. Цифровой навигационный автомат

Пусть задан некоторый объект, который представляет собой с механической точки зрения твердое тело. Введем в рассмотрение две системы координат: $O\xi\eta\zeta$ — неподвижную по отношению к Земле, и $Gxyz$ — неизменно связанную с упомянутым объектом. Точку O поместим в центре Земли. Плоскость $\xi O\eta$ есть плоскость экватора, ось $O\zeta$ направлена по оси Земли к северу, ось $O\xi$ лежит в плоскости нулевого меридиана, ось $O\eta$ — в плоскости меридиана расположенного на 90° восточной долготы. Система $O\xi\eta\zeta$ правая.

Точку G поместим в центре тяжести объекта. Если это корабль, то ось Gx направим в диаметральной плоскости в нос, ось в плоскости мидель-шпангоута — в левый борт и ось Gz — вверх. Положение объекта будет полностью определено, если будет известно расположение системы $Gxyz$ относительно системы $O\xi\eta\zeta$. Это расположение определяется единственным образом с помощью шести величин: ξ_0, η_0, ζ_0 (координат точки G в системе $O\xi\eta\zeta$) и величин ψ, θ, φ, являющихся углами Эйлера. Эти углы полностью определяют матрицу $A = a_{ij}$, i, $j = 1, 2, 3$, перехода из одной системы координат в другую, так что a_{ij} есть косинус угла между i-й осью системы $O\xi\eta\zeta$ и j-й осью $Gxyz$. Если какой-либо вектор $\mathbf{h}$ имеет компоненты h_x, h_y, h_z в системе $Gxyz$ и компоненты h_ξ, h_η, h_ζ в системе $O\xi\eta\zeta$, то будут иметь место соотношения

$$h_\xi = a_{11}h_x + a_{12}h_y + a_{13}h_z,$$
$$h_\eta = a_{21}h_x + a_{22}h_y + a_{23}h_z,$$
$$h_\zeta = a_{31}h_x + a_{32}h_y + a_{33}h_z.$$

Если в G провести оси $G\xi_1$, $G\eta_1$, $G\zeta_1$, параллельные осям $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, то, обозначив через G_n линию пересечения плоскости Gxy с плоскостью $G\xi_1\eta_1$, получим следующие углы: ψ — угол между $G\xi_1$ и G_n, θ — угол между $G\zeta_1$ и Gz, φ — угол между Gx

и G_n. Напомним, что угол ψ называется углом прецессии и отсчитывается от $G\xi_1$ против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления $G\zeta_1$. Угол θ или, точнее, его изменяемость, называется нутацией (θ — двугранный угол, образованный плоскостями Gxy и $G\xi_1\eta_1$ при ребре G_n, называемом линией узлов). Угол φ называется углом собственного вращения, отсчитывается от оси Gx против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси Gz. Предположим, что на борту рассматриваемого объекта находятся шесть измерительных приборов: три акcельрометра, оси которых направлены соответственно по осям x, y, z и три измерителя угловых скоростей объекта при вращении его вокруг осей Gx, Gy, Gz. Будем считать, что все эти приборы размещены в центре тяжести объекта. Обозначим через $\mathbf{w}$ ускорение центра тяжести и через $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения объекта около его центра тяжести. Через $\mathbf{w}_0$ обозначим вектор ускорения силы тяжести в точке G, через $\boldsymbol{\omega}_0$ — вектор угловой скорости вращения Земли. Положим

$$\mathbf{W}=\mathbf{w}+\mathbf{w}_0; \qquad \Omega=\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}_0. \tag{44.1}$$

Акселерометры будут измерять проекции $\mathbf{w}$ на оси Gx, Gy, Gz. Измерители угловых скоростей будут измерять проекции $\boldsymbol{\omega}$ на те же оси. Из (44.1) вытекает, что между проекциями вектора $\mathbf{w}$ на оси $Gxyz$ и $O\xi\eta\zeta$ будут иметь место зависимости

$$\begin{aligned} w_\xi &= a_{11}w_x+a_{12}w_y+a_{13}w_z,\\ w_\eta &= a_{21}w_x+a_{22}w_y+a_{23}w_z,\\ w_\zeta &= a_{31}w_x+a_{32}w_y+a_{33}w_z. \end{aligned} \tag{44.2}$$

В равенствах (44.2) величины w_x, w_y, w_z являются входными сигналами акселерометров и, следовательно, могут рассматриваться как заданные числа. Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} W_\xi &= w_\xi+w_{0\xi},\\ W_\eta &= w_\eta+w_{0\eta},\\ W_\zeta &= w_\zeta+w_{0\zeta}. \end{aligned} \tag{44.3}$$

В равенствах (44.3) величины $w_{0\xi}$, $w_{0\eta}$, $w_{0\zeta}$ суть проекции ускорения силы тяжести в точке G на оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Следовательно,

$$w_{0\xi}=-g\xi/\rho, \quad w_{0\eta}=-g\eta/\rho, \quad w_{0\zeta}=-g\zeta/\rho, \tag{44.4}$$

где $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$.

В равенствах (44.4) величина g есть численное значение ускорения силы тяжести. Соотношения (44.4) имеют место потому, что вектор ускорения силы тяжести направлен по радиусу OG

к центру Земли, а ξ; η, ζ есть компоненты вектора OG. Величины W_ξ, W_η, W_ζ представляют собой проекции ускорения вектора OG на оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, следовательно, $W_\xi=\ddot{\xi}$, $W_\eta=\ddot{\eta}$, $W_\zeta=\ddot{\zeta}$. Используя эти равенства, из (44.2) найдем

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}&=\frac{g\xi}{\rho}+a_{11}w_x+a_{12}w_y+a_{13}w_z,\\ \ddot{\eta}&=\frac{g\eta}{\rho}+a_{21}w_x+a_{22}w_y+a_{23}w_z,\\ \ddot{\zeta}&=\frac{g\zeta}{\rho}+a_{31}w_x+a_{32}w_y+a_{33}w_z. \end{aligned} \tag{44.5}$$

Как было отмечено выше, величины a_{ij} являются функциями углов ψ, θ, φ. Эти углы изменяются с течением времени. Введем дифференциальные уравнения, служащие для их определения. Эти уравнения получаются из рассмотрения связи показателей измерителей угловых скоростей с углами ψ, θ, φ и их производными. Обозначим через $\mathbf{n}_0$ единичный вектор, направленный по линии узлов G_n, через $\mathbf{z}_0$ — по оси Gz, через ζ_0 — по оси $G\zeta_1$. Тогда угловая скорость ω объекта может быть представлена в следующей форме:

$$\omega=\dot{\psi}\zeta_0+\dot{\theta}\mathbf{n}_0+\dot{\varphi}\mathbf{z}_0. \tag{44.6}$$

Угловая скорость вращения Земли $\omega_0=\zeta_0\alpha$, где α — численная величина угловой скорости, следовательно,

$$\Omega=(\dot{\psi}+\alpha)\,\zeta_0+\dot{\theta}\mathbf{n}_0+\dot{\varphi}\mathbf{z}_0. \tag{44.7}$$

Проектируя равенство (44.7) на оси Gx, Gy, Gz, найдем

$$\begin{aligned} \Omega_x&=(\dot{\psi}+\alpha)(\zeta_0\mathbf{x}_0)+\dot{\theta}(\mathbf{n}_0\mathbf{x}_0)+\dot{\varphi}(\mathbf{z}_0\mathbf{x}_0),\\ \Omega_y&=(\dot{\psi}+\alpha)(\zeta_0\mathbf{y}_0)+\dot{\theta}(\mathbf{n}_0\mathbf{y}_0)+\dot{\varphi}(\mathbf{z}_0\mathbf{y}_0),\\ \Omega_z&=(\dot{\psi}+\alpha)(\zeta_0\mathbf{z}_0)+\dot{\theta}(\mathbf{n}_0\mathbf{z}_0)+\dot{\varphi}(\mathbf{z}_0\mathbf{z}_0). \end{aligned} \tag{44.8}$$

Находя выражения скалярных произведений единичных векторов, входящих в (44.8), получим

$$\begin{aligned} \Omega_x&=(\dot{\psi}+\alpha)\,a_{31}+\dot{\theta}\cos\varphi,\\ \Omega_y&=(\dot{\psi}+\alpha)\,a_{32}+\dot{\theta}\sin\varphi,\\ \Omega_z&=(\dot{\psi}+\alpha)\,a_{33}+\dot{\varphi}, \end{aligned} \tag{44.9}$$

Выражая производные углов ψ, θ, φ через их значения и через выходные сигналы измерителей угловых скоростей, найдем

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\alpha + \frac{\Omega_x \sin\varphi - \Omega_y \cos\varphi}{a_{31}\sin\varphi - a_{32}\cos\varphi}, \\ \dot{\theta} &= \frac{a_{32}\Omega_x - a_{31}\Omega_y}{a_{32}\cos\varphi - a_{31}\sin\varphi}, \\ \dot{\varphi} &= \Omega_z - a_{33}\frac{\Omega_x \sin\varphi - \Omega_y \cos\varphi}{a_{31}\sin\varphi - a_{32}\cos\varphi}. \end{aligned} \tag{44.10}$$

Совокупная система уравнений (44.5) и (44.10) полностью определяет в пространстве положение рассматриваемого объекта в любой заданный момент времени на основе показателей измерителей ускорений и измерителей угловых скоростей, если только в некоторый момент, принимаемый за начальный ($t = t_0$), заданы девять величин ξ_0, η_0, ζ_0, $\dot{\xi}_0$, $\dot{\eta}_0$, $\dot{\zeta}$, ψ, θ, φ, которые характеризуют положение центра тяжести, его скорость в начальный момент времени и расположение осей, связанных с объектом по отношению к осям, фиксируемым в пространстве. Действительно, полученная система представляет собой систему шести дифференциальных уравнений, служащую для определения искомых функций ξ, η, ζ, ψ, θ, φ. В силу теоремы существования и единственности для систем дифференциальных уравнений, она имеет единственное решение, отвечающее указанным выше начальным условиям. Это решение и будет определять единственным образом положение рассматриваемого объекта в пространстве.

Пусть $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ — координаты центра тяжести объекта. Найдем расположение объекта по отношению к земной сфере. Пусть λ и δ есть географическая широта и долгота места, тогда точка, являющаяся проекцией центра тяжести на земную сферу, имеет следующие географические координаты:

$$\begin{aligned} \lambda &= \arccos\frac{\zeta}{\rho}, \\ \delta &= \arccos\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \end{aligned} \tag{44.11}$$

где ρ — расстояние от центра тяжести Земли до рассматриваемой точки.

Обозначим через H высоту точки G над земной поверхностью; тогда

$$H = \rho - R, \tag{44.12}$$

где R — радиус земной поверхности.

Формулы (44.11) и (44.12) дают положение центра тяжести объекта в географических координатах. Приведем теперь формулы, характеризующие ориентацию объекта по отношению к местному горизонту. Местный горизонт образуется плоскостью, перпендикулярной к местной вертикали, иначе говоря, к вектору OG. Найдем углы между осями Gx, Gy, Gz и этой плоскостью. Обозначим через θ угол между осью Gx и горизонтальной плоскостью, через γ — угол между осью Gy и горизонтальной плоскостью. Если рассматриваемый объект есть летательный аппарат, то это соответственно углы тангажа и крена.

Обозначим через $\mathbf{r}_0$ единичный вектор, направленный по вертикали вверх в точке G; тогда

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\xi\xi_0 + \eta\eta_0 + \zeta\zeta_0}{\rho}. \tag{44.13}$$

Угол θ может быть определен как дополняющий до прямого угол между осью Gx и вертикалью; следовательно,

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos(\mathbf{x}_0\mathbf{r}_0) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{a_{11}\xi + a_{21}\eta + a_{31}\zeta}{\rho}, \tag{44.14}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \arccos(\mathbf{y}_0\mathbf{r}_0) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{32}\zeta}{\rho}. \tag{44.15}$$

Для полной характеристики ориентации объекта введем еще угол рыскания ψ, определив его как угол между проекцией оси Gx на плоскость горизонта и направлением на север. Найдем выражение этого угла через координаты центра тяжести и эйлеровы углы, выражающие ориентацию осей объекта в абсолютной системе координат. Векторное произведение $(\mathbf{r}_0 \times \zeta)$ дает вектор, перпендикулярный к плоскости меридиана места и направленный по параллели на запад. Двойное векторное произведение $(\mathbf{r}_0 \times \zeta_0) \times \mathbf{r}_0$ дает вектор, направленный на север и лежащий в плоскости горизонта. Обозначим этот вектор через $\mathbf{a}$. Вектор $(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{x}_0)$ лежит в плоскости горизонта и перпендикулярен векторам $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{x}_0$, следовательно, вектор $(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{x}_0) \times \mathbf{r}_0$ лежит в плоскости горизонта и направлен по линии проекции оси Gx на эту плоскость.

Обозначим этот вектор через $\mathbf{b}$; тогда будем иметь

$$\psi = \arccos\frac{(\mathbf{ab})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Воспользуемся правилом вычисления двойного векторного произведения

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$$

для отыскания векторов a, b и их длин:

$$\mathbf{a} = -(\mathbf{r}_0(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\zeta}_0) - \boldsymbol{\zeta}_0),$$
$$\mathbf{b} = -(\mathbf{r}_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{x}_0) - \boldsymbol{\zeta}_0),$$
$$(\mathbf{ab}) = (\boldsymbol{\zeta}_0\mathbf{x}_0) - (\mathbf{r}_0\mathbf{x}_0)(\mathbf{r}_0\boldsymbol{\zeta}_0) = a_{31} - \frac{\xi}{\rho^2}(a_{11}\xi + a_{21}\eta + a_{31}\zeta),$$
$$|\mathbf{a}|^2 = 1 + (\mathbf{r}_0\boldsymbol{\zeta}_0)^2 - 2(\mathbf{r}_0\boldsymbol{\zeta}_0)^2 = 1 - (\mathbf{r}_0\boldsymbol{\zeta}_0)^2 = 1 - \frac{\zeta^2}{\rho^2},$$
$$|\mathbf{b}|^2 = 1 - (\mathbf{r}_0\mathbf{x}_0)^2 = 1 - \frac{(a_{11}\xi + a_{21}\eta + a_{31}\zeta)^2}{\rho^2}.$$

Следовательно, для угла ψ имеем формулу

$$\psi = \arccos\left(a_{31} - \frac{\zeta}{\rho^2}(a_{11}\xi + a_{21}\eta + a_{31}\zeta)\right)\times$$
$$\times\left(1 - \frac{\zeta^2}{\rho^2}\right)^{-1/2}\left(1 - \frac{(a_{11}\xi + a_{21}\eta + a_{31}\zeta)^2}{\rho^2}\right)^{-1/2}. \quad (44.16)$$

Формулы (44.11)—(44.16) позволяют единственным образом определить положение центра тяжести объекта в земной системе координат λ, δ, H, а также определить единственным образом ориентацию его осей по отношению к местной вертикали и направлению на север. В некоторых случаях эти величины полезно определять непосредственно по показаниям аксельрометров и измерителей угловых скоростей. Для того чтобы иметь возможность проводить такое определение, выведем систему уравнений, связывающую непосредственно показания датчиков ускорений и угловых скоростей с указанными шестью величинами. Построим с этой целью оси $G\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta}$, ось $G\bar{\xi}$ направим на север, $G\bar{\eta}$ на запад и $G\bar{\zeta}$ по местной вертикали. Плоскость $\bar{\xi}G\bar{\eta}$ является плоскостью местного горизонта. Чтобы получить представление об углах ψ, θ, φ, представим себе, что система $Gxyz$ совпадает с системой $G\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta}$. Повернем систему $Gxyz$ вокруг оси $G\bar{\zeta}$ на угол ψ. Линию, перпендикулярную к новому положению оси Gx, обозначим через $G\bar{n}$ и будем называть линией узлов. Повернем далее систему на угол θ вокруг линии узлов и затем на угол γ вокруг полученного направления оси Gx. Пусть $\bar{\mathbf{n}}_0$ есть единичный вектор, направленный по линии узлов. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ объекта при вращении его около центра тяжести представляется в виде суммы трех угловых скоростей при вращении вокруг осей $G\bar{\zeta}$, $G\bar{n}$, $G\bar{x}$, следовательно,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\bar{\boldsymbol{\zeta}}_0 + \dot{\theta}\bar{n}_0 + \dot{\gamma}\mathbf{x}_0,$$

где $\bar{\zeta}_0$ — единичный вектор, направленный по оси $G\bar{\zeta}$. Обозначим через B матрицу $\{b_{ij}\}$, i, $j = 1, 2, 3$, где b_{ij} есть косинус угла

между i-й осью системы $G\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta}$ и j-й осью системы $Gxyz$. Пусть далее матрица $C=\{c_{ij}\}$, i, $j=1, 2, 3$, дает матрицу перехода из абсолютной системы $O\xi\eta\zeta$ в систему $G\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta}$, так что c_{ij} есть косинус угла между i-й осью системы $O\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta}$ и j-й осью системы $G\xi\eta\zeta$. Ясно, что $A=CB$, где A — матрица перехода из системы $Gxyz$ в систему $O\xi\eta\zeta$. Следовательно, имеем

$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{3} c_{ik}b_{kj}.$$

Единичный вектор $\bar{\mathbf{n}}_0$, направленный по линии узлов, можно представить в форме

$$\bar{\mathbf{n}}_0=\bar{\xi}_0\sin\psi-\bar{\mathbf{n}}_0\cos\psi,$$

тогда

$$\omega_x=(\omega x_0)=\dot{\psi}b_{31}+\dot{\theta}(b_{11}\sin\psi-b_{21}\cos\psi)+\dot{\gamma},$$
$$\omega_y=(\omega y_0)=\dot{\psi}b_{32}+\dot{\theta}(b_{12}\sin\psi-b_{22}\cos\psi),$$
$$\omega_z=(\omega z_0)=\dot{\psi}b_{33}+\dot{\theta}(b_{13}\sin\psi-b_{23}\cos\psi).$$

Угловая скорость вращения Земли представляется вектором $\omega_0=\alpha\zeta_0$; отсюда имеем

$$\omega_{0x}=\alpha a_{31},\qquad \omega_{0y}=\alpha a_{32},\qquad \omega_{0z}=\alpha a_{33}.$$

Положим, как и выше, $\Omega=\omega+\omega_0$, тогда

$$\Omega_x=\omega_x+\omega_{0x},\quad \Omega_y=\omega_y+\omega_{0y},\quad \Omega_z=\omega_z+\omega_{0z}.$$

Из этих уравнений находим

$$\dot{\psi}=\frac{(\Omega_y-\omega_{0y})(b_{13}\sin\psi-b_{23}\cos\psi)-(\Omega_z-\omega_{0z})(b_{12}\sin\psi-b_{22}\cos\psi)}{b_{32}(b_{13}\sin\psi-b_{23}\cos\psi)-b_{33}(b_{12}\sin\psi-b_{22}\cos\psi)},$$

$$\dot{\theta}=\frac{(\Omega_y-\omega_{0y})b_{33}-(\Omega_z-\omega_{0z})b_{32}}{b_{32}(b_{13}\sin\psi-b_{23}\cos\psi)-b_{33}(b_{12}\sin\psi-b_{22}\cos\psi)},$$

$$\dot{\gamma}=(\Omega_x-\omega_{0x})-$$
$$-b_{31}\cdot\frac{(\Omega_y-\omega_{0y})(b_{13}\sin\psi-b_{23}\cos\psi)-(\Omega_z-\omega_{0z})(b_{12}\sin\psi-b_{22}\cos\psi)}{b_{32}(b_{13}\sin\psi-b_{23}\cos\psi)-b_{33}(b_{12}\sin\psi-b_{22}\cos\psi)}-$$
$$-(b_{11}\sin\psi-b_{21}\cos\psi)\frac{(\Omega_y-\omega_{0y})b_{33}-(\Omega_z-\omega_{0z})b_{32}}{b_{32}(b_{13}\sin\psi-b_{23}\cos\psi)-b_{33}(b_{12}\sin\psi-b_{22}\cos\psi)}.$$

Будем считать, как и выше, что Земля сферическая и ее радиус R; тогда

$$\begin{aligned}\rho&=R+H,\\ \xi&=(R+H)\sin\lambda,\\ \eta&=(R+H)\cos\lambda\cos\delta,\\ \zeta&=(R+H)\cos\lambda\sin\delta.\end{aligned}\qquad(44.17)$$

Из этих равенств найдем дифференциальные уравнения для определения функций λ, δ, H, используя (44.5)

$$
\begin{gathered}
((R+H)\sin\lambda)'' = \sin\lambda g + \omega_x \sum_{k=1}^{3} c_{3k} b_{k1} + \omega_y \sum_{k=1}^{3} c_{3k} b_{k2} + \omega_z \sum_{k=1}^{3} c_{3k} b_{k3}, \\
((R+H)\cos\lambda\cos\delta)'' = \\
= \cos\lambda\cos\delta g + \omega_x \sum_{k=1}^{3} c_{1k} b_{k1} = \omega_y \sum_{k=1}^{3} c_{1k} b_{k2} + \omega_z \sum_{k=1}^{3} c_{1k} b_{k3}, \qquad (44.18) \\
((R+H)\cos\lambda\sin\delta)'' = \cos\lambda\sin\delta g + \omega_x \sum_{k=1}^{3} c_{2k} b_{k1} + \\
+ \omega_y \sum_{k=1}^{3} c_{2k} b_{k2} + \omega_z \sum_{k=1}^{3} c_{2k} b_{k3}.
\end{gathered}
$$

Система уравнений (44.17)—(44.18) позволяет по сигналам датчиков ускорений и датчиков угловых скоростей однозначно определить положение объекта и его ориентацию в местной системе координат, если заданы в некоторый момент положение его центра тяжести и ориентация его осей, а именно,

$$\lambda,\ \delta,\ H,\ \dot\lambda,\ \dot\delta,\ \dot H,\ \psi_0,\ \theta_0,\ \gamma_0.$$

Управление объектов в некоторых случаях осуществляется по боковому отклонению, отсчитываемому от некоторой плоскости, поэтому в данном случае полезно использовать уравнения движения, выведенные непосредственно для такого отклонения.

§ 45. Определение направляющих косинусов связанных осей

Пусть заданы системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$. Система $Oxyz$ является абсолютной, а система $Ox'y'z'$ связана с объектом, ориентация которого определяется. Обозначим через $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$ и $\bar{x}_0'$, $\bar{y}_0'$, $\bar{z}_0'$ орты осей соответственно абсолютной и связанной систем координат. Через a_{ij} обозначим косинус угла между i-й осью связанной системы координат и j-й осью абсолютной системы. Тогда будем иметь

$$a_{11} = (\bar{x}_0', \bar{x}_0) \quad a_{12} = (\bar{x}_0', \bar{y}_0) \quad a_{13} = (\bar{x}_0', \bar{z}_0), \qquad (45.1)$$

$$a_{21} = (\bar{y}_0', \bar{x}_0) \quad a_{22} = (\bar{y}_0', \bar{y}_0) \quad a_{23} = (\bar{y}_0', \bar{z}_0), \qquad (45.2)$$

$$a_{31} = (\bar{z}_0', \bar{x}_0) \quad a_{32} = (\bar{z}_0', \bar{y}_0) \quad a_{33} = (\bar{z}_0', \bar{z}_0). \qquad (45.3)$$

Введем в рассмотрение векторы $\bar{S}$ и $\bar{H}$.

Обозначим через s_i, h_i и s_i', h_i' $(i=1, 2, 3)$ компоненты векторов $\bar{S}$ и $\bar{H}$ соответственно в абсолютной и связанной системах

координат. Векторы $\overline{S}$ и $\overline{H}$ в абсолютной системе координат могут быть представлены равенствами

$$\overline{S} = s_1\overline{x}_0 + s_2\overline{y}_0 + s_3\overline{z}_0, \tag{45.4}$$

$$\overline{H} = h_1\overline{x}_0 + h_2\overline{y}_0 + h_3\overline{z}_0. \tag{45.5}$$

Положим

$$\overline{N} = \overline{S} \times \overline{H}. \tag{45.6}$$

Тогда, обозначая, как и выше, компоненты вектора $\overline{N}$ в абсолютной системе координат через n_1, n_2, n_3, будем иметь

$$\overline{N} = n_1\overline{x}_0 + n_2\overline{y}_0 + n_3\overline{z}_0. \tag{45.7}$$

Умножая обе части равенств (45.4), (45.5) и (45.7) скалярно на вектор $\overline{x}_0'$ и учитывая соотношение (45.1), найдем

$$\begin{aligned} s_1' &= s_1a_{11} + s_2a_{12} + s_3a_{13}, \\ h_1' &= h_1a_{11} + h_2a_{12} + h_3a_{13}, \\ n_1' &= n_1a_{11} + n_2a_{12} + n_3a_{13}. \end{aligned} \tag{45.8}$$

Выражения (45.8) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений для определения направляющих косинусов оси Ox' связанной системы координат в абсолютной системе.

Легко видеть, что направляющие косинусы i-й оси связанной системы будут удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} s_i' &= s_1a_{i1} + s_2a_{i2} + s_3a_{i3}, \\ h_i' &= h_1a_{i1} + h_2a_{i2} + h_3a_{i3}, \\ n_i' &= n_1a_{i1} + n_2a_{i2} + n_3a_{i3} \\ & (i = 1,\ 2,\ 3). \end{aligned} \tag{45.9}$$

Здесь n_i' $(i=1,\ 2,\ 3)$ — проекции вектора $\overline{N}$ на оси связанной системы координат.

Найдем численное выражение определителя системы (45.9). Раскрывая определитель этой системы по последней строке, найдем

$$\Delta = n_1(s_2h_3 - h_2s_3) - n_2(s_1h_3 - h_1s_3) + n_3(s_1h_2 - h_1s_2) = N^2. \tag{45.10}$$

Таким образом, определитель системы (45.9) отличен от нуля тогда и только тогда, когда векторы $\overline{S}$ и $\overline{H}$ неколлинеарны.

Решим систему (45.9), для чего построим ее обратную матрицу. Обозначим через B матрицу системы (45.9). Тогда ее обратная матрица $C = B^{-1}$ определяется следующим образом. Элемент c_{ij} равен алгебраическому дополнению элемента b_{ij}

матрицы B, разделенному на определитель матрицы B. Отсюда легко видеть, что матрица C может быть представлена в виде

$$C=\frac{1}{\mathrm{N}^2}(\overline{\mathrm{H}}\times\overline{\mathrm{N}},\ \overline{\mathrm{N}}\times\overline{\mathrm{S}},\ \overline{\mathrm{N}}). \tag{45.11}$$

Это означает, что первый столбец матрицы C состоит из компонент вектора $\overline{\mathrm{H}}\times\overline{\mathrm{N}}$, взятых в абсолютной системе координат, второй столбец—из компонент вектора $\overline{\mathrm{N}}\times\overline{\mathrm{S}}$, взятых в той же системе, и, наконец, третий столбец—из компонент вектора $\overline{\mathrm{N}}$.

С помощью матрицы C направляющие косинусы осей можно представить в следующей форме:

$$\mathrm{A}_i=C\mathrm{F}_i,$$

где

$$\mathrm{A}_i=\begin{pmatrix}a_{i1}\\ a_{i2}\\ a_{i3}\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathrm{F}_i=\begin{pmatrix}s_i'\\ h_i'\\ n_i'\end{pmatrix}. \tag{45.12}$$

Дадим запись направляющих косинусов в скалярной форме. Для этого вычислим векторы $\overline{\mathrm{H}}\times\overline{\mathrm{N}}$ и $\overline{\mathrm{N}}\times\overline{\mathrm{S}}$:

$$\overline{\mathrm{H}}\times\overline{\mathrm{N}}=\overline{\mathrm{H}}\times(\overline{\mathrm{S}}\times\overline{\mathrm{H}})=\overline{\mathrm{S}}\mathrm{H}^2-\overline{\mathrm{H}}(\overline{\mathrm{H}}\cdot\overline{\mathrm{S}})=\Theta(\mathrm{H})\,\overline{\mathrm{S}}, \tag{45.13}$$

где $\Theta(\mathrm{H})$—матрица:

$$\Theta(\mathrm{H})=E\mathrm{H}^2-\overline{\mathrm{H}}\overline{\mathrm{H}}^*,$$

где H^* означает транспонирование вектора $\overline{\mathrm{H}}$, так что

$$\Theta(\mathrm{H})=\begin{pmatrix}h_2^2+h_3^2 & -h_1h_2 & -h_1h_3\\ -h_2h_1 & h_1^2+h_3^2 & -h_2h_3\\ -h_3h_1 & -h_3h_2 & h_1^2+h_2^2\end{pmatrix}. \tag{45.14}$$

Аналогично имеем

$$\overline{\mathrm{N}}\times\overline{\mathrm{S}}=(\overline{\mathrm{S}}\times\overline{\mathrm{H}})\times\overline{\mathrm{S}}=\overline{\mathrm{S}}\times(\overline{\mathrm{H}}\times\overline{\mathrm{S}})=\Theta(\mathrm{S})\cdot\overline{\mathrm{H}}. \tag{45.15}$$

Из выражений (45.12)—(45.15) имеем

$$a_{i1}\mathrm{N}^2=s_i'[s_1(h_2^2+h_3^2)-s_2(h_1\cdot h_2)-s_3(h_1\cdot h_3)]+\\ +h_i'[h_1(s_2^2+s_3^2)-h_2(s_1\cdot s_2)-h_3(s_1\cdot s_3)]+n_i'[s_2h_3-s_3h_2], \tag{45.16}$$

$$a_{i2}\mathrm{N}^2=s_i'[-s_1h_2h_1+s_2(h_1^2+h_3^2)-s_3h_2\cdot h_3]+\\ +h_i'[-h_1s_2s_1+h_2(s_1^2+s_3^2)-h_3s_2s_3]+n_i'[s_3h_1-s_1h_3], \tag{45.17}$$

$$a_{i3}\mathrm{N}^2=s_i'[-s_1h_3h_1-s_2h_3h_2+s_3(h_1^2+h_2^2)]+\\ +h_i'[-h_1s_3s_1-h_2s_3s_2+h_3(s_1^2+s_2^2)]+n_i'[s_1h_2-s_2h_1] \quad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{45.18}$$

Формулы (45.16)—(45.18) дают направляющие косинусы i-й оси связанной системы координат в абсолютной системе.

Произведем некоторые преобразования этих формул. С этой целью положим

$$a = \frac{(\overline{S}\cdot\overline{H})}{|\overline{S}|\cdot|\overline{H}|}, \quad \overline{\sigma} = \overline{S} - |\overline{S}|\cdot a\cdot\frac{\overline{H}}{|\overline{H}|}.$$

Величина a является косинусом угла между $\overline{S}$ и $\overline{H}$, вектор $\overline{\sigma}$ ортогонален вектору $\overline{H}$: $(\overline{\sigma}\cdot\overline{H}) = 0$, и векторное произведение $\overline{\sigma}\times\overline{H}$ дает введенный выше вектор $\overline{N}$, т. е. $\overline{\sigma}\times\overline{H} = \overline{N}$.

Заменим всюду в предыдущих формулах векторы $\overline{S}$, $\overline{H}$, $\overline{N}$ на векторы $\overline{\sigma}$, $\overline{H}$, $\overline{N}$. Тогда будем иметь

$$\overline{H}\times\overline{N} = \overline{\sigma}H^2, \quad \overline{N}\times\overline{\sigma} = \overline{H}\sigma^2.$$

Из выражения (45.12) имеем

$$a_{ij} = \frac{1}{|\overline{S}|^2\,|\overline{H}|^2\,(1-a^2)}\left(H^2\sigma_i'\sigma_j + |\overline{S}|^2\,(1-a^2)\,h_i'h_j + n_i'n_j\right)$$
$$(i = 1,\ 2,\ 3;\quad j = 1,\ 2,\ 3). \qquad (45.19)$$

В формуле (45.19) использовано равенство

$$N^2 = \sigma^2\,|\overline{H}|^2 \quad \text{и} \quad \sigma^2 = |\overline{S}|^2\,(1-a^2).$$

Следует иметь в виду, что в (45.19) σ_i' и σ_j определяются по формулам

$$\sigma_i' = s_i' - \frac{|\overline{S}|\,ah_i'}{|\overline{H}|}, \quad \sigma_j = s_j - \frac{|\overline{S}|\,ah_j}{|\overline{H}|}.$$

§ 46. Определение углов крена, рыскания, тангажа

Определим угол рыскания ψ как угол между проекцией оси Ox' на плоскость xz и осью Ox. Угол тангажа θ определим как угол между этой проекцией и осью Ox'. Угол крена γ определим как угол между осью Oy и ее проекцией на плоскость, проходящую через Ox' и Oy. Представим эти углы через проекции векторов $\overline{S}$ и $\overline{H}$ в абсолютной и связанной системах координат.

Обозначим через $\overline{n}_0$ орт линии узлов

$$\overline{n}_0 = \frac{\overline{x}_0'\times\overline{y}_0}{|\overline{x}_0'\times\overline{y}_0|},$$

тогда

$$\psi = \arccos(\overline{z}_0,\ \overline{n}_0),$$

откуда находим

$$\psi = \arccos\frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{13}^2}} = \arccos\frac{a_{11}}{\sqrt{1-a_{12}^2}}. \qquad (46.1)$$

Легко видеть также, что

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{13}^2}} = \operatorname{arctg}\frac{a_{12}}{\sqrt{1-a_{12}^2}}. \tag{46.2}$$

Аналогично имеем

$$\gamma = \arccos\frac{a_{22}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{13}^2}} = \arccos\frac{a_{22}}{\sqrt{1-a_{12}^2}} = \arccos\frac{a_{22}}{\sqrt{a_{22}^2+a_{32}^2}}. \tag{46.3}$$

Воспользуемся формулами (45.16)—(45.18) для выражения углов крена, рыскания, тангажа через проекции векторов $\overline{S}$ и $\overline{H}$. Тогда получим

$$\begin{aligned}\psi = \arccos\big[\{&s_1'[s_1(h_2^2+h_3^2)-s_2h_1h_2-s_3h_1h_3]+\\ &+h_1'[h_1(s_2^2+s_3^2)-h_2s_1s_2-h_3s_1s_3]+\\ &+n_1'[s_2h_3-h_2s_3]\}\cdot\{N^4-\{s_1'[-s_1h_2h_1+s_2(h_1^2+h_3^2)-s_3h_2h_3]+\\ &+h_1'[-h_1s_2s_1+h_2(s_1^2+s_3^2)-h_3s_2s_3]+n_1'[s_3h_1-s_1h_3]\}^2\}^{-1/2}\big];\end{aligned} \tag{46.4}$$

$$\begin{aligned}\theta = \operatorname{arctg}\big[\{&s_1'[-s_1h_2h_1+s_2(h_1^2+h_3^2)-s_3h_2h_3]+\\ &+h_1'[-h_1s_2s_1+h_2(s_1^2+s_3^2)-h_3s_2s_3]+\\ &+n_1'[s_3h_1-s_1h_3]\}\{N^4-[s_1'(-s_1h_2h_1+s_2(h_1^2+h_3^2)-s_3h_2h_3)+\\ &+h_1'(-h_1s_2s_1+h_2(s_1^2+s_3^2)-h_3s_2s_3)+n_1'(s_3h_1-s_1h_3)]^2\}^{-1/2}\big];\end{aligned} \tag{46.5}$$

$$\begin{aligned}\gamma = \arccos\big[\{&s_2'(-s_1h_2h_1+s_2(h_1^2+h_3^2)-s_3h_2h_3)+\\ &+h_2'(-h_1s_2s_1+h_2(s_1^2+s_3^2)-h_3s_2s_3)+\\ &+n_2'(s_3h_1-h_3s_1)\}\{N^4-[s_1'(-s_1h_2h_1+s_2(h_1^2+h_3^2)-s_3h_2h_3)+\\ &+h_1'(-h_1s_2s_1+h_2(s_1^2+s_3^2)-h_3s_2s_3)+n_1'(s_3h_1-h_3s_1)]^2\}^{-1/2}\big].\end{aligned} \tag{46.6}$$

Следует иметь в виду, что формулы (46.1)—(46.3) не позволяют однозначно определять величину углов рыскания и крена. Поэтому остановимся несколько подробнее на способе уничтожения этой неоднозначности. Прежде всего установим начало отсчета и промежутки изменения углов ψ, θ и γ. Если представить себе, что системы $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ совпадают, то угол рыскания ψ можно определить как угол поворота системы $Ox'y'z'$ вокруг оси Oy против часовой стрелки. При этом ось Oz' займет положение On (линия узлов). Следовательно, угол ψ отсчитывается от оси Ox в плоскости xOz против часовой стрелки и меняется от 0 до 2π. Таким образом, формула (46.1) дает: $\psi\in[0,\ \pi]$, если $a_{13}<0$, и $\psi\in[\pi, 2\pi]$, если $a_{13}>0$. Повернем вторично систему $Ox'y'z'$ вокруг оси On на угол θ против часовой стрелки.

Таким образом, если ось Ox' будет находиться над плоскостью Oxz, то $\theta\in[0,\ \pi/2]$. Если же ось Ox' находится в плоскости Oxz или под ней, то $\theta\in[0,\ -\pi/2]$. Формула (46.2) дает однозначно значение угла тангажа. Следовательно, угол меняется в пределах

$$\theta\in[-\pi/2,\ \pi/2].$$

Повернем далее систему $Ox'y'z'$ на угол γ вокруг оси Ox'. Последний поворот совмещает связанную систему с ее положением в абсолютной системе координат, определяемой углами ψ, θ, γ. Формула (46.3) определяет угол γ также неоднозначно. Будем считать, что $\gamma \in [0, \pi]$, если вектор $\overline{y_0'}$ лежит справа от плоскости $x'Oy$, и $\gamma \in [\pi, 2\pi]$, если вектор $\overline{y_0'}$ лежит слева от плоскости $x'Oy$ для наблюдателя, смотрящего по направлению оси Ox'. Приняв это соглашение, следует считать:

1) $\gamma \in [0, \pi]$ при условии $a_{23} > 0$ и $\psi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ или $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ или $a_{23} < 0$ и $\psi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$;

2) $\gamma \in [0, -\pi]$, если $a_{23} < 0$ и $\psi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ или $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$, либо $a_{23} > 0$ и $\psi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.

§ 47. Точность определения положения при двухвекторной системе контроля

В общем случае компоненты векторов $\overline{S}$ и $\overline{H}$ как в абсолютной, так и в связанной системах координат являются случайными величинами с заданными функциями распределения. Следовательно, направляющие косинусы a_{ij} связанной системы координат также будут случайными величинами, а потому станут случайными углы крена, рыскания и тангажа.

В общем случае определить законы распределения величин или углов ψ, θ, γ не представляется возможным, однако всегда можно указать методы вычисления средних значений этих величин и среднеквадратичных отклонений.

Таким образом, можно будет оценить точность ориентации рассматриваемого объекта, причем эту точность можно определить в зависимости от погрешности бортовых приборов и моделей физических векторов $\overline{S}$ и $\overline{H}$ как по отдельности, как и в совокупности. Будем считать, что компоненты векторов $\overline{S}$ и $\overline{H}$ можно представить в форме

$$s_i = s_i^0 + x_i, \quad s_i' = s_i'^0 + x_i',$$
$$h_i = h_i^0 + y_i, \quad h_i' = h_i'^0 + y_i' \qquad (i = 1, 2, 3),$$

где s_i^0, h_i^0, $s_i'^0$, $h_i'^0$ — детерминированные величины, а x_i, y_i, x_i', y_i' — случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и заданными дисперсиями. Будем считать, например, что все эти величины распределены по нормальному закону и независимы между собой. В разложении величин a_{ij} по их степеням удержим лишь члены, линейные относительно x_i', y_i', x_i, y_i. Тогда

будем иметь

$$a_{ij}=a_{ij}^0+\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial s_k}x_k+\frac{\partial a_{ij}}{\partial h_k}y_k+\frac{\partial a_{ij}}{\partial s_k'}x_k'+\frac{\partial a_{ij}}{\partial h_k'}y_k'\right)\quad (i,j=1,2,3).\quad(47.1)$$

Правая часть выражения (47.1) представляет собой случайную величину с нормальным законом распределения. Таким образом, приближенно можно считать, что средние значения величин a_{ij} определяются формулами (45.16)—(45.18), если входящие в эти формулы величины заменить их средними значениями:

$$s_i^0,\ h_i^0,\ s_i'^0,\ h_i'^0\qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Дисперсии величин a_{ij} будут тогда определяться формулами

$$D(a_{ij})=\sum_{k=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial s_k}\right)^2 D(x_k)+\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial h_k}\right)^2 D(y_k)+\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial s_k'}\right)^2 D(x_k')+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial h_k'}\right)^2 D(y_k')\right]\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3).\quad(47.2)$$

Частные производные, входящие в формулы (47.1), (47.2), вычисляются при средних значениях компонент векторов $\overline{\mathbf{S}}$ и $\overline{\mathbf{H}}$. Если считать, что модель поля идеальна, т. е.

$$D(x_i)=0\quad \text{и}\quad D(y_i)=0\quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

то формула (47.2) будет давать квадрат средней ошибки, возникающей вследствие неточной работы бортовых приборов. Если считать, что бортовые приборы идеальные или что их погрешность исчезающе мала

$$D(x_i')=D(y_i')=0\qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

то формула (47.2) будет давать квадрат средней ошибки возникающей из-за неточности физической модели, дающей векторы $\overline{\mathbf{S}}$ и $\overline{\mathbf{H}}$.

Подобным же образом можно определить точность ориентации по отношению к углам крена, рыскания, тангажа. Ограничиваясь в разложениях величин ψ, θ, γ первыми членами относительно погрешностей, найдем

$$\begin{aligned}
\psi&=\psi_0+\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\psi}{\partial s_i}x_i+\frac{\partial\psi}{\partial h_i}y_i+\frac{\partial\psi}{\partial s_i'}x_i'+\frac{\partial\psi}{\partial h_i'}y_i'\right],\\
\theta&=\theta_0+\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\theta}{\partial s_i}x_i+\frac{\partial\theta}{\partial h_i}y_i+\frac{\partial\theta}{\partial s_i'}x_i'+\frac{\partial\theta}{\partial h_i'}y_i'\right],\qquad(47.3)\\
\gamma&=\gamma_0+\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\gamma}{\partial s_i}x_i+\frac{\partial\gamma}{\partial h_i}y_i+\frac{\partial\gamma}{\partial s_i'}x_i'+\frac{\partial\gamma}{\partial h_i'}y_i'\right].
\end{aligned}$$

Из формул (47.3) имеем выражение для дисперсий этих величин

$$D(\psi)=\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial s_i}\right)^2 D(x_i)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial h_i}\right)^2 D(y_i)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial s_i'}\right)^2 D(x_i')+\left(\frac{\partial\psi}{\partial h_i'}\right)^2 D(y_i')\right],$$

$$D(\theta)=\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial s_i}\right)^2 D(x_i)+\left(\frac{\partial\theta}{\partial h_i}\right)^2 D(y_i)+\left(\frac{\partial\theta}{\partial s_i'}\right)^2 D(x_i')+\left(\frac{\partial\theta}{\partial h_i'}\right)^2 D(y_i')\right],$$

$$D(\gamma)=\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial s_i}\right)^2 D(x_i)+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial h_i}\right)^2 D(y_i)+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial s_i'}\right)^2 D(x_i')+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial h_i'}\right)^2 D(y_i')\right]. \qquad (47.4)$$

Найдем формулы для выражения частных производных величин a_{ij}, ψ, θ и γ, встречающихся выше. Как следует из § 45, вектор $\mathbf{A}_i$ связан с $\mathbf{F}_i$ линейной системой

$$B\mathbf{A}_i=\mathbf{F}_i. \qquad (47.5)$$

Пусть $B=B^0+\Delta B$, $\mathbf{A}_i=\mathbf{A}_i^0+\Delta\mathbf{A}_i^0$ и $\mathbf{F}_i=\mathbf{F}_i^0+\Delta\mathbf{F}_i$. Здесь знаком Δ обозначена погрешность векторов и матриц, возникающая в результате измерений. Система (47.5) примет вид (если учитывать члены, линейные относительно погрешностей)

$$B^0\,\Delta\mathbf{A}_i=\Delta\mathbf{F}_i-\Delta B\mathbf{A}_i^0, \qquad (47.6)$$

так как

$$B^0\mathbf{A}_i^0=\mathbf{F}_i^0.$$

Из выражения (47.6) имеем

$$\Delta\mathbf{A}_i^0=C_0\,\Delta\mathbf{F}_i-C_0\,\Delta B\mathbf{A}_i^0. \qquad (47.7)$$

Распишем векторное равенство (47.7) по компонентам. Например, для Δa_{11} будем иметь

$$\begin{aligned}\Delta a_{11}=\frac{1}{N^2}\{&x_1'[s_1(h_2^2+h_3^2)-s_2h_1h_2-s_3h_1h_3]+\\&+y_1'[h_1(s_2^2+s_3^2)-h_2s_1s_2-h_3s_1s_3]+\\&+[x_2'h_3'^0+y_3's_2'^0-x_3'h_2'^0-s_3'^0y_2'](s_2h_3-s_3h_2)\}-\\&-\frac{1}{N^2}[s_1(h_2^2+h_3^2)-s_2(h_1h_2)-s_3h_1h_3]\cdot\sum_{i=1}^{3}x_ia_{1i}^0-\\&-\frac{1}{N^2}[h_1(s_2^2+s_3^2)-h_2(s_1s_2)-h_3s_1s_3]\sum_{i=1}^{3}y_ia_{1i}^0-\\&-\frac{1}{N^2}(s_2h_3-s_3h_2)[-x_1(a_{12}^0h_3^0-h_2^0a_{13}^0)+x_2(a_{11}^0h_3^0-a_{13}^0h_1^0)-\\&-x_3(a_{11}^0h_2^0-a_{12}^0h_1^0)+y_1(a_{12}^0s_3^0-s_2^0a_{13}^0)-\\&\qquad-y_2(a_{11}^0s_3^0-a_{13}^0s_1^0)+y_3(a_{11}^0s_2^0-s_1^0a_{12}^0)].\end{aligned} \qquad (47.8)$$

Из выражения (47.1) имеем

$$\cos\psi = \frac{a_{11}}{\sqrt{1-a_{12}^2}},$$

откуда

$$-\sin\psi\,\Delta\psi = \frac{\Delta a_{11}}{\sqrt{1-a_{12}^{0^2}}} + a_{11}^0 a_{12}^0\,\Delta a_{12}(1-a_{12}^{0^2})^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= (1-a_{10}^{0^2})^{-\frac{3}{2}}\,[\Delta a_{11}(1-a_{11}^{0^2}) + a_{11}^0 a_{12}^0\,\Delta a_{12}].$$

Заметим, что

$$\sin\psi_0 = \frac{-a_{13}^0}{\sqrt{1-a_{13}^{0^2}}},$$

откуда окончательно имеем

$$\Delta\psi = [\Delta a_{11}(1-a_{12}^{0^2}) + a_{11}^0 a_{12}^0\,\Delta a_{12}]\,\frac{1}{a_{13}^0}(1-a_{12}^{0^2})^{-1}, \tag{47.9}$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta a_{12}}{\sqrt{1-a_{12}^{0^2}}}, \tag{47.10}$$

$$\Delta\gamma = -\left[\frac{\Delta a_{22}}{\sqrt{1-a_{12}^{0^2}}} - \frac{a_{22}^0 a_{12}^0 \Delta a_{13}}{\left(\sqrt{1-a_{12}^{0^2}}\right)^3}\right]\cdot\frac{1}{\sin\gamma^0}, \tag{47.11}$$

$$\sin\gamma^0 = \frac{a_{32}^0}{\sqrt{1-a_{12}^{0^2}}}, \quad \text{если} \quad \psi_0 \in \begin{cases} \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \end{cases}$$

$$\sin\gamma^0 = \frac{-a_{32}^0}{\sqrt{1-a_{12}^{0^2}}}, \quad \text{если} \quad \psi_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right].$$

Предположим, что компоненты векторов $\bar{S}$ и $\bar{H}$ в абсолютной системе даются без погрешностей или что эти погрешности исчезающе малы; тогда уравнение (47.7) примет вид

$$\Delta \mathrm{A}_i = C_0\,\Delta \mathrm{F}_i. \tag{47.12}$$

Найдем среднюю суммарную ошибку определения направляющих косинусов осей связанной системы координат. Обозначим через d_{in} эту ошибку для i-й оси связанной системы координат. Тогда будем иметь

$$d_{in}^2 = \sum_{j=1}^{3} D(a_{ij}) = \sum_{j=1}^{3} M(\Delta a_{ij})^2. \tag{47.13}$$

Из выражения (47.12) имеем

$$\sum(\Delta a_{ij})^2 = \Delta \mathrm{F}_i^* C_0^* C_0\,\Delta \mathrm{F}_i. \tag{47.14}$$

Матрица $C_0^* C_0$ имеет следующий вид:

$$C_0^* C_0 = \begin{pmatrix} (\bar{H}_0 \times \bar{N}_0)^2 & ((\bar{H}_0 \times \bar{N}_0)(\bar{N}_0 \times \bar{S}_0)) & 0 \\ ((\bar{H}_0 \times \bar{N}_0)(\bar{S}_0 \times \bar{N}_0) & (\bar{S}_0 \times \bar{N}_0)^2 & 0 \\ 0 & 0 & N_0^2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{(N_0^2)^2}. \quad (47.15)$$

Последняя компонента вектора ΔF_i может быть приближенно представлена как линейная функция величин x_1', x_2', x_3', y_1', y_2', y_3' с номерами, отличными от i. Следовательно, ее можно будет считать независимой от первых двух компонент этого вектора. Имея в виду это, возьмем от обеих частей (47.14) математическое ожидание. Тогда получим

$$d_{in}^2 = \frac{1}{N_0^2} [H_0^2 D(x_i') + S_0^2 D(y_i') + D(\Delta n_i')] \qquad (i = 1, 2, 3). \quad (47.16)$$

Найдем явное представление средней погрешности для каждой из осей. Для этого вычислим величину $D(\Delta n_i')$, где $i = 1, 2, 3$. В результате имеем

$$D(\Delta n_1') = D(\Delta(s_2' h_3' - s_3' h_2')) \simeq D(s_2'^0 y_3' + x_2' h_3'^0 - s_3'^0 y_2' - x_3' h_2'^0) =$$
$$= s_2'^{0^2} D(y_3') + s_3'^{0^2} D(y_2') + h_3'^{0^2} D(x_2') + h_2'^{0^2} D(x_3'). \quad (47.17)$$

Подставляя выражения (47.16) в (47.17), найдем:

$$d_{1n} \doteq \frac{1}{N_0^2} [D(x_1') H_0^2 + D(x_2') h_3'^{0^2} + D(x_3') h_2'^{0^2} +$$
$$+ D(y_1') S_0^2 + D(y_2') s_3'^{0^2} + D(y_3') s_2'^{0^2}]; \quad (47.18)$$

$$d_{2n} = \frac{1}{N_0^2} [D(x_2') H_0^2 + D(x_3') h_1'^{0^2} + D(x_1') h_3'^{0^2} +$$
$$+ D(y_2') S_0^2 + D(y_3') s_1'^{0^2} + D(y_1') s_3'^{0^2}]; \quad (47.19)$$

$$d_{3n} = \frac{1}{N_0^2} [D(x_3') H_0^2 + D(x_1') h_2'^{0^2} + D(x_2') h_1'^{0^2} +$$
$$+ D(y_3') S_0^2 + D(y_1') s_2'^{0^2} + D(y_2') s_1'^{0^2}]. \quad (47.20)$$

Заметим, что $N_0^2 = H_0^2 S_0^2 \sin^2 \alpha$; здесь α — угол между векторами $\bar{S}$ и $\bar{H}$.

Из формул (47.18)—(47.20) вытекает, что точность ориентации резко падает при уменьшении угла между векторами, причем зависимость уменьшения точности от этого угла обратно пропорциональная.

Если заданы дисперсии ошибок всех бортовых приборов и требуемые точности ориентации (верхние значения величин d_{in}), то можно указать те участки орбиты, на которых задача ориентации может быть решена достоверно с принятой точностью.

Изучим теперь влияние неточности моделей векторов $\overline{\mathbf{S}}$ и $\overline{\mathbf{H}}$ на погрешность ориентации.

Пусть $\Delta\mathbf{F}_i=0$. Тогда из равенства (47.7) имеем

$$\Delta\mathbf{A}_i=-C_0\,\Delta B\mathbf{A}_i^0. \tag{47.21}$$

Положим

$$\Delta B\mathbf{A}_i^0=\Delta\mathbf{B}_i. \tag{47.22}$$

Тогда будем иметь

$$\Delta\mathbf{A}_i=-C_0\,\Delta\mathbf{B}_i,$$

откуда находим

$$\sum_{j=1}^{3}(\Delta a_{ij})^2=\Delta\mathbf{B}_i^*C_0^*C_0\,\Delta\mathbf{B}_i. \tag{47.23}$$

Учитывая, что первые две компоненты вектора $\Delta\mathbf{B}_i$ не зависят друг от друга, найдем математическое ожидание от обеих частей (47.23). В результате получим

$$d_{iM}^2=M\left[\sum_{j=1}^{3}(\Delta a_{ij})^2\right]=\sum_{j=1}^{3}D(a_{ij})=$$
$$=\frac{1}{\mathrm{N}_0^2}\left[\mathrm{H}_0^2D(\Delta b_{i1})+S_0^2D(\Delta b_{i2})+D(\Delta b_{i3})\right]. \tag{47.24}$$

Здесь b_{ij} — компоненты вектора $\mathbf{B}_i$. Через d_{iM} в выражении (47.24) обозначена средняя ошибка в определении положения i-й оси связанной системы координат в зависимости от погрешности моделей векторов $\overline{\mathbf{S}}$ и $\overline{\mathbf{H}}$. Найдем явное представление через дисперсии погрешностей величин d_{iM}. С этой целью определим дисперсии компонент вектора $\Delta\mathbf{B}_i$:

$$D(\Delta b_{i1})=D\left(\sum_{j=1}^{3}x_ja_{ij}^0\right)=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}^{02}D(x_j). \tag{47.25}$$

Аналогично имеем

$$D(\Delta b_{i2})=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}^{02}D(y_j). \tag{47.26}$$

Определим величину $D(\Delta b_{i3})$ при $i=1, 2, 3$:

$$D(\Delta b_{i3})=D(\Delta\overline{\mathbf{N}},\ \mathbf{A}_i^0)=D[(\Delta\overline{\mathbf{S}}\times\overline{\mathbf{H}}_0+\overline{\mathbf{S}}_0\times\Delta\overline{\mathbf{H}})\cdot\mathbf{A}_i^0]=$$
$$=D[\Delta\overline{\mathbf{S}}(\overline{\mathbf{H}}_0\times\overline{\mathbf{A}}_i^0)+\Delta\overline{\mathbf{H}}(\overline{\mathbf{A}}_i^0\times\overline{\mathbf{S}}_0)].$$

Таким образом, имеем

$$D(\Delta b_{i3})=D(x_1)(h_2^0a_{i3}^0-a_{i2}^0h_3^0)^2+D(x_2)(h_1^0a_{i3}^0-h_3^0a_{i1}^0)^2+$$
$$+D(x_3)(h_1^0a_{i2}^0-h_2^0a_{i1}^0)^2+D(y_1)(s_2^0a_{i3}^0-a_{i2}^0s_3^0)^2+$$
$$+D(y_2)(s_1^0a_{i3}^0-s_3^0a_{i1}^0)^2+D(y_3)(s_1^0a_{i2}^0-s_2^0a_{i1}^0)^2 \tag{47.27}$$

Подставляя выражения (47.25)—(47.27) в (47.24), найдем

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_0^2 d_{iM}^2 = {} & D(x_1)\,[\mathrm{H}_0^2 a_{i1}^{0^2} + (h_2^0 a_{i3}^0 - a_{i2}^0 h_3^0)^2] + \\ & + D(x_2)\,[\mathrm{H}_0^2 a_{i2}^{0^2} + (h_1^0 a_{i3}^0 - h_3^0 a_{i1}^0)^2] + D(x_3)\,[\mathrm{H}_0^2 a_{i3}^{0^2} + (h_1^0 a_{i2}^0 - h_2^0 a_{i1}^0)^2] + \\ & + D(y_1)\,[\mathrm{S}_0^2 a_{i1}^{0^2} + (s_2^0 a_{i3}^0 - s_3^0 a_{i2}^0)^2] + D(y_2)\,[\mathrm{S}_0^2 a_{i3}^{0^2} + (s_1^0 a_{i3}^0 - s_3^0 a_{i1}^0)^2] + \\ & + D(y_3)\,[\mathrm{S}_0^2 a_{i3}^{0^2} + (s_1^0 a_{i2}^0 - s_2^0 a_{i1}^0)^2] \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \qquad (47.28)\end{aligned}$$

Предполагая, что погрешности моделей векторов $\bar{S}$ и $\bar{H}$ и погрешности бортовых приборов не зависят друг от друга, найдем суммарную погрешность в ориентации осей связанной системы по отношению к абсолютной системе координат:

$$d_i = \sqrt{d_{in}^2 + d_{iM}^2},$$

а именно,

$$\begin{aligned}d_1 = \frac{1}{\mathrm{N}_0^2}\{ & D(x_1')\,\overline{\mathrm{H}}_0^2 + D(x_2')\,h_3'^{0^2} + D(x_3')\,h'^0 + D(y')\,\overline{\mathrm{S}}_0^2 + D(y_2')\,s_3'^{0^2} + \\ & + D(y_3')\,s_2'^{0^2} + D(x_1)\,[\overline{\mathrm{H}}_0^2 a_{11}^{0^2} + (h_2^0 a_{13}^0 - a_{12}^0 h_3^0)^2] + \\ & + D(x_2)\,[\overline{\mathrm{H}}_0^2 a_{13}^{0^2} + (h_1^0 a_{13}^0 - a_{11}^0 h_3^0)^2] + D(x_3)\,[\overline{\mathrm{H}}_0^2 a_{13}^{0^2} + (h_1^0 a_{12}^0 - a_{11}^0 h_2^0)^2] + \\ & + D(y_1)\,[\overline{\mathrm{S}}_0^2 a_{11}^{0^2} + (s_2^0 a_{13}^0 - a_{12}^0 s_3^0)^2] + D(y_2)\,[\overline{\mathrm{S}}_0^2 a_{12}^{0^2} + (s_1^0 a_{13}^0 - a_{11}^0 s_3^{0^2})] + \\ & + D(y_3)\,[\overline{\mathrm{S}}_0^2 a_{13}^{0^2} + (s_1^0 a_{12}^0 - a_{11}^0 s_2^0)^2]\}^{1/2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_2 = \frac{1}{\mathrm{N}_0^2}\{ & D(x_2')\,\overline{\mathrm{H}}_0^2 + D(x_3')\,h_1'^{0^2} + D(x_1')\,h_3'^{0^2} + D(y_2')\,\overline{\mathrm{S}}_0^2 + D(y_3')\,s_1'^{0^2} + \\ & + D(y_1')\,s_3'^{0^2} + D(x_1)\,[\overline{\mathrm{H}}_0^2 a_{21}^{0^2} + (h_2^0 a_{23}^0 - a_{22}^0 h_3^0)^2] + \\ & + D(x_2)\,[\overline{\mathrm{H}}_0^2 a_{22}^{0^2} + (h_1^0 a_{23}^0 - a_{21}^0 h_3^0)^2] + D(x_3)\,[\overline{\mathrm{H}}_0^2 a_{23}^{0^2} + (h_1^0 a_{22}^0 - a_{21}^0 h_2^0)^2] + \\ & + D(y_1)\,[\overline{\mathrm{S}}_0^2 a_{21}^{0^2} + (s_2^0 a_{23}^0 - a_{22}^0 s_3^0)^2] + D(y_2)\,[\overline{\mathrm{S}}_0^2 a_{22}^{0^2} + (s_1^0 a_{22}^0 - a_{21}^0 s_3^0)^2] + \\ & + D(y_3)\,[\overline{\mathrm{S}}_0^2 a_{23}^{0^2} + (s_1^0 a_{22}^0 - a_{21}^0 s_2^0)^2]\}^{1/2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_3 = \frac{1}{\mathrm{N}_0^2}\{ & D(x_3')\,\overline{\mathrm{H}}_0^2 + D(x_1')\,h_2'^{0^2} + D(x_2')\,h_1'^{0^2} + D(y_3')\,\overline{\mathrm{S}}_0^2 + D(y_1')\,s_2'^{0^2} + \\ & + D(y_2')\,s_1'^{0^2} + D(x_1)\,[\overline{\mathrm{H}}_0^2 a_{31}^{0^2} + (h_2^0 a_{33}^0 - a_{32}^0 h_3^0)^2] + \\ & + D(x_2)\,[\overline{\mathrm{H}}_0^2 a_{32}^{0^2} + (h_1^0 a_{33}^0 - a_{31}^0 h_3^0)^2] + D(x_3)\,[\overline{\mathrm{H}}_0^2 a_{33}^{0^2} + (h_1^0 a_{32}^0 - a_{31}^0 h_2^0)^2] + \\ & + D(y_1)\,[\overline{\mathrm{S}}_0^2 a_{31}^{0^2} + (s_2^0 a_{33}^0 - a_{32}^0 s_3^0)^2] + D(y_2)\,[\overline{\mathrm{S}}_0^2 a_{32}^{0^2} + (s_1^0 a_{33}^0 - a_{31}^0 s_3^0)^2] + \\ & + D(y_3)\,[\overline{\mathrm{S}}_0^2 a_{33}^{0^2} + (s_1^0 a_{32}^0 - a_{31}^0 s_2^0)^2]\}^{1/2}.\end{aligned}$$

Рассмотрим другой способ задания погрешностей векторов $\bar{S}$ и $\bar{H}$. Пусть

$$\bar{S} = \bar{S}^0 + \Delta\bar{S}; \qquad \bar{H} = \bar{H}^0 + \Delta\bar{H}.$$

Будем считать, что $\Delta\bar{S}$ и $\Delta\bar{H}$ — малые векторы, функции распределения которых таковы, что векторы $\bar{S}$ и $\bar{H}$ можно считать

расположенными в конусах. Для аналитического описания этих погрешностей введем на плоскости, перпендикулярной $\bar{S}_0$, систему координат. В качестве одного орта возьмем

$$\bar{N}^0 = \bar{S}^0 \times \bar{H}^0.$$

В качестве другого вектора возьмем

$$\bar{M}^0 = \bar{S}^0 \times \bar{N}^0.$$

Тогда $\Delta\bar{S}$ можно представить в форме

$$\Delta\bar{S} = \bar{N}^0 r \cos\varphi + \bar{M}^0 r \sin\varphi, \tag{47.29}$$

где угол φ распределен равновероятно в $[0, 2\pi]$, величина r распределена по какому-либо закону, так что $M[r] = 0$.

Аналогично для вектора $\Delta\bar{H}$ имеем

$$\Delta\bar{H} = \bar{N}^0 \rho \cos\chi + \bar{K}^0 \rho \sin\chi, \tag{47.30}$$

где $\bar{N}^0 = \bar{S}^0 \times \bar{H}^0$, $\bar{K}^0 = \bar{H}^0 \times \bar{N}^0$, ρ распределена по какому-либо закону, так что $M[\rho] = 0$, а χ равновероятно в $[0, 2\pi]$.

Погрешности $\Delta\bar{S}$ и $\Delta\bar{H}$ либо относятся к модели физических векторов, либо к работе приборов. Первый случай будем обозначать черточкой, второй случай — штрихом. Из формулы (47.29), (47.30) имеем

$$\begin{aligned}
x_1 &= (\bar{x}_0, \Delta\bar{S}) = n_1^0 r \cos\varphi + (s_2^0 n_3^0 - s_3^0 n_2^0)\, r \sin\varphi,\\
x_2 &= (\bar{y}_0, \Delta\bar{S}) = n_2^0 r \cos\varphi + (s_3^0 n_1^0 - s_1^0 n_3^0)\, r \sin\varphi,\\
x_3 &= (\bar{z}_0, \Delta\bar{S}) = n_3^0 r \cos\varphi + (s_1^0 n_2^0 - s_2^0 n_1^0)\, r \sin\varphi,\\
y_1 &= (\bar{x}_0, \Delta\bar{H}) = n_1^0 \rho \cos\chi + (h_2^0 n_3^0 - n_2^0 h_3^0)\, \rho \sin\chi,\\
y_2 &= (\bar{y}_0, \Delta\bar{H}) = n_2^0 \rho \cos\chi + (h_3^0 n_1^0 - n_3^0 h_1^0)\, \rho \sin\chi,\\
y_3 &= (\bar{z}_0, \Delta\bar{H}) = n_3^0 \rho \cos\chi + (h_1^0 n_2^0 - n_1^0 h_2^0)\, \rho \sin\chi.
\end{aligned} \tag{47,31}$$

Для вычисления погрешностей работы приборов достаточно в формулах (47.31) символ черточку заменить на символ штрих.

Подставляя выражения (47.31) в (47.1), найдем

$$a_{ij} = a_{ij}^0 + \alpha_{ij}^0 r \cos(\varphi - \varphi^0) + \beta_{ij}^0 \rho \cos(\chi - \chi^0) + \\ + \alpha_{ij}^{0\prime} r' \cos(\varphi' - \varphi^{0\prime}) + \beta_{ij}^{0\prime} \rho' \cos(\chi' - \chi^{0\prime}).$$

Отсюда находим

$$D(a_{ij}) = \frac{1}{2}\left[\alpha_{ij}^{0\,2} D(r) + \beta_{ij}^{0\,2} D(\rho) + \alpha_{ij}^{0\prime\,2} D(r') + \beta_{ij}^{0\prime\,2} D(\rho')\right].$$

§ 48. Ситуация неопределенности, возникающая при определении ориентации

Из предыдущего вытекает, что направляющие косинусы связанных осей, а также углы рыскания, крена и тангажа определяются единственным образом с помощью шести величин s'_i и h'_i, если s_i и h_i известны ($i=1, 2, 3$).

Так как первые из упомянутых величин измеряются бортовыми системами, то возможны также случаи, когда некоторые из этих величин не могут быть измерены ввиду отказа приборов или вследствие взаимного расположения Земли, Солнца и изучаемого объекта. В этих случаях задачу определения ориентации, опираясь на значение ориентации в предыдущие моменты времени, можно решать по крайней мере двумя путями. Первый путь сводится к решению задачи экстраполяции элементов ориентации на те участки орбиты, на которых некоторые из упомянутых величин не измеряются. Второй путь связан с интегрированием уравнений динамики при начальных условиях, определенных на основе знания ориентации. Дадим более детальное изложение этих двух подходов к решению одной конкретной задачи.

Пусть задан промежуток $[0, T]$ и на частичном промежутке $[0, t_0]$ задача ориентации разрешима единственным образом. Пусть далее на промежутке $[t_0, T]$ величины s'_i ($i=1, 2, 3$) с помощью бортовой системы не определяются. Требуется определить направляющие косинусы связанных осей в абсолютной системе при $t\in[t_0, T]$. В основу решения задачи положим формулы (45.1) — (45.3). Непременно имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{3} s'_i h'_i = \sum_{i=1}^{3} s_i h_i$$

ввиду того, что скалярное произведение векторов инвариантно по отношению к поворотам ортогональной системы координат. Таким образом, косинус угла между вектором $\overline{\mathrm{H}}'=(h'_1, h'_2, h'_3)$ и неизвестным вектором $\overline{\mathrm{S}}=(s'_1, s'_2, s'_3)$ при $t\in[t_0, T]$ остается известным. Обозначим величину этого косинуса через

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{3} s_i h_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} s_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2}}.$$

Положим

$$\overline{\mathrm{S}}=\frac{a\overline{\mathrm{H}}}{|\overline{\mathrm{H}}|}+\sqrt{1-a^2}\,\overline{\Lambda}, \tag{48.1}$$

где $\overline{\Lambda}$ — единичный вектор, лежащий в плоскости, перпендикулярной к вектору $\overline{H}$. Положим далее

$$\overline{\xi}_0 = \frac{\overline{H}\times\overline{x}_0'}{|\overline{H}\times\overline{x}_0'|} \quad \text{и} \quad \overline{\eta}_0 = \frac{\overline{H}\times\overline{\xi}_0}{|\overline{H}|}.$$

Орты $\overline{\xi}_0$, $\overline{\eta}_0$ задают правую систему координат на плоскости, перпендикулярной к $\overline{H}$ и проходящей через конец вектора $\overline{S}$. Вектор $\overline{\Lambda}$ в этой системе координат представим в форме

$$\overline{\Lambda} = \lambda_1\overline{\xi}_0 + \lambda_2\overline{\eta}_0, \tag{48.2}$$

и, следовательно, вектор $\overline{S}$ может быть выражен соотношением

$$\overline{S} = \frac{a\overline{H}}{|\overline{H}|} + \sqrt{1-a^2}\,(\lambda_1\overline{\xi}_0 + \lambda_2\overline{\eta}_0). \tag{48.3}$$

Спроектируем вектор (48.3) на оси связанной системы координат. Для этого найдем проекции $\overline{\xi}_0$ и $\overline{\eta}_0$ на эти оси

$$\begin{aligned} &(\overline{x}_0', \overline{\xi}_0) = 0, && (\overline{y}_0', \overline{\xi}_0) = h_3'\frac{1}{\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}, \\ &(\overline{z}_0', \overline{\xi}_0) = -\frac{h_2'}{\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}, && (\overline{x}_0', \overline{\eta}) = -\frac{\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}{|\overline{H}|}, \\ &(\overline{y}_0', \overline{\eta}_0) = \frac{h_1'h_2'}{|\overline{H}|\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}, && (\overline{z}_0', \overline{\eta}) = \frac{h_3'h_1'}{|\overline{H}|\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}. \end{aligned} \tag{48.4}$$

Из формул (48.4) и (48.3) имеем

$$\begin{aligned} s_1' &= (\overline{S}, \overline{x}_0') = \frac{ah_1' - \lambda_2\sqrt{1-a^2}\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}{|\overline{H}|}, \\ s_2' &= (\overline{S}, \overline{y}_0') = \frac{ah_2' + \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}(\lambda_1|\overline{H}|h_3' + \lambda_2h_1'h_2')}{|\overline{H}|}, \\ s_3' &= (\overline{S}, \overline{z}_0') = \frac{ah_3' + \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}(-\lambda_1h_2'|\overline{H}| + \lambda_2h_1'h_3')}{|\overline{H}|}. \end{aligned} \tag{48.5}$$

Положим, как и выше,

$$\overline{N} = \overline{S}\times\overline{H} = \sqrt{1-a^2}\,(\lambda_1\overline{\xi}_0\times\overline{H} + \lambda_2\overline{\eta}_0\times\overline{H}).$$

Тогда имеем

$$
\begin{aligned}
n_1' &= \lambda_1 \sqrt{1-a^2}\sqrt{h_2'^2+h_3'^2},\\
n_2' &= -\lambda_1 \sqrt{1-a^2}\,\frac{h_1'h_2'}{\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}} + \lambda_2 \sqrt{1-a^2}\cdot\frac{h_3'\,|\overline{\mathrm{H}}|}{\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}},\\
n_3' &= -\lambda_1 \sqrt{1-a^2}\,\frac{h_3'h_1'}{\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}} - \lambda_2 \sqrt{1-a^2}\cdot\frac{h_2'\,|\overline{\mathrm{H}}|}{\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}.
\end{aligned}
\qquad (48.6)
$$

Подставляя выражения (48.5), (48.6) в (45.16)—(45.18), найдем формулы для направляющих косинусов связанных осей в системе Oxy

$$a_{i1}\overline{\mathrm{N}}^2 = \alpha_{i1} + \beta_{i1}\lambda_1 + \gamma_{i1}\lambda_2, \qquad (48.7а)$$

где

$$
\begin{aligned}
\alpha_{i1} &= h_i'h_1(1-a^2),\\
\beta_{11} &= \sqrt{1-a^2}\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}\,(s_2h_3 - s_3h_2),\\
\beta_{21} &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{|\overline{\mathrm{H}}|}\left[h_3'(s_1\overline{\mathrm{H}}^2 - h_1a|\overline{\mathrm{H}}|) - h_1'h_2'(s_2h_3 - s_3h_2)\right],\\
\beta_{31} &= -\frac{\sqrt{1-a^2}}{|\overline{\mathrm{H}}|}\left[h_2'(s_1\overline{\mathrm{H}}^2 - h_1a|\overline{\mathrm{H}}| -) h_1'h_3'(s_2h_3 - s_3h_2)\right],\\
\gamma_{11} &= -\frac{\sqrt{1-a^2}}{|\overline{\mathrm{H}}|}\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}\,(s_1\overline{\mathrm{H}}^2 - h_1a|\overline{\mathrm{H}}|),\\
\gamma_{21} &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{|\overline{\mathrm{H}}|\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}\left[h_1'h_2'(s_1\overline{\mathrm{H}}^2 - h_1a|\overline{\mathrm{H}}|) + h_3'\overline{\mathrm{H}}^2(s_2h_3 - s_3h_2)\right],\\
\gamma_{31} &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{|\mathrm{H}|\sqrt{h_1'^2+h_3'^2}}\left[h_1'h_3'(s_1\overline{\mathrm{H}}^2 - h_1a|\overline{\mathrm{H}}|) - h_2'\overline{\mathrm{H}}^2(s_2h_3 - s_3h_2)\right];
\end{aligned}
$$

$$a_{i2}\overline{\mathrm{N}}^2 = \alpha_{i2} + \lambda_1\beta_{i2} + \lambda_2\gamma_{i2}, \qquad (48.7б)$$

где

$$
\begin{aligned}
\alpha_{i2} &= h_i'h_2(1-a^2)\\
\beta_{1,2} &= \frac{-\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}\,h_1'h_3'(s_3h_1 - s_1h_3),\\
\beta_{22} &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}\left[h_3'(s_2\overline{\mathrm{H}}^2 - h_2a|\overline{\mathrm{H}}|) - h_1'h_2'(s_3h_1 - s_1h_3)\right],\\
\beta_{32} &= -\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}\left[h_2'(s_2\overline{\mathrm{H}}^2 - h_2a|\overline{\mathrm{H}}|) + h_1'h_3'(s_3h_1 - s_1h_3)\right],\\
\gamma_{12} &= -\frac{\sqrt{1-a^2}}{|\overline{\mathrm{H}}|}\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}\,(s_2\overline{\mathrm{H}}^2 - h_2a|\overline{\mathrm{H}}|);
\end{aligned}
$$

$$\gamma_{22}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{|\overline{H}|\sqrt{h_1'^2+h_3'^2}}\left[h_1'h_2'(s_2\overline{H}^2-h_2a|\overline{H}|)+h_3'\overline{H}^2(s_3h_1-s_1h_3)\right],$$

$$\gamma_{32}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{|\overline{H}|\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}\left[h_1'h_3'(s_2\overline{H}^2-h_2a|\overline{H}|)-h_2'\overline{H}^2-(s_3h_1-h_3s_1)\right];$$

$$a_{i3}\overline{N}^2=\alpha_{i3}+\beta_{i3}\lambda_1+\gamma_{i3}\lambda_2, \qquad (48.7\text{в})$$

где

$$\alpha_{i3}=h_i'h_3'(1-a^2),$$

$$\beta_{13}=\sqrt{1-a^2}\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}\,(s_1h_2-s_2h_1),$$

$$\beta_{23}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}\left[h_3'(s_3\overline{H}^2-h_3a|\overline{H}|)+h_1'h_2'(s_1h_2-s_2h_1)\right],$$

$$\beta_{33}=-\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}\left[h_2'(s_3\overline{H}^2-h_3a|\overline{H}|)+h_1'h_3'(s_1h_2-s_2h_1)\right],$$

$$\gamma_{13}=-\frac{\sqrt{1-a^2}}{|\overline{H}|}\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}\,(s_3\overline{H}^2-h_3a|\overline{H}|),$$

$$\gamma_{23}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{|\overline{H}|\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}\left[h_1'h_2'(s_3\overline{H}^2-h_3a|\overline{H}|)+h_3'\overline{H}^2(s_1h_2-s_2h_1)\right],$$

$$\gamma_{33}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{|\overline{H}|\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}\left[h_1'h_3'(s_3\overline{H}^2-h_3a|\overline{H}|)-h_2'\overline{H}^2(s_1h_2-s_2h_1)\right].$$

Из формулы (48.7) вытекает, что задача определения положения системы $Oxyz$ в системе $Ox'y'z'$ однозначно разрешима, если известны величины λ_1, λ_2. По построению обязательно имеет место равенство

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2=1.$$

Величины λ_1 и λ_2 являются функциями времени. Эти функции обязательно удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида

$$\begin{aligned} d\lambda_1/dt&=-p(t)\lambda_2,\\ d\lambda_2/dt&=p(t)\lambda_1, \end{aligned} \qquad (48.8)$$

где $p(t)$ — некоторая известная функция времени, если векторы $\overline{S}$ и $\overline{H}$ известны в системе $Ox'y'z'$. Через эту функцию можно представить решение (48.8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \lambda_1&=\lambda_{10}\cos\int_{t_0}^{t}p(t)\,dt-\lambda_{20}\sin\int_{t_0}^{t}p(t)\,dt,\\ \lambda_2&=\lambda_{10}\sin\int_{t_0}^{t}p(t)\,dt+\lambda_{20}\cos\int_{t_0}^{t}p(t)\,dt. \end{aligned} \qquad (48.9)$$

Решение (48.9) системы (48.8) удовлетворяет условиям $\lambda_1=\lambda_{10}$, $\lambda_2=\lambda_{20}$ при $t=t_0$.

Таким образом, если функция $p(t)$ известна при $t\in[0, T]$ и при $t=t_0$ известны величины λ_{10}, λ_{20}, что означает, что известны векторы $\bar{S}$ и $\bar{H}$ в системе $Ox'y'z'$ (т. е. задача определения положения в этой точке разрешима однозначно), то задача определения положения будет разрешима при любом $t\in[0, T]$, и это решение получается при подстановке величин λ_1, λ_2 из формул (48.9) в (48.7).

Дадим способ определения функции $p(t)$. Предположим, что векторы $\bar{S}$ и $\bar{H}$ известны в системе $Ox'y'z'$ в точках t_1, t_2, ..., $t_k=t_0$. Тогда можно ввести в рассмотрение числа

$$p_s=\frac{\lambda_1(t_s)\,[\lambda_2(t_{s+1})-\lambda_2(t_s)]-\lambda_2(t_s)\,[\lambda_1(t_{s+1})-\lambda_1(t_s)]}{t_{s+1}-t_s}. \qquad (48.10)$$

Формула (48.10) тем точнее дает значение функции p в момент t_s, чем меньше изменяется эта функция на промежутке времени между соседними моментами измерений. Положим

$$p(t)=p_0+\sum_{k=1}^{m}(a_k\cos\mu_k t+b_k\sin\mu_k t), \qquad (48.11)$$

где p_0, a_k, b_k—вещественные числа, подлежащие определению. Частоты μ_k будем считать пропорциональными орбитальной частоте (в общем случае их можно также отнести к неизвестным величинам, подлежащим определению). Выберем величины p_0, a_k b_k $(k=1, \ldots)$ так, чтобы было

$$\sum_{s=1}^{k-1}[p_s-p(t_s)]^2=\inf.$$

Цель такого выбора величин p_0, a_k, b_k $(k=1, \ldots)$ состоит в том, чтобы угловая скорость, с которой вращается вектор $\bar{\Lambda}$, наименьшим образом уклонялась от «наблюдаемых» значений угловых скоростей p_s.

Из предыдущих формул вытекает, что для их использования необходимо иметь выражение λ_1, λ_2 через проекции $\bar{S}$ и $\bar{H}$. Умножая скалярно (48.3) на $\bar{\xi}_0$, $\bar{\eta}_0$, найдем

$$\lambda_1=\frac{(\bar{s},\ \bar{\xi}_0)}{\sqrt{1-a^2}},\qquad \lambda_2=\frac{(\bar{s},\ \bar{\eta}_0)}{\sqrt{1-a^2}}. \qquad (48.12)$$

Из формул (48.12) имеем

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\frac{s_2'h_3' - s_3'h_2'}{\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}} = \frac{n_1'}{\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}},$$

$$\lambda_2 = \frac{-s_1'(h_2'^2+h_3'^2)+s_2'h_1'h_2'+s_3'h_3'h_1'}{\sqrt{1-a^2}\cdot|\bar{H}|\cdot\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}} = \frac{h_1'a - s_1'|\bar{H}|}{\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{h_2'^2+h_3'^2}}. \quad (48.13)$$

Подставляя выражения (48.13) в (48.9) и (48.10), найдем

$$\lambda_1(t) = \frac{n_1'(t_0)\cos\int_{t_0}^{t} p(t)\,dt - (h_1'a(t_0) - s_1'|\bar{H}|)\sin\int_{t_0}^{t} p(t)\,dt}{\sqrt{1-a^2(t_0)}\sqrt{h_2'^2(t_0)+h_3'^2(t_0)}}, \quad (48.14)$$

$$\lambda_2(t) = \frac{n_1'(t_0)\sin\int_{t_0}^{t} p(t)\,dt + (h_1'(t_0)a(t_0) - s_1'(t_0)|\bar{H}|)\cos\int_{t_0}^{t} p(t)\,dt}{\sqrt{1-a^2(t_0)}\cdot\sqrt{h_2'^2(t_0)+h_3'^2(t_0)}}, \quad (48.15)$$

$$p_s = \{n_1'(t_s)[h_1'(t_{s+1})a(t_{s+1}) - s_1'(t_{s+1})|\overline{H(t_{s+1})}|] -$$
$$- n_1'(t_{s+1})[h_1'(t_s)a(t_s) - s_1'(t_s)|\overline{H(t_s)}|]\}(1-a^2(t_s))^{-1/2}\times$$
$$\times(1-a^2(t_{s+1}))^{-1/2}(h_2'^2(t_s)+h_3'^2(t_s))^{-1/2}\times$$
$$\times(h_2'^2(t_{s+1})+h_3'^2(t_{s+1}))^{-1/2}(t_{s+1}t_s)^{-1}.$$

Укажем способ использования уравнений с целью определения положения системы $Ox'y'z'$ в системе $Oxyz$ в рассматриваемом выше случае неопределенности. Обозначим через $\bar{\omega}_s$ угловую скорость, с которой вращается вектор $\bar{S}$ в системе $Oxyz$. Через $\bar{\omega}$ обозначим угловую скорость, с которой вращается система $Ox'y'z'$ относительно системы $Oxyz$. Тогда вектор $\bar{S}$ будет вращаться относительно системы $Ox'y'z'$ с угловой скоростью $\bar{\omega}_s - \bar{\omega}$. Принимая систему $Ox'y'z'$ за неподвижную, будем тогда иметь

$$d\bar{S}/dt = (\bar{\omega}_s - \bar{\omega})\times\bar{S}. \quad (48.16)$$

Обозначим через $\bar{\omega}_H$ угловую скорость, с которой вращается вектор $\bar{H}$ относительно $Oxyz$. Тогда также будем иметь

$$d\bar{H}/dt = (\bar{\omega}_H - \bar{\omega})\times\bar{H}.$$

Проекции векторов $\bar{\omega}_H$ и $\bar{\omega}_s$ на оси $Ox'y'z'$ связаны с их проекциями на оси $Oxyz$ соотношениями

$$\omega_{si}' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\bar{\omega}_{sj}, \quad \omega_{Hi}' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\bar{\omega}_{Hj} \qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Найдем производную по времени от направляющих косинусов в системе $Oxyz$. Тогда будем иметь

$$d\bar{\mathbf{A}}_i/dt = \bar{\omega} \times \bar{\mathbf{A}}_i.$$

В скалярной форме получим

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{i1} &= -\omega_3 a_{i2} + \omega_2 a_{i3}, \\
\dot{a}_{i2} &= -\omega_1 a_{i3} + \omega_3 a_{i1}, \\
\dot{a}_{i3} &= -\omega_2 a_{i1} + \omega_1 a_{i2}, \\
\dot{h}'_1 &= -(\omega'_{H3} - \omega'_3) h'_2 + (\omega'_{H2} - \omega'_2) h'_3, \\
\dot{h}'_2 &= -(\omega'_{H1} - \omega'_1) h'_3 + (\omega'_{H3} - \omega'_3) h'_1, \\
\dot{h}'_3 &= -(\omega'_{H2} - \omega'_2) h'_1 + (\omega'_{H1} - \omega'_1) h'_2, \\
ds'_1/dt &= -(\omega'_{s3} - \omega'_3) s'_2 + (\omega'_{s2} - \omega'_2) s'_3, \\
ds'_2/dt &= -(\omega'_{s1} - \omega'_1) s'_3 + (\omega'_{s3} - \omega'_3) s'_1, \\
ds'_3/dt &= -(\omega'_{s2} - \omega'_2) s'_1 + (\omega'_{s1} - \omega'_1) s'_2.
\end{aligned} \tag{48.17}$$

Здесь ω'_i, ω'_{Hi} ω'_{si} — проекции векторов $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}_H$, $\bar{\omega}_s$, на оси связанной системы координат, а ω_i, ω_{Hi}, ω_{si} — проекции векторов $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}_H$, $\bar{\omega}_s$ на оси абсолютной системы.

Величины ω'_i ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют уравнениям относительного движения рассматриваемого объекта по отношению к системе осей $Oxyz$. Численное значение этих величин в момент t_0 может быть определено, исходя из знания ориентации системы осей $Ox'y'z'$ при $t \in [0, t_0]$. При $t = t_0$ векторы $\bar{S}$, $\bar{H}$ также известны. Поэтому задача интегрирования системы уравнения (48.17) совместно с уравнениями движения заключается в решении задачи Коши с начальными условиями при $t = t_0$. Решение этой задачи существует при $t \in [0, T]$ и определяет единственным образом вектор $\bar{S}(t)$, который совместно с вектором $\bar{H}$ дает возможность однозначно определить ориентацию на основании формул (45.16)—(45.18).

Рассмотрим теперь другие ситуации неопределенности, возникающие при решении задачи определения положения твердого тела, именно те ситуации, которые возникают вследствие отказов магнитометров. Отметим три типичные ситуации. Первая ситуация заключается в том, что отказывает зонд магнитометра; вторая состоит в том, что отказывают два зонда, и третья — для случая отказа трех зондов. Если рассматривать все комбинации возможных отказов, то возникает семь различных комбинаций, а именно: отказ одного первого зонда, одного второго, одного третьего, первого и второго, первого и третьего, второго и третьего и всех трех, причем эти отказы могут возникать как на освещенной стороне, так и на неосвещенной.

Рассмотрим задачу устранения неопределенности, возникающей в такого рода ситуациях.

Пусть имеет место отказ лишь одного зонда. Покажем тогда, что задача определения положения может быть решена как на освещенной стороне орбиты, так и на неосвещенной. Предположим, что отказал первый зонд магнитометра. Тогда величина h_1', входящая в выражения (45.16)—(45.18), не измеряется. Однако во все время движения имеем

$$h_1's_1'+h_2's_2'+h_3's_3'=|\bar{S}||\bar{H}|a, \tag{48.18}$$

где a—косинус угла между $\bar{S}$ и $\bar{H}$, величина, известная во все время движения. Из выражения (48.18) находим

$$h_1'=\frac{|\bar{S}||\bar{H}|a-h_2's_2'-h_3's_3'}{s_1'}, \tag{48.19}$$

откуда вытекает, что задача определения положения разрешима однозначно в том случае, когда величина s_1' известна, т. е. объект находится на освещенной стороне, когда $s_1'\neq 0$. Направляющие косинусы при этом получаются путем подстановки формулы (48.19) в (45.16)—(45.18).

Дадим способ решения задачи в том случае, когда величина s_1' неизвестна или когда s_1' принимает достаточно малые значения. С этой целью введем в рассмотрение единичный вектор $\bar{v}$, лежащий в плоскости, перпендикулярной к $\bar{S}$, связанной с $\bar{S}$ и $\bar{H}$ соотношением

$$\bar{H}=|\bar{H}|(a\bar{S}+\sqrt{1-a^2}\,\bar{v}). \tag{48.20}$$

Пусть $\bar{\xi}_0$, $\bar{\eta}_0$—ортогональные орты на упомянутой плоскости. Тогда

$$v=v_1\bar{\xi}_0+v_2\bar{\eta}_0.$$

Для определенности положим

$$\bar{\xi}_0=\frac{\bar{S}\times\bar{x}_0'}{|\bar{S}\times\bar{x}_0'|};\qquad \bar{\eta}_0=\frac{\bar{S}\times\bar{\xi}_0}{|\bar{S}|}.$$

Найдем проекции $\bar{\xi}_0$, $\bar{\eta}_0$ и $\bar{H}$ на оси $Ox'y'z'$:

$$(\bar{\xi}_0,\bar{x}_0')=0,\qquad (\bar{\xi}_0,\bar{y}_0')=\frac{s_3'}{\sqrt{s_1'^2+s_2'^2}},\qquad (\bar{\xi},\bar{z}_0')=\frac{-s_2'}{\sqrt{s_2'^2+s_3'^2}},$$

$$(\bar{\eta}_0,\bar{x}_0')=-\sqrt{s_2'^2+s_3'^2},\ (\bar{\eta}_0,\bar{y}_0')=\frac{s_1's_2'}{\sqrt{s_2'^2+s_3'^2}},\ (\bar{\eta}_0,\bar{z}_0')=\frac{s_3's_1'}{\sqrt{s_2'^2+s_3'^2}},$$

$$h_1'=|\bar{H}|[as_1'-\sqrt{1-a^2}\,v_2\sqrt{s_2'^2+s_3'^2}], \tag{48.21}$$

$$h_2' = |\bar{H}| \left[a s_2' + \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{s_2'^2 + s_3'^2}} (\nu_1 s_3' + \nu_2 s_1' s_2') \right],$$

$$h_3' = |\bar{H}| \left[a s_3' + \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{s_2'^2 + s_3'^2}} (-\nu_1 s_2' + \nu_2 s_3' s_1') \right].$$

Отсюда.

$$\nu_2 = -\left[\frac{h_1'}{|\bar{H}|} - a s_1'\right] \frac{1}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{s_2'^2 + s_3'^2}},$$

$$\nu_1 = \frac{\dfrac{h_2'}{|\bar{H}|}\dfrac{s_3'}{\sqrt{s_2'^2 + s_3'^2}} - \dfrac{h_3'}{|\bar{H}|}\dfrac{s_2'}{\sqrt{s_2'^2 + s_3'^2}}}{\sqrt{1-a^2}} =$$

$$= \frac{h_2' s_3' - h_3' s_2'}{|\bar{H}|\sqrt{s_2'^2 + s_3'^2}\sqrt{1-a^2}}. \qquad (48.22)$$

Подставляя формулы (48.21) в (45.16)—(45.18), получим выражения для направляющих косинусов через ν_1, ν_2. Единичный вектор $\bar{\nu}$ на плоскости $\nu_1\nu_2$ совершает вращательное движение вокруг начала координат. Следовательно, уравнения, описывающие движение конца, имеют вид

$$d\nu_1/dt = -q(t)\nu_2,$$
$$d\nu_2/dt = q(t)\nu_1. \qquad (48.23)$$

Из формул (48.22) вытекает, что ν_1 не зависит от h_1'. Следовательно, из первого уравнения системы (48.23) всегда можно определить знак величины

$$\nu_2 = \pm\sqrt{1-\nu_1^2},$$

если известен знак величины $q(t)$. Угловая скорость $q(t)$ определяется в точности так же, как угловая скорость вектора $\bar{\Lambda}$, рассмотренного выше.

Пусть t_1, t_2, ..., t_k—точки, в которых производятся наблюдения. Тогда

$$q_s = \frac{\nu_1(t_s)[\nu_2(t_{s+1}) - \nu_2(t_s)] - \nu_2(t_s)[\nu_1(t_{s+1}) - \nu_1(t_s)]}{t_{s+1} - t_s}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, k-1). \qquad (48.24)$$

Соотношение (48.24) дает приближенное значение угловой скорости вектора $\bar{\nu}$ в момент t_s. Заметим, что в выражение (48.24) входит величина h_1'. Для освещенной области и для случая, когда s_1' не является достаточно малой величиной, h_1' можно вычислить по формуле (48.19) и подставить в выражение (48.24). Те моменты наблюдения, когда s_1' мало, в определении величины $q(t)$ не учитываются, экстраполяция ведется по оставшимся q_s.

Найденное выражение для функции $q(t)$ дает возможность определить знак величины ν_2 и, следовательно, решить задачу определения положения для всех точек промежутка освещенности.

Рассмотрим теперь задачу определения ориентации также на неосвещенном участке орбиты при условии отказа первого зонда. Пусть задан промежуток $[0, T]$, на котором требуется решить задачу определения ориентации, причем $[0, t_0]$ есть промежуток освещенности, а $(t_0, T]$—промежуток затемнения. Первая компонента вектора $\bar{\lambda}$ не зависит от величины h_1'. Следовательно, если функция $p(t)$ известна, то из уравнения

$$d\lambda_2/dt = p(t)\lambda_1$$

всегда можно определить знак величины λ_2:

$$\lambda_2 = \pm\sqrt{1-\lambda_1^2}.$$

Выбросим из ряда величин $p_s (s=1, 2, \ldots, k-1)$ те, для которых s_1' достаточно мало. В остальных же величинах p_s заменим h_1' по формуле (48.19). Тогда величины p_s будут определены однозначно, несмотря на отказ первого зонда. Путем экстраполяции строим величину $p(t)$ на промежутке $[0, T]$ и определяем λ_1 и λ_2 во все время движения. С помощью λ_1 и λ_2 по формулам (48.5) определяем величины s_2' и s_3' на затемненном участке. Это дает возможность определить величину ν_1 во все время движения, так как она не зависит от s_1' и h_1'. Экстраполяция величин q_s и построение функции $q(t)$ дает возможность определить знак величины ν_2 на всем промежутке $[0, T]$:

$$\nu_2 = \pm\sqrt{1-\nu_1^2}.$$

Величины ν_1 и ν_2 дают возможность определить ориентацию осей $Ox'y'z'$ в системе $Oxyz$.

Следует заметить, что только что установленная возможность определения положения при отказе одного зонда позволяет определить ориентацию твердого тела лишь с дополнительной потерей точности. Эти дополнительные потери точности происходят из-за процесса экстраполяции и из-за дополнительных операций над входящими величинами.

Аналогично решается задача в случае отказа одного второго зонда или одного третьего. За основу берутся другие орты $\bar{\xi}_0$, $\bar{\eta}_0$, $\bar{\nu}$ из расчета, чтобы первые компоненты векторов $\bar{\nu}$ и $\bar{\lambda}$ не зависели от показаний вышедшего из строя зонда.

Предположим, что отказали два зонда, и величины h_2' и h_3' не измеряются. Тогда задача определения положения может быть решена как на освещенной стороне орбиты, так и на теневой ее стороне. Однако точность решения падает. Действительно, во

время движения должны иметь место соотношения

$$n_1' = \sum_{i=1}^{3} a_{1i} n_i, \tag{48.25}$$

$$s_2' h_2' + s_3' h_3' = \sum_{i=1}^{3} s_i h_i - s_i' h_i'. \tag{48.26}$$

Из (48.25), (48.26) величины h_2', h_3' определяются единственным образом, если

$$s_2'^2 + s_3'^2 \neq 0.$$

Предполагая это условие выполненным, или, иначе говоря, рассматривая только те моменты наблюдений, когда $s_2'^2 + s_3'^2 \neq 0$, выразим h_2' и h_3' из соотношений (48.25), (48.26). Величины h_2' и h_3' единственным образом определяются через скалярное произведение $(\overline{\mathrm{A}}_1, \overline{\mathrm{N}})$

$$\begin{aligned} h_2' &= -(\overline{\mathrm{A}}_1, \overline{\mathrm{N}}) \frac{s_3'}{s_2'^2 + s_3'^2} - \frac{s_2'}{s_2'^2 + s_3'^2} [(\overline{\mathrm{S}}, \overline{\mathrm{H}}) - h_1' s_1'], \\ h_3' &= \frac{s_2'}{s_2'^2 + s_2'^2} (\overline{\mathrm{A}}_1, \overline{\mathrm{N}}) + \frac{s_3'}{s_2'^2 + s_3'^2} [(\overline{\mathrm{S}}, \overline{\mathrm{H}}) - h_1' s_1']. \end{aligned} \tag{48.27}$$

Если с помощью (48.27) исключить величины h_2', h_3' из (45.16)—(45.18), то получим направляющие косинусы осей $Ox'y'z'$ в системе $Oxyz$, выраженные через $(\overline{\mathrm{A}}_1, \overline{\mathrm{N}})$. Найдем значение этого скалярного произведения.

Во все время движения должно иметь место равенство

$$h_2'^2 + h_3'^2 = H^2 - h_1'^2 = \sum_{i=1}^{3} h_i^2 - h_1'^2. \tag{48.28}$$

Подставляя (48.27) в (48.28), получим

$$(\overline{\mathrm{A}}_1, \overline{\mathrm{N}})^2 \frac{1}{s_2'^2 + s_3'^2} + \frac{1}{s_3'^2 + s_3'^2} [(\overline{\mathrm{S}}, \overline{\mathrm{H}}) - h_1' s_1'] = H^2 - h_1'^2,$$

откуда находим

$$(\overline{\mathrm{A}}_1, \overline{\mathrm{N}}) = \pm ((s_2'^2 + s_3'^2)(H^2 - h_1'^2) - [(\overline{\mathrm{S}}, \overline{\mathrm{H}}) - h_1' s_1']^2)^{1/2}. \tag{48.29}$$

Из (48.29) вытекает, что при отказе двух зондов задача определения ориентации решается в каждый момент измерения, а именно, возможна одна из двух ориентаций.

Для устранения неопределенности, возникающей здесь, следует рассмотреть соседние моменты измерений. Пусть эти моменты будут t_1, t_2, t_3. Если предположить, что на промежутке $[t_1, t_3]$ относительная угловая скорость объекта изменяется достаточно

мало, то ориентацию в моменты t_2 и t_3 можно получить из ориентации в момент t_1 и последующих конечных поворотов.

Величина (48.29) в точках t_1 и t_2 может иметь различные значения: интерес представляет знак этой величины. Таким образом, следует рассмотреть четыре случая ориентации в точках t_1 и t_2. Будем их символически обозначать: $(++)$, $(+-)$, $(-+)$, $(--)$.

Считая, что ориентация в момент t_2 может быть получена из положения в момент t_1 конечным поворотом, найдем угловую скорость относительного вращения. Таких угловых скоростей определяется четыре: $\overline{\omega}^{++}$, $\overline{\omega}^{+-}$, $\overline{\omega}^{-+}$, $\overline{\omega}^{--}$. С каждой из этих угловых скоростей определим путем конечного поворота из положения в момент t_1 или положения в момент t_2 ориентацию в момент t_3. Таких ориентаций получится по крайней мере четыре. Для всех этих ориентаций можно вычислить величины

$$s_i' = (\overline{A}_i, \overline{S}) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} s_j; \quad h_1' = (\overline{A}_1, \overline{H}) = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} h_j \qquad (i = 1, 2, 3).$$

С другой стороны, в момент t_3 величины $s_i'(t_3)$, $h_1'(t_3)$ определяются с помощью измерений. Рассмотрим выражение

$$v = \sum_{i=1}^{3} (s_i'(t_3) - s_{ik})^2 + (h_1'(t_3) - h_{1k}')^2 \qquad (k = 1,\ 2,\ 3).$$

Значок k обозначает номер ориентации в момент t_3, которая получена путем конечного поворота. Выберем то значение k, для которой величина v принимает наименьшее возможное значение. Этому значению k соответствует один из случаев $(++)$, $(+-)$, $(-+)$, $(--)$. Его и возьмем за истинный. Таким образом, ориентации в момент t_1 и t_2 определены единственным образом.

Остается рассмотреть последний случай, когда все три зонда магнитометра отказали. В этом случае система ориентации становится одновекторной и задачу определения положения можно решить, либо исходя из уравнений динамики относительного движения, либо из определенных предположений о характере угловой скорости относительного движения.

§ 49. Определение положения оси собственного вращения в пространстве

Дадим способы определения положения оси тела, вокруг которой оно закручено с достаточно большой скоростью, причем предположим, что эта ось (которую в дальнейшем называем осью собственного вращения) сохраняет неизменным направление в абсолютном пространстве.

Пусть заданы векторы $\overline{\mathbf{M}}_1$, $\overline{\mathbf{M}}_2$, $\overline{\mathbf{M}}_3$. Обозначим через $m_{i\xi}$, $m_{i\eta}$, $m_{i\zeta}$ $(i=1, 2, 3)$ их проекции на оси инерциальной системы координат $G\xi\eta\zeta$. Через m_{ix}, m_{iy}, m_{iz} — их проекции на связанные оси $Gxyz$ $(i=1, 2, 3)$. Предположим, что величины $m_{i\xi}$, $m_{i\eta}$, $m_{i\zeta}$ известны. Величины m_{ix}, m_{iy}, m_{iz} измеряются в процессе движения. Требуется определить направление оси Gz и величину угловой скорости с помощью известных величин $m_{i\xi}$, $m_{i\eta}$, $m_{i\zeta}$ и ранее наблюдавшихся значений m_{ix}, m_{iy}, m_{iz}.

Обозначим через $\dot{\varphi}$ величину угловой скорости системы относительно $G\xi\eta\zeta$. Если предположить, что векторы $\overline{\mathbf{M}}_1$, $\overline{\mathbf{M}}_2$, $\overline{\mathbf{M}}_3$ неизменны в пространстве $G\xi\eta\zeta$, тогда трехвекторник $\overline{\mathbf{M}}_1$, $\overline{\mathbf{M}}_2$, $\overline{\mathbf{M}}_3$ будет вращаться вокруг оси Gz с постоянной угловой скоростью, величина которой будет $\dot{\varphi}$, по отношению к наблюдателю, неизменно связанному с системой $Gxyz$. Это означает, что проекции любого из векторов $\overline{\mathbf{M}}_i$ на плоскость xGy будет иметь неизменное по величине значение и будет вращаться в этой плоскости вокруг точки G с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}$. Будем считать, что величины m_{ix}, m_{iy}, m_{iz} являются функциями времени, непрерывно дифференцируемыми на рассматриваемом отрезке времени. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dm_{ix}}{dt} &= \dot{\varphi} m_{iy}, \\ \frac{dm_{iy}}{dt} &= -\dot{\varphi} m_{ix} \qquad (i=1, 2, 3). \end{aligned} \tag{49.1}$$

Из уравнений (49.1) можно найти угловую скорость $\dot{\varphi}$. Действительно, умножая первое уравнение на m_{iy}, второе на m_{ix} и вычитая из первого результата второй, найдем

$$\frac{dm_{ix}}{dt} m_{iy} - \frac{dm_{iy}}{dt} m_{ix} = \dot{\varphi}\,(m_{iy}^2 + m_{ix}^2),$$

Откуда имеем

$$\dot{\varphi} = \frac{\dfrac{dm_{ix}}{dt} m_{iy} - \dfrac{dm_{iy}}{dt} m_{ix}}{m_{iy}^2 + m_{ix}^2}. \tag{49.2}$$

Предположим, что величины m_{ix}, m_{iy}, m_{iz} измерены в два соседних момента времени t_1 и t_2. Тогда из формулы (49.2) можно получить формулу для вычисления приближенного значения $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \frac{[m_{ix}(t_2) - m_{ix}(t_1)]\, m_{iy}(t_1) - [m_{iy}(t_2) - m_{iy}(t_1)]\, m_{ix}(t_1)}{(t_2 - t_1)\,(m_{iy}^2 + m_{ix}^2)}. \tag{49.3}$$

Формула (49.3) тем точнее дает значение угловой скорости, чем меньше оказывается величина $\dot{\varphi}[t_2 - t_1]$.

Найдем далее ориентацию оси собственного вращения. Предположим для этого, что векторы $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$ не компланарны, иначе говоря, не лежат в одной плоскости. Тогда вектор $\overline{z}_0$ можно представить в виде линейной комбинации ортов этих векторов:

$$\overline{z}_0 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \overline{m}_{i0}, \qquad (49.4)$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — вещественные числа, подлежащие определению, $\overline{m}_{i0}$ — орты векторов $\overline{M}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $\overline{z}_0$ — орт оси собственного вращения.

Для того чтобы найти уравнение для определения величин λ_1, λ_2 и λ_3, умножим обе части выражения (49.4) скалярно на вектор $\overline{M}_k$ $(k = 1, 2, 3)$. Тогда получим

$$m_{kz} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (\overline{m}_{i0}, \overline{M}_k) \qquad (k = 1, 2, 3). \qquad (49.5)$$

Ввиду некомпланарности векторов $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$ определитель системы (49.5) отличен от нуля; следовательно, система (49.5) всегда имеет единственное решение:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = \frac{1}{\Delta}\{m_{1z}[(\overline{M}_2, \overline{m}_{20})(\overline{M}_3, \overline{m}_{30}) - (\overline{M}_2, \overline{m}_{30})(\overline{M}_3, \overline{m}_{20})] - {}\\
- m_{2z}[(\overline{M}_1, \overline{m}_{20})(\overline{M}_3, \overline{m}_{30}) - (\overline{M}_3, \overline{m}_{20})(\overline{M}_1, \overline{m}_{30})] + {}\\
+ m_{3z}[(\overline{M}_1, \overline{m}_{20})(\overline{M}_2, \overline{m}_{30}) - (\overline{M}_2, \overline{m}_{20})(\overline{M}_1, \overline{m}_{30})]\};\\
\lambda_2 = \frac{1}{\Delta}\{-m_{1z}[(\overline{M}_2, \overline{m}_{10})(\overline{M}_3, \overline{m}_{30}) - (\overline{M}_3, \overline{m}_{10})(\overline{M}_2, \overline{m}_{30})] + {}\\
+ m_{2z}[(\overline{M}_1, \overline{m}_{10})(\overline{M}_3, \overline{m}_{30}) - (\overline{M}_3, \overline{m}_{10})(\overline{M}_1, \overline{m}_{30})] - {}\\
- m_{3z}[(\overline{M}_1, \overline{m}_{10})(\overline{M}_2, \overline{m}_{30}) - (\overline{M}_2, \overline{m}_{10})(\overline{M}_1, \overline{m}_{30})]\}; \qquad (49.6)\\
\lambda_3 = \frac{1}{\Delta}\{m_{1z}[(\overline{M}_2, \overline{m}_{10})(\overline{M}_3, \overline{m}_{20}) - (\overline{M}_3, \overline{m}_{10})(\overline{M}_2, \overline{m}_{20})] - {}\\
- m_{2z}[(\overline{M}_1, \overline{m}_{10})(\overline{M}_3, \overline{m}_{20}) - (\overline{M}_3, \overline{m}_{10})(\overline{M}_1, \overline{m}_{20})] + {}\\
+ m_{3z}[(\overline{M}_1, \overline{m}_{10})(\overline{M}_2, \overline{m}_{20}) - (\overline{M}_2, \overline{m}_{10})(\overline{M}_1, \overline{m}_{20})]\},
\end{aligned}$$

где Δ — определитель системы (49.5):

$$\Delta = (\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3).$$

Следовательно, этот определитель численно равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$.

Таким образом, из формулы (49.4) с помощью (49.6) можно определить ориентацию оси Gz, а именно, найти проекции орта $\overline{z}_0$ на оси инерциальной системы координат $G\xi\eta\zeta$:

$$a_{31} = (\overline{z}_0, \overline{\xi}_0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_i}{|\overline{M}_i|} m_{i\xi},$$

$$a_{32} = (\overline{z}_0, \overline{\eta}_0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_i}{|\overline{M}_i|} m_{i\eta}, \qquad (49.7)$$

$$a_{33} = (\overline{z}_0, \overline{\zeta}_0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_i}{|\overline{M}_i|} m_{i\zeta}.$$

Формулы (49.7) определяют ориентацию оси собственного вращения единственным образом, если в результате наблюдений найдены величины m_{iz} ($i = 1, 2, 3$). Так как последние не меняются со временем вследствие неизменности оси z в пространстве, то в формулах (49.6) при вычислении величин λ можно использовать величины m_{iz}, вычисленные для различных моментов времени. Формулы, полученные здесь для определения параметров вращательного движения, могут использоваться также в тех случаях, когда ось собственного вращения достаточно мало изменяет свое положение в пространстве за время наблюдения. Векторы $\overline{M}_i$ также могут не сохранять свое положение в пространстве постоянным. А именно, они могут вращаться, однако величина угловой скорости их вращения должна быть достаточно малой по сравнению с угловой скоростью собственного вращения системы $Gxyz$.

Представим параметры вращательного движения через измерения физических векторов. С точкой G свяжем векторы $\overline{S}$, $\overline{H}$, $\overline{r}$. Вектор $\overline{S}$ представляет собой направление на центр солнечного диска, $\overline{H}$ — напряженность магнитного поля Земли, $\overline{r}$ — направление геоцентрической вертикали места. С помощью этих трех векторов можно построить три системы некомпланарных векторов $\overline{S}$, $\overline{H}$, $\overline{N}$; $\overline{S}$, $\overline{r}$, $\overline{K}$ и $\overline{H}$, $\overline{r}$, $\overline{L}$, где $\overline{N} = \overline{S} \times \overline{H}$; $\overline{K} = \overline{S} \times \overline{r}$; $\overline{L} = \overline{H} \times \overline{r}$. Каждый из трех векторов можно взять в качестве векторов $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$, рассмотренных выше, если скорость собственного вращения системы $Gxyz$ достаточно велика, а промежуток времени наблюдения достаточно мал.

Возьмем векторы $\overline{S}$, $\overline{H}$, $\overline{N}$ в качестве триэдра $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$, рассмотренного ранее; тогда для определения ориентации оси

вращения Gz найдем

$$a_{31}=\frac{\lambda_1}{|\bar S|}s_\xi+\frac{\lambda_2}{|\bar H|}h_\xi+\frac{\lambda_3}{|\bar N|}n_\xi,$$
$$a_{32}=\frac{\lambda_1}{|\bar S|}s_\eta+\frac{\lambda_2}{|\bar H|}h_\eta+\frac{\lambda_3}{|\bar N|}n_\eta, \tag{49.8}$$
$$a_{33}=\frac{\lambda_1}{|\bar S|}s_\zeta+\frac{\lambda_2}{|\bar H|}h_\zeta+\frac{\lambda_3}{|\bar N|}n_\zeta.$$

Величины λ_1, λ_2, λ_3 удовлетворяют линейной системе

$$s_z=\lambda_1(\bar s_0,\ \bar S)+\lambda_2(\bar h_0,\ \bar S)+\lambda_3(\bar n_0,\ \bar S),$$
$$h_z=\lambda_1(\bar s_0,\ \bar H)+\lambda_2(\bar h_0,\ \bar H)+\lambda_3(\bar n_0,\ \bar H), \tag{49.9}$$
$$n_z=\lambda_1(\bar s_0,\ \bar N)+\lambda_2(\bar h_0,\ \bar N)+\lambda_3(\bar n_0,\ \bar N).$$

Так как векторы $\bar S$ и $\bar H$ ортогональны $\bar N$, то из системы (48.9) будем иметь

$$\lambda_3=\frac{n_z}{|\bar N|},$$
$$\lambda_1=\frac{s_z(\bar h_0,\ \bar H)-h_z(\bar h_0,\ \bar S)}{(\bar s_0,\ \bar S)(\bar h_0,\ \bar H)-(\bar s_0,\ \bar H)(\bar h_0,\ \bar S)}, \tag{49.10}$$
$$\lambda_2=\frac{-s_z(\bar s_0,\ \bar H)+h_z(\bar s_0,\ \bar S)}{(\bar s_0,\ \bar S)(\bar h_0,\ \bar H)-(\bar s_0,\ \bar H)(\bar h_0,\ \bar S)}.$$

Для сокращения записи окончательных формул введем в рассмотрение угол α между векторами $\bar S$ и $\bar H$. Тогда $(\bar s_0,\ \bar S)=|\bar S|$, $(\bar H,\ \bar h_0)=|\bar H|$, $(\bar s_0,\ \bar H)=|\bar H|\cos\alpha$, $(\bar h_0,\ \bar S)=|\bar S|\cos\alpha$, $|\bar N|=|\bar H||\bar S|\sin\alpha$, и, следовательно,

$$\lambda_1=\frac{s_z|\bar H|-h_z|\bar S|\cos\alpha}{|\bar S||\bar H|\sin^2\alpha},$$
$$\lambda_2=\frac{-s_z|\bar H|\cos\alpha+h_z|\bar S|}{|\bar S||\bar H|\sin^2\alpha}, \tag{49.11}$$
$$\lambda_3=\frac{n_z}{|\bar H||\bar S|\sin\alpha}.$$

Учитывая (49.6) и (49.11), найдем выражения для

$$a_{31}=\frac{1}{|\bar S||\bar H|\sin^2\alpha}\left\{\frac{s_\xi}{|\bar S|}[s_z|\bar H|-h_z|\bar S|\cos\alpha]+\right.$$
$$\left.+\frac{h_\xi}{|\bar H|}[h_z|\bar S|-s_z|\bar H|\cos\alpha]+\frac{n_\xi}{|\bar H||\bar S|}n_z\right\},$$

$$a_{32}=\frac{1}{|\overline{S}||\overline{H}|\sin^2\alpha}\left\{\frac{s_\eta}{|\overline{S}|}[s_z|\overline{H}|-h_z|\overline{S}|\cos\alpha]+\right.$$
$$\left.+\frac{h_\eta}{|\overline{H}|}[h_z|\overline{S}|-s_z|\overline{H}|\cos\alpha]+\frac{n_\eta}{|\overline{H}||\overline{S}|}n_z\right\}, \quad (49.12)$$
$$a_{33}=\frac{1}{|\overline{S}||\overline{H}|\sin^2\alpha}\left\{\frac{s_\zeta}{|\overline{S}|}[s_z|\overline{H}|-h_z|\overline{S}|\cos\alpha]+\right.$$
$$\left.+\frac{h_\zeta}{|\overline{H}|}[h_z|\overline{S}|-s_z|\overline{H}|\cos\alpha]+\frac{n_\zeta}{|\overline{H}||\overline{S}|}n_z\right\}.$$

Напомним, что формулами (49.12) можно пользоваться для определения ориентации оси собственного вращения даже в тех случаях, когда величины s_z, h_z, n_z наблюдаются в различные моменты времени. При этом $n_z=s_xh_y-s_yh_x$ есть z-я компонента векторного произведения векторов $\overline{S}$ и $\overline{H}$. Таким образом, для определения ориентации по векторам $\overline{S}$ и $\overline{H}$ необходимо иметь наблюдения по всем их проекциям.

Система $Gxyz$ вращается вокруг оси Gz с угловой скоростью $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi}=\frac{\frac{dh_x}{dt}h_y-\frac{dh_y}{dt}h_x}{h_y^2+h_x^2}=$$
$$=\frac{[h_x(t_2)-h_x(t_1)]\,h_y(t_1)-[h_y(t_2)-h_y(t_1)]\,h_x(t_1)}{(t_2-t_1)\,(h_x^2+h_y^2)}. \quad (49.13)$$

Обозначим через β угол между векторами $\overline{S}$ и $\overline{r}$. Тогда ориентация оси Gz с помощью векторов $\overline{S}$, $\overline{r}$ и $\overline{K}$ определится следующим образом:

$$a_{31}=\frac{1}{|\overline{S}||\overline{r}|\sin^2\beta}\left\{\frac{s_\xi}{|\overline{S}|}[s_z|\overline{r}|-r_z|\overline{S}|\cos\beta]+\right.$$
$$\left.+\frac{r_\xi}{|\overline{r}|}[r_z|\overline{S}|-s_z|\overline{r}|\cos\beta]+\frac{k_\xi}{|\overline{S}||\overline{r}|}k_z\right\},$$
$$a_{32}=\frac{1}{|\overline{S}||\overline{r}|\sin^2\beta}\left\{\frac{s_\eta}{|\overline{S}|}[s_z|\overline{r}|-r_z|\overline{S}|\cos\beta]+\right.$$
$$\left.+\frac{r_\eta}{|\overline{r}|}[r_z|\overline{S}|-s_z|\overline{r}|\cos\beta]+\frac{k_\eta}{|\overline{S}||\overline{r}|}k_z\right\}, \quad (49.14)$$
$$a_{33}=\frac{1}{|\overline{S}||\overline{r}|\sin^2\beta}\left\{\frac{s_\zeta}{|\overline{S}|}[s_z|\overline{r}|-r_z|\overline{S}|\cos\beta]+\right.$$
$$\left.+\frac{r_\zeta}{|\overline{r}|}[r_z|\overline{S}|-s_z|\overline{r}|\cos\beta]+\frac{k_\zeta}{|\overline{S}||\overline{r}|}k_z\right\}.$$

Обозначим через γ угол между векторами $\overline{H}$ и $\overline{r}$. Тогда ориентация оси вращения Gz может быть определена с помощью

векторов $\overline{\mathbf{H}}$, $\overline{\mathbf{r}}$, $\overline{\mathbf{L}}$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
a_{31} &= \frac{1}{|\overline{\mathbf{H}}||\overline{\mathbf{r}}|\sin^2\gamma}\left\{\frac{h_\xi}{|\overline{\mathbf{H}}|}[h_z|\overline{\mathbf{r}}|-r_z|\overline{\mathbf{H}}|\cos\gamma]+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{r_\xi}{|\overline{\mathbf{r}}|}[r_z|\overline{\mathbf{H}}|-h_z|\overline{\mathbf{r}}|\cos\gamma]+\frac{l_\xi}{|\overline{\mathbf{r}}||\overline{\mathbf{H}}|}l_z\right\},\\
a_{32} &= \frac{1}{|\overline{\mathbf{H}}||\overline{\mathbf{r}}|\sin^2\gamma}\left\{\frac{h_\eta}{|\overline{\mathbf{H}}|}[h_z|\overline{\mathbf{r}}|-r_z|\overline{\mathbf{H}}|\cos\gamma]+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{r_\eta}{|\overline{\mathbf{r}}|}[r_z|\overline{\mathbf{H}}|-h_z|\overline{\mathbf{r}}|\cos\gamma]+\frac{l_\eta}{|\overline{\mathbf{H}}||\overline{\mathbf{r}}|}l_z\right\},\\
a_{33} &= \frac{1}{|\overline{\mathbf{H}}||\overline{\mathbf{r}}|\sin^2\gamma}\left\{\frac{h_\zeta}{|\overline{\mathbf{H}}|}[h_z|\overline{\mathbf{r}}|-r_z|\overline{\mathbf{H}}|\cos\gamma]+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{r_\zeta}{|\overline{\mathbf{r}}|}[r_z|\overline{\mathbf{H}}|-h_z|\overline{\mathbf{r}}|\cos\gamma]+\frac{l_\zeta}{|\overline{\mathbf{H}}||\overline{\mathbf{r}}|}l_z\right\}.
\end{aligned}
\tag{49.15}
$$

При использовании формул (49.14) и (49.15) возникает необходимость отыскания всех проекций геоцентрической вертикали на связанные оси. Предположим, что бортовые системы не имеют в своем составе фиксаторов вертикали. Однако существует прибор, фиксирующий инфракрасное излучение Земли. Пусть этот прибор закреплен в плоскости xGy так, что он вращается вместе с системой xGy вокруг оси Gz, воспринимая инфракрасное излучение Земли в плоскости xGy. Нашей ближайшей задачей является определение проекции r_z геоцентрической вертикали через угловую скорость $\dot\varphi$ и время, в течение которого прибор фиксирует излучение Земли.

Предположим, что Земля неподвижна и представляет собой шар радиусом R. Пусть точка G находится на высоте h над земной поверхностью. Пусть далее плоскость xGy пересекает земную сферу по кругу C с центром O_2, центр Земли — O_1. Найдем угол, под которым наблюдатель, находящийся в плоскости xGy, видит круг C. С этой целью проведем две касательные GC_1 и GC_2 к этому кругу в плоскости xGy.

Обозначим через δ_1 угол между осью Gz и вертикалью O_1G, тогда

$$
\begin{aligned}
O_1O_2 &= (R+h)\cos\delta_1,\\
O_2C_2 &= \sqrt{R^2-(R+h)^2\cos^2\delta_1},\\
O_2G &= (R+h)\sin\delta_1.
\end{aligned}
$$

Обозначим через δ_2 угол между O_2G и C_2G в плоскости xGy; тогда

$$
\sin\delta_2 = \frac{O_2C_2}{O_2G} = \frac{\sqrt{R^2-(R+h)^2\cos^2\delta_1}}{(R+h)\sin\delta_1}. \tag{49.16}
$$

Пусть τ — промежуток времени, за который ось приемника инфракрасного излучения проходит угол между касательными GC_2 и GC_1 к кругу C. Тогда

$$\delta_2 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}\tau, \tag{49.17}$$

так как δ_2 есть половина угла зрения, под которым наблюдатель видит Землю в плоскости xGy. Подставляя выражение (49.17) в (49.16), найдем

$$\sin\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}\tau\right) = \frac{\sqrt{R^2-(R+h)^2\cos^2\delta_1}}{(R+h)\sin\delta_1},$$

откуда

$$\cos^2\delta_1 = \operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}\tau\right)\left[\frac{R^2}{(R+h)^2}-1\right] + \frac{R^2}{(R+h)^2}. \tag{49.18}$$

Формула (49.18) не дает возможности однозначно определить значения проекции геоцентрической централи на ось Gz, именно

$$r_{z_{1,2}} = \pm\sqrt{\operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}\tau\right)\left[-1-\frac{R^2}{(R+h)^2}\right] + \frac{R^2}{(R+h)^2}}. \tag{49.19}$$

В формулу для определения ориентации оси (49.15), кроме r_z, входит величина l_z, представляющая собой проекцию векторного произведения $\overline{H}\times\overline{r}$ на ось Gz: $l_z = h_x r_y - h_y r_x$. Так как проекции r_x и r_y невозможно вычислить с помощью показателя датчика инфракрасного излучения, то для определения величины l_z придется воспользоваться условием нормировки $a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=1$. Это условие дает квадратное уравнение для определения величины l_z:

$$al_z^2 + bl_z + c = 1. \tag{49.20}$$

Из уравнения (49.20) можно определить два значения l_z:

$$l_z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a(c-1)}}{2a}.$$

Ввиду того, что коэффициенты уравнения (49.20) зависят от r_z, которое определено неоднозначно, то для величины l_z получены четыре возможных значения. Следовательно, использование сигналов магнитометров и сигналов датчика инфракрасного излучения позволяет решить задачу ориентации оси собственного вращения лишь с точностью до четырех возможных положений.

Найдем эти возможные четыре положения. С этой целью определим коэффициенты уравнения (49.20) через исходные величины, входящие в (49.15).

Так как $\overline{z}_0 = \lambda_1\overline{h}_0 + \lambda_2\overline{r}_0 + \lambda_3\overline{l}_0$, то, возводя в квадрат, найдем

$$1 = \overline{z}_0^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2\cos\gamma.$$

Подставляя в последнее уравнение значение λ_i ($i=1, 2, 3$) из формул (49.6), получим при условии $\overline{M}_1 = \overline{H}$, $\overline{M}_2 = \overline{r}$, $M_3 = \overline{L}$

$$l_z^2 \left[\frac{1}{|\overline{H}||\overline{r}|\sin\gamma}\right]^2 + \frac{1}{[|\overline{H}|^2|\overline{r}|\sin^2\gamma]^2} \times$$
$$\times \{[h_z|\overline{r}| - r_z|\overline{H}|\cos\gamma]^2 + [r_z|\overline{H}| - h_z|\overline{r}|\cos\gamma]^2 +$$
$$+ 2[h_z|\overline{r}| - r_z|\overline{H}|\cos\gamma]\,[r_z|\overline{H}| - h_z|\overline{r}|\cos\gamma]\cos\gamma\} - 1 = 0.$$

Таким образом, мы получили квадратное уравнение относительно величины l_z, где

$$a = \frac{1}{[|\overline{H}||\overline{r}|\sin\gamma]^2}; \qquad b = 0,$$

$$c = \frac{1}{[|\overline{H}||\overline{r}|\sin^2\gamma]^2}\{h_z^2|\overline{r}|^2(1-\cos^2\gamma) + r_z^2|\overline{H}|^2(1-\cos^2\gamma) +$$
$$+ h_z r_z 2|\overline{H}||\overline{r}|\cos\gamma(\cos^2\gamma - 1)\} - 1.$$

Учитывая выражение для r_z (49.19) и решения квадратного уравнения (49.20), получим четыре значения l_z:

$$l_z = [|\overline{H}|^2|\overline{r}|^2\sin^2\gamma - h_z^2|\overline{r}|^2 - r_{z1}^2|\overline{H}|^2 + 2|\overline{H}||\overline{r}|h_z r_{z1}\cos\gamma]^{1/2},$$
$$l_z = -[|\overline{H}|^2|\overline{r}|^2\sin^2\gamma - h_z^2|\overline{r}|^2 - r_{z1}^2|\overline{H}|^2 + 2|\overline{H}||\overline{r}|h_z r_{z1}\cos\gamma]^{1/2},$$
$$l_z = [|\overline{H}|^2|\overline{r}|^2\sin^2\gamma - h_z^2|\overline{r}|^2 - r_{z2}^2|\overline{H}|^2 + 2|\overline{H}||\overline{r}|h_z r_{z2}\cos\gamma]^{1/2},$$
$$l_z = [|\overline{H}|^2|\overline{r}|^2\sin^2\gamma - h_z^2|\overline{r}|^2 - r_{z2}^2|\overline{H}|^2 + 2|\overline{H}||\overline{r}|h_z r_{z2}\cos\gamma]^{1/2}.$$

Используя четыре значения величины l_z и два значения величины r_z из формул (49.15), получим четыре возможные ориентации оси Gz: $(a_{31})_i$, $(a_{32})_i$, $(a_{33})_i$, где $i=1, 2, 3, 4$.

Заметим, что при использовании векторов $\overline{S}$, $\overline{H}$, $\overline{N}$ задача определения ориентации решается однозначно лишь в тех случаях, когда имеется возможность наблюдать проекции вектора $\overline{S}$, иначе говоря, когда точка G не находится в тени. Векторы $\overline{H}$, $\overline{r}$, $\overline{L}$ позволяют определить параметры вращательного движения на всей орбите. Однако это определение производится неоднозначно.

Укажем способ определения положения оси собственного вращения с использованием лишь одного вектора $\overline{H}$.

Пусть t_1 и t_2 — некоторые два момента, в которые измеряются компоненты вектора $\overline{H}$. Положим $\overline{H}_i = \overline{H}(t_i)$ ($i = 1, 2$), $\overline{H}_{12} = \overline{H}_1 \times \overline{H}_2$. Будем считать, что норма $\overline{H}_{12}$ не равна нулю. Таким образом, векторы $\overline{H}_1$, $\overline{H}_2$ и $\overline{H}_{12}$ будут некомпланарны, тогда орт оси собственного вращения может быть представлен в виде линейной комбинации ортов этих векторов:

$$\overline{z}_0 = \lambda_1\overline{h}_{10} + \lambda_2\overline{h}_{20} + \lambda_3\overline{h}_{120}. \qquad (49.21)$$

Умножая обе части равенства (49.21) скалярно на векторы $\overline{H}_1$, $\overline{H}_2$ и $\overline{H}_{12}$, получим для определения величин λ_1, λ_2, λ_3 систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (\overline{z}_0, \overline{H}_1) &= h_{1z} = \lambda_1 |\overline{H}_1| + \lambda_2 |\overline{H}_1| \cos\alpha_{12}, \\ (\overline{z}_0, \overline{H}_2) &= h_{2z} = \lambda_2 |\overline{H}_2| + \lambda_1 |\overline{H}_2| \cos\alpha_{12}, \\ (\overline{z}_0, \overline{H}_{12}) &= h_{12z} = \lambda_3 |\overline{H}_{12}|, \end{aligned} \qquad (49.22)$$

где α_{12} — угол между векторами $\overline{H}_1$ и $\overline{H}_2$. Из уравнений (49.22) находим

$$\lambda_1 = \frac{\dfrac{h_{1z}}{|\overline{H}_1|} - \cos\alpha_{12}\dfrac{h_{2z}}{|\overline{H}_2|}}{\sin^2\alpha_{12}},$$

$$\lambda_2 = \frac{\dfrac{h_{2z}}{|\overline{H}_2|} - \cos\alpha_{12}\dfrac{h_{1z}}{|\overline{H}_1|}}{\sin^2\alpha_{12}},$$

$$\lambda_3 = \frac{h_{12z}}{|\overline{H}_1||\overline{H}_2|\sin\alpha_{12}}.$$

Следовательно, направление оси собственного вращения будет даваться формулой

$$\overline{z}_0 = \frac{\dfrac{h_{1z}}{|\overline{H}_1|} - \cos\alpha_{12}\dfrac{h_{2z}}{|\overline{H}_2|}}{\sin^2\alpha_{12}}\overline{h}_{10} + \frac{\dfrac{h_{2z}}{|\overline{H}_2|} - \cos\alpha_{12}\dfrac{h_{1z}}{|\overline{H}_1|}}{\sin^2\alpha_{12}}\overline{h}_{20} + \frac{h_{12z}}{|\overline{H}_1||\overline{H}_2|\sin\alpha_{12}}\overline{h}_{120}. \qquad (49.23)$$

Определим теперь величину угловой скорости и направление вращения. Выберем два момента τ_1 и τ_2 так, чтобы τ_2 было больше τ_1 и величина $\tau_2 - \tau_1$ достаточно мала. Выбор этой малости фиксируется тем, что векторы $\overline{H}(\tau_1)$ и $\overline{H}(\tau_2)$ были достаточно близкими. Введем в рассмотрение векторы $\overline{a}_i$: $\overline{a}_i = \overline{z}_0 \times \overline{H}(\tau_i)$ $(i = 1, 2)$. Предположим, что моменты наблюдения τ_1 и τ_2 выбраны так, что интервал $[\tau_1, \tau_2]$ лежит полностью во временном интервале, на котором датчик инфракрасного излучения дает сигнал «Земля». Положим

$$\delta = (\overline{a}_1, (\overline{a}_2 \times \overline{z}_0)). \qquad (49.24)$$

Если величина δ положительна, то вращение происходит вокруг оси Gz против часовой стрелки; если отрицательна, то вращение происходит по часовой стрелке (если смотреть с отрицательного направления оси Gz). Угловая скорость вращения

при этом определится формулой

$$\dot{\varphi}=\frac{\arccos\left(\frac{(\bar{a}_1,\ \bar{a}_2)}{|\bar{a}_1||\bar{a}_2|}\right)}{\tau_2-\tau_1}. \qquad (49.25)$$

Найдем явное выражение величины (49.24):

$$\delta=h_x(\tau_1)h_y(\tau_2)-h_y(\tau_1)h_x(\tau_2).$$

Таким образом, если $h_x(\tau_1)h_y(\tau_2)-h_y(\tau_1)h_x(\tau_2)>0$, то вращение происходит против часовой стрелки, если $h_x(\tau_1)h_y(\tau_2)-h_y(\tau_1)h_x(\tau_2)<0$, то по часовой стрелке.

§ 50. Определение параметров свободного вращения динамически симметричного тела

Если момент количества движения сохраняет постоянное значение, то вращательное движение системы $Gxyz$ по отношению к системе $G\xi\eta\zeta$ вокруг точки G сводится к двум вращательным движениям, а именно, к вращению вокруг оси Gz с угловой скоростью ω_2 и к вращению этой оси вокруг вектора $\bar{L}_k$ с угловой скоростью ω_1, где $\bar{L}_k$—вектор момента количества движения. При этом вектор мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ лежит в плоскости, проходящей через точку G и содержащую векторы $\bar{z}_0$, $\bar{l}_{0k}$ ($\bar{l}_{0k}$ есть орт момента количества движения). Далее будем считать, что точка G является начальной точкой этого орта. Таким образом, $\bar{\omega}=\omega_1\bar{l}_{0k}+\omega_2\bar{z}_0$.

Задача определения параметров вращательного движения состоит в отыскании ориентации оси собственного вращения и оси мгновенной угловой скорости, а также в определении угловых скоростей вращений вокруг этих осей. Иначе говоря, требуется определить величины ω_ξ, ω_η, ω_ζ, $a_{31}=(\bar{z}_0,\ \bar{\xi}_0)$, $a_{32}=(\bar{z}_0,\ \bar{\eta}_0)$, $a_{33}=(\bar{z}_0,\ \bar{\zeta}_0)$, $|\bar{\omega}|$ и ω_2.

Для решения поставленной задачи введем в рассмотрение три некомпланарных вектора $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$, $\bar{M}_3$, которые являются постоянными в системе $G\xi\eta\zeta$. Для наблюдателя, связанного с системой $Gxyz$, векторы $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$, $\bar{M}_3$ будут вращаться по отношению к системе $Gxyz$ с угловой скоростью $\bar{\omega}$. При этом вращательное движение может быть разложено на две составляющие, т. е. векторы $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$, $\bar{M}_3$ вращаются вокруг вектора $\bar{L}_k$ с постоянной угловой скоростью ω_1, и $\bar{L}_k$ вращается вокруг оси G_z с постоянной угловой скоростью ω_2. При этом в течение всего времени движения угол между векторами $\bar{l}_{0k}$ и $\bar{z}_0$ сохра-

няется неизменным. Будем считать, что величины $m_{i\xi}$, $m_{i\eta}$, $m_{i\zeta}$ ($i=1, 2, 3$) заданы и что величины m_{ix}, m_{iy}, m_{iz} ($i=1, 2, 3$) определяются с помощью наблюдений. Перейдем к определению ортов $\overline{z}_0$ и $\overline{l}_{0k}$. Ввиду некомпланарности векторов $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$ существуют такие λ_1, λ_2, λ_3 и μ_1, μ_2, μ_3, что

$$\overline{z}_0 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \overline{m}_{i0}, \tag{50.1}$$

$$\overline{l}_{0k} = \sum_{i=1}^{3} \mu_i \overline{m}_{i0}. \tag{50.2}$$

Умножая обе части выражения (50.1) скалярно на вектор $\overline{M}_k$ ($k=1, 2, 3$), получим систему уравнений для определения величин λ_1, λ_2, λ_3, а именно, систему

$$\left.\begin{aligned} m_{1z} &= \lambda_1(\overline{m}_{10}, \overline{M}_1) + \lambda_2(\overline{m}_{20}, \overline{M}_1) + \lambda_3(\overline{m}_{30}, \overline{M}_1),\\ m_{2z} &= \lambda_1(\overline{m}_{10}, \overline{M}_2) + \lambda_2(\overline{m}_{20}, \overline{M}_2) + \lambda_3(\overline{m}_{30}, \overline{M}_2),\\ m_{3z} &= \lambda_1(\overline{m}_{10}, \overline{M}_3) + \lambda_2(\overline{m}_{20}, \overline{M}_3) + \lambda_3(\overline{m}_{30}, \overline{M}_3). \end{aligned}\right\} \tag{50.3}$$

Разрешая систему (50.3) относительно λ_i, найдем

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \frac{1}{\Delta}\{m_{1z}[(\overline{M}_2, \overline{m}_{20})(\overline{M}_3, \overline{m}_{30}) - (\overline{M}_2, \overline{m}_{30})(\overline{M}_3, \overline{m}_{20})] &- \\ - m_{2z}[(\overline{M}_1, \overline{m}_{20})(\overline{M}_3, \overline{m}_{30}) - (\overline{M}_3, \overline{m}_{20})(\overline{M}_1, \overline{m}_{30})] &+ \\ + m_{3z}[(\overline{M}_1, \overline{m}_{20})(\overline{M}_2, \overline{m}_{30}) - (\overline{M}_2, \overline{m}_{20})(\overline{M}_1, \overline{m}_{30})]\}&, \\ \lambda_2 = \frac{1}{\Delta}\{-m_{1z}[(\overline{M}_2, \overline{m}_{10})(\overline{M}_3, \overline{m}_{30}) - (\overline{M}_3, \overline{m}_{10})(\overline{M}_2, \overline{m}_{30})] &+ \\ + m_{2z}[(\overline{M}_1, \overline{m}_{10})(\overline{M}_3, \overline{m}_{30}) - (\overline{M}_3, \overline{m}_{10})(\overline{M}_1, \overline{m}_{30})] &- \\ - m_{3z}[(\overline{M}_1, \overline{m}_{10})(\overline{M}_2, \overline{m}_{30}) - (\overline{M}_2, \overline{m}_{10})(\overline{M}_1, \overline{m}_{30})]\}&, \\ \lambda_3 = \frac{1}{\Delta}\{m_{1z}[(\overline{M}_2, \overline{m}_{10})(\overline{M}_3, \overline{m}_{20}) - (\overline{M}_3, \overline{m}_{10})(\overline{M}_2, \overline{m}_{20})] &- \\ - m_{2z}[(\overline{M}_1, \overline{m}_{10})(\overline{M}_3, \overline{m}_{20}) - (\overline{M}_3, \overline{m}_{10})(\overline{M}_1, \overline{m}_{20})] &+ \\ + m_{3z}[(\overline{M}_1, \overline{m}_{10})(\overline{M}_2, \overline{m}_{20}) - (\overline{M}_2, \overline{m}_{10})(\overline{M}_1, \overline{m}_{20})]\}&, \end{aligned} \tag{50.4}$$

где Δ — определитель системы (50.3); $\Delta = (\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3)$.

Подставив формулы (50.4) в (50.1), найдем выражение орта $\overline{z}_0$ через орты $\overline{m}_{i0}$ и величины (50.4). Вычислим положение этого орта в некоторые моменты времени t_1, t_2, t_3, $\overline{z}_0(t_i) = \overline{z}_{0i}$ ($i=1, 2, 3$) и умножим скалярно выражение (50.2) последовательно на векторы $\overline{z}_{0i}$ ($i=1, 2, 3$). Тогда для определения величины

μ_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ получим систему линейных уравнений

$$
\begin{aligned}
(\bar{l}_{0k},\ \bar{z}_{01}) &= \cos\theta_1 = \sum_{i=1}^{3}(\mu_i\bar{m}_{i0},\ \bar{z}_{01}),\\
(\bar{l}_{0k},\ \bar{z}_{02}) &= \cos\theta_1 = \sum_{i=1}^{3}(\mu_i\bar{m}_{i0},\ \bar{z}_{02}),\\
(\bar{l}_{0k},\ \bar{z}_{03}) &= \cos\theta_1 = \sum_{i=1}^{3}(\mu_i\bar{m}_{i0},\ \bar{z}_{03}).
\end{aligned} \tag{50.5}
$$

Разрешая систему (50.5), находим

$$
\begin{aligned}
\mu_1 = \frac{\cos\theta_1}{\Delta}\{&[(\bar{z}_{02},\ \bar{m}_{20})(\bar{z}_{03},\ \bar{m}_{30})-(\bar{z}_{03},\ \bar{m}_{20})(\bar{z}_{02},\ \bar{m}_{30})]-\\
&-[(\bar{z}_{01},\ \bar{m}_{20})(\bar{z}_{03},\ \bar{m}_{30})-(\bar{z}_{03},\ \bar{m}_{20})(\bar{z}_{01},\ \bar{m}_{20})]+\\
&+[(\bar{z}_{01},\ \bar{m}_{20})(\bar{z}_{02},\ \bar{m}_{30})-(\bar{z}_{02},\ \bar{m}_{20})(\bar{z}_{01},\ \bar{m}_{30})]\},\\
\mu_2 = \frac{\cos\theta_1}{\Delta}\{&-[(\bar{z}_{02},\ \bar{m}_{10})(\bar{z}_{03},\ \bar{m}_{30})-(\bar{z}_{03},\ \bar{m}_{10})(\bar{z}_{02},\ \bar{m}_{30})]+\\
&+[(\bar{z}_{01},\ \bar{m}_{10})(\bar{z}_{03},\ \bar{m}_{30})-(\bar{z}_{03},\ \bar{m}_{10})(\bar{z}_{01},\ \bar{m}_{30})]-\\
&-[(\bar{z}_{01},\ \bar{m}_{10})(\bar{z}_{02},\ \bar{m}_{30})-(\bar{z}_{02},\ \bar{m}_{10})(\bar{z}_{01},\ \bar{m}_{30})]\},\\
\mu_3 = \frac{\cos\theta_1}{\Delta}\{&[(\bar{z}_{02},\ \bar{m}_{10})(\bar{z}_{03},\ \bar{m}_{20})-(\bar{z}_{02},\ \bar{m}_{20})(\bar{z}_{03},\ \bar{m}_{10})]-\\
&-[(\bar{z}_{01},\ \bar{m}_{10})(\bar{z}_{03},\ \bar{m}_{20})-(\bar{z}_{03},\ \bar{m}_{10})(\bar{z}_{01},\ \bar{m}_{20})]+\\
&+[(\bar{z}_{01},\ \bar{m}_{10})(\bar{z}_{02},\ \bar{m}_{20})-(\bar{z}_{02},\ \bar{m}_{10})(\bar{z}_{01},\ \bar{m}_{20})]\},
\end{aligned} \tag{50.6}
$$

где Δ — определитель системы (50.5). Для окончательного определения величин μ_i необходимо знать величину $\cos\theta_1$. Условие нормировки, получаемое из выражения (50.2),

$$
(\bar{l}_{0k})^2 = \mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2+2\,(\mu_1\mu_2(\bar{m}_{10},\ \bar{m}_{20})+\mu_1\mu_3(\bar{m}_{10},\ \bar{m}_{30})+\\
+\mu_2\mu_3(\bar{m}_{20},\ \bar{m}_{30}))=1
$$

дает значение $\cos\theta_1$ с точностью до знака. Действительно, величины (50.6) можно представить в форме

$$
\mu_i=\cos\theta_1\mu_{i0}\qquad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{50.7}
$$

Следовательно,

$$
\cos^2\theta_1 = \\
=\frac{1}{\mu_{10}^2+\mu_{20}^2+\mu_{30}^2+2\,(\mu_{10}\ \mu_{20}\,(\bar{m}_{10},\ \bar{m}_{20})+\mu_{10}\ \mu_{30}\,(\bar{m}_{10},\ \bar{m}_{30})+\mu_{20}\mu_{30}\,(\bar{m}_{20},\ \bar{m}_{30}))}, \tag{50.8}
$$

откуда

$$
\cos\theta_1 = \\
=\pm\left[\frac{1}{\mu_{10}^2+\mu_{20}^2+\mu_{30}^2+2\ (\mu_{10}\,\mu_{20}\,(\bar{m}_{10}\ \bar{m}_{20})+\mu_{10}\ \mu_{30}\,(\bar{m}_{10},\ \bar{m}_{30})+\mu_{20}\ \mu_{30}\,(\bar{m}_{20}\ \bar{m}_{30}))}\right]^{1/2}.
$$

Выберем знак плюс, т. е. будем считать, что угол θ_1 в течение всего движения остается острым. Такой выбор угла θ_1 позволяет определить однозначно величины μ_1, μ_2, μ_3 и, следовательно, орт $\bar{\text{l}}_{0k}$.

Перейдем теперь к определению величин угловых скоростей. Каждый из векторов $\bar{\text{l}}_{0k}\times\bar{\text{M}}_i$ располагается в плоскости, перпендикулярной орту $\bar{\text{l}}_{0k}$ и проходящей через точку G. Заметим, что векторы $\bar{\text{l}}_{0k}\times\bar{\text{M}}_i$ ($i=1$, 2, 3) сохраняют свою величину и вращаются в этой плоскости с угловой скоростью ω_1 вокруг вектора $\bar{\text{L}}$ по отношению к наблюдателю, связанному неизменно с системой $Gxyz$. Рассмотрим вектор $\bar{\text{z}}_0\times\bar{\text{l}}_{0k}$. Этот вектор располагается в пересечении плоскости xGy и плоскости, перпендикулярной $\bar{\text{l}}_{0k}$. Следовательно, его можно рассматривать как вектор, располагающийся на линии узлов. Тогда можно утверждать, что он вращается в плоскости xGy вокруг оси Gz с угловой скоростью ω_2, откуда находим выражение угловых скоростей ω_1 и ω_2.

Пусть t_1 и t_2—некоторые последовательные моменты времени. Тогда

$$\omega_2=\frac{1}{(t_2-t_1)}\left[\arccos(\bar{\text{x}}_0,\ \bar{\text{n}}_0(t_1))-\arccos(\bar{\text{x}}_0,\ \bar{\text{n}}_0(t_2))\right], \tag{50.9}$$

$$\omega_1=\frac{1}{(t_2-t_1)}\left[\arccos(\bar{\text{x}}_0,\ (t_1),\ \bar{\text{n}}_0(t_1))-\arccos(\bar{\text{x}}_0(t_2),\ \bar{\text{n}}_0(t_2))\right]. \tag{50.10}$$

В формулах (50.9) и (50.10) вектор $\bar{\text{n}}_0$ есть орт вектора $\bar{\text{z}}_0\times\bar{\text{l}}_{0k}$, а $\bar{\text{x}}_0$—орт вектора $\bar{\text{l}}_{0k}\times\bar{\text{M}}_i$ для некоторого фиксированного вектора $\bar{\text{M}}_i$. Формулы (50.1) и (50.2), а также (50.9) и (50.10) позволяют определить все параметры вращательного движения. Подставляя формулы (50.9) и (50.10), а также (50.1) и (50.2) в выражение угловой скорости, найдем

$$\bar{\omega}=\sum_{i=1}^{3}(\omega_1\mu_i+\omega_2\lambda_i)\bar{\text{m}}_{i0}. \tag{50.11}$$

Формула (50.11) позволяет найти проекции вектора $\bar{\omega}$ на оси $O\xi\eta\zeta$ и величину угловой скорости:

$$\omega_\xi=\sum_{i=1}^{3}\frac{(\omega_1\mu_i+\omega_2\lambda_i)}{|\bar{\text{M}}_i|}m_{i\xi},\quad \omega_\eta=\sum_{i=1}^{3}\frac{(\omega_1\mu_i+\omega_2\lambda_i)}{|\bar{\text{M}}_i|}m_{i\eta},$$
$$\omega_\zeta=\sum_{i=1}^{3}\frac{(\omega_1\mu_i+\omega_2\lambda_i)}{|\bar{\text{M}}_i|}m_{i\zeta}; \tag{50.12}$$

$$|\bar{\omega}| = \Big[\sum_{i=1}^{3}(\omega_1\mu_i+\omega_2\lambda_i)^2 + 2(\omega_1\mu_1+\omega_2\lambda_1)(\omega_2\mu_2+\omega_2\lambda_2)(\bar{m}_{10},\ \bar{m}_{20}) + \\ +(\omega_1\mu_1+\omega_2\lambda_1)(\omega_1\mu_3+\omega_2\lambda_3)(\bar{m}_{10},\bar{m}_{30}) + \\ +(\omega_1\mu_2+\omega_2\lambda_2)(\omega_2\mu_3+\omega_2\lambda_3)(\bar{m}_{20},\ \bar{m}_{30})\Big]^{1/2}. \quad (50.13)$$

Для ориентации оси собственного вращения имеем

$$a_{31}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\lambda_i}{|\bar{M}_i|}m_{i\xi},$$
$$a_{32}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\lambda_i}{|\bar{M}_i|}m_{i\eta}, \quad (50.14)$$
$$a_{33}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\lambda_i}{|\bar{M}_i|}m_{i\zeta}.$$

Угловая скорость собственного вращения определяется при этом формулой (50.10). Это утверждение справедливо, если ввести понятие угловой скорости собственного вращения с помощью инерциальной системы координат, для которой ось $G\zeta$ совпадает с направлением вектора кинетического момента. Введем в рассмотрение вновь векторы $\bar{S}$, $\bar{H}$, $\bar{N}$, которые использовались в § 49 этой главы. С помощью этих векторов можно построить выражения, определяющие параметры вращательного движения. При этом векторы $\bar{S}$, $\bar{H}$, $\bar{N}$ позволяют на освещенной стороне однозначно определить все упомянутые параметры. Векторы $\bar{S}$, $\bar{r}$, $\bar{K}$ и $\bar{H}$, $\bar{r}$, $\bar{L}$ не позволяют однозначно определить параметры вращательного движения, так как, во всяком случае, по одному наблюдению бортовые системы никак не могут фиксировать вертикаль, и, следовательно, непосредственно компоненты вектора $\bar{r}$ не определяются.

Приведем теперь способ определения оси собственного вращения и оси мгновенной угловой скорости при использовании одного вектора $\bar{H}$. Пусть $\bar{M}$—некоторый постоянный вектор по отношению к абсолютной системе координат. Тогда величина m_z (проекция $\bar{M}$ на ось Gz) даст возможность определить период вращения оси Gz вокруг вектора момента количества движения. Этот период будет совпадать с периодом повторения максимумов величины m_z. Обозначим его через τ. Будем считать, что скорость вращения вектора $\bar{H}$ при движении точки G вдоль орбиты достаточно мала по сравнению со скоростью вращения системы $Gxyz$ по отношению к абсолютной системе координат; тогда упомянутый период τ можно приближенно определить, исходя из h_z.

Именно, будем считать, что период повторения максимумов функций h_z достаточно хорошо совпадает с величиной τ.

Возьмем в трех точках орбиты векторы $\bar{H}_1$, $\bar{H}_2$ и $\bar{H}_3$ так, чтобы они были некомпланарными, тогда орт $\bar{z}_0$ оси собственного вращения можно будет представить в виде линейной комбинации ортов этих векторов:

$$\bar{z}_0 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \bar{h}_{i0}. \tag{50.15}$$

Вектор $\bar{z}_0$ вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вектора момента количества движения. Следовательно, величины λ_i в выражении (50.15) будут периодическими функциями времени с периодом τ.

Будем считать, что вектор $\bar{H}_1$ относится к моменту времени t, $\bar{H}_2$ — к моменту $t - n_1\tau$ и $\bar{H}_3$ — к моменту $t - n_2\tau$, где $n_2 > n_1$ — целые положительные числа. Из выражения (50.15) вследствие периодичности величин λ будем иметь

$$z_0(t - n_k\tau) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t)\, \bar{h}_{i0} \qquad (k = 1,\ 2). \tag{50.16}$$

Умножая (50.15) на $\bar{H}_1$, а (50.16) на $\bar{H}_i$ ($i = 1, 2, 3$) скалярно, получим для величин λ_i систему уравнений

$$\begin{aligned} h_{1z} &= (\bar{z}_0,\ \bar{H}_1) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (\bar{h}_{i0},\ \bar{H}_1), \\ h_{2z} &= (\bar{z}_0,\ \bar{H}_2) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (\bar{h}_{i0},\ \bar{H}_2), \\ h_{3z} &= (\bar{z}_0,\ \bar{H}_3) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (\bar{h}_{i0},\ \bar{H}_3). \end{aligned} \tag{50.17}$$

Разрешая систему (50.17), найдем

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \frac{1}{\Delta} \{ & h_{1z} [(\bar{H}_2,\ \bar{h}_{20})(\bar{H}_3,\ \bar{h}_{30}) - (\bar{H}_2,\ \bar{h}_{30})(\bar{H}_3,\ \bar{h}_{20})] - \\ & - h_{2z} [(\bar{H}_1,\ \bar{h}_{20})(\bar{H}_3,\ \bar{h}_{30}) - (\bar{H}_3,\ \bar{h}_{20})(\bar{H}_1,\ \bar{h}_{30})] + \\ & + h_{3z} [(\bar{H}_1,\ \bar{h}_{20})(\bar{H}_2,\ \bar{h}_{30}) - (\bar{H}_2,\ \bar{h}_{20})(\bar{H}_1,\ \bar{h}_{30})] \}, \qquad (50.18) \\ \lambda_2 = \frac{1}{\Delta} \{ & - h_{1z} [(\bar{H}_2,\ \bar{h}_{10})(\bar{H}_3,\ \bar{h}_{30}) - (\bar{H}_3,\ \bar{h}_{10})(\bar{H}_2,\ \bar{h}_{30})] + \\ & + h_{2z} [(\bar{H}_1,\ \bar{h}_{10})(\bar{H}_3,\ \bar{h}_{30}) - (\bar{H}_3,\ \bar{h}_{10})(\bar{H}_1,\ \bar{h}_{30})] - \\ & - h_{3z} [(\bar{H}_1,\ \bar{h}_{10})(\bar{H}_2,\ \bar{h}_{30}) - (\bar{H}_2,\ \bar{h}_{10})(\bar{H}_1,\ \bar{h}_{30})] \}, \end{aligned}$$

$$\lambda_3=\frac{1}{\Delta}\{h_{1z}[(\overline{H}_2,\ \overline{h}_{10})(\overline{H}_3,\ \overline{h}_{20})-(\overline{H}_3,\ \overline{h}_{10})(\overline{H}_2,\ \overline{h}_{20})]-$$
$$-h_{2z}[(\overline{H}_1,\ \overline{h}_{10})(\overline{H}_3,\ \overline{h}_{20})-(\overline{H}_3,\ \overline{h}_{10})(\overline{H}_1,\ \overline{h}_{20})]+$$
$$+h_{3z}[(\overline{H}_1,\ \overline{h}_{10})(\overline{H}_2,\ \overline{h}_{20})-(\overline{H}_2,\ \overline{h}_{10})(\overline{H}_1,\ \overline{h}_{20})]\}.$$

Если подставить выражения (50.18) в (50.15), то получим направление оси собственного вращения в момент t. Заметим, что это направление определяется по трем проекциям вектора $\overline{H}$ на ось Gz, причем эти проекции берутся в различные моменты времени t, $t-n_1\tau$, $t-n_2\tau$.

Возьмем теперь какие-либо три момента t_1, t_2, t_3 такие, чтобы векторы $\overline{z}_0(t_i)$ были некомпланарными, тогда орт вектора момента количества движения можно определить в виде линейной комбинации

$$\overline{l}_{0k}=\sum_{i=1}^{3}\mu_i\overline{z}_0(t_i). \tag{50.19}$$

Умножая формулу (50.19) скалярно на $\overline{z}_0(t_i)$, получим для определения величин μ_1, μ_2, μ_3 систему линейных уравнений

$$\begin{aligned}
(\overline{l}_{0k},\ \overline{z}_0(t_1))&=\cos\theta=\sum_{i=1}^{3}\mu_i(\overline{z}_0(t_i),\ \overline{z}_0(t_1)),\\
(\overline{l}_{0k},\ \overline{z}_0(t_2))&=\cos\theta=\sum_{i=1}^{3}\mu_i(\overline{z}_0(t_i),\ \overline{z}_0(t_2)),\\
(\overline{l}_{0k},\ \overline{z}_0(t_3))&=\cos\theta=\sum_{i=1}^{3}\mu_i(\overline{z}_0(t_i),\ \overline{z}_0(t_3)).
\end{aligned} \tag{50.20}$$

Здесь θ есть угол, который составляет ось собственного вращения с вектором момента количества движения.

Найдем величины μ_1, μ_2, μ_3 из системы (50.20):

$$\mu_3=\frac{\cos\theta}{\Delta}\{[(\overline{z}_0(t_2),\overline{z}_0(t_1))(\overline{z}_0(t_3),\overline{z}_0(t_2))-(\overline{z}_0(t_3),\overline{z}_0(t_1))(\overline{z}_0(t_2),\overline{z}_0(t_2))]-$$
$$-[(\overline{z}_0(t_1),\ \overline{z}_0(t_1))(\overline{z}_0(t_3),\overline{z}_0(t_2))-(\overline{z}_0(t_3),\ \overline{z}_0(t_1))(\overline{z}_0(t_1),\ \overline{z}_0(t_2))]+$$
$$+[(\overline{z}_0(t_1),\ \overline{z}_0(t_1))(\overline{z}_0(t_2),\ \overline{z}_0(t_2))-(\overline{z}_0(t_2),\ \overline{z}_0(t_1))(\overline{z}_0(t_1),\ \overline{z}_0(t_2))]\},$$

$$\mu_2=\frac{\cos\theta}{\Delta}\times$$
$$\times\{-[(\overline{z}_0(t_2),\overline{z}_0(t_1))(\overline{z}_0(t_3),\overline{z}_0(t_3))-(\overline{z}_0(t_3),\overline{z}_0(t_1))(\overline{z}_0(t_2),\overline{z}_0(t_3))]+$$
$$+[(\overline{z}_0(t_1),\overline{z}_0(t_1))(\overline{z}_0(t_3),\ \overline{z}_0(t_3))-(\overline{z}_0(t_3),\ \overline{z}_0(t_1))(\overline{z}_0(t_1),\ \overline{z}_0(t_3))]-$$
$$-[(\overline{z}_0(t_1),\ \overline{z}_0(t_1))(\overline{z}_0(t_2),\ \overline{z}_0(t_3))-(\overline{z}_0(t_2),\ \overline{z}_0(t_1))(\overline{z}_0(t_1),\ \overline{z}_0(t_3))]\},$$

(50.21)

$$\mu_1 = \frac{\cos\theta}{\Delta}\{[(\bar{z}_0(t_2), \bar{z}_0(t_2))(\bar{z}_0(t_3), \bar{z}_0(t_3)) - (\bar{z}_0(t_2), \bar{z}_0(t_3))(\bar{z}_0(t_3), \bar{z}_0(t_2))] - [(\bar{z}_0(t_1), \bar{z}_0(t_2))(\bar{z}_0(t_3), \bar{z}_0(t_3)) - (\bar{z}_0(t_3), \bar{z}_0(t_2))(\bar{z}_0(t_1), \bar{z}_0(t_3))] + [(\bar{z}_0(t_1), \bar{z}_0(t_2))(\bar{z}_0(t_2), \bar{z}_0(t_3)) - (\bar{z}_0(t_2), \bar{z}_0(t_2))(\bar{z}_0(t_1), \bar{z}_0(t_3))]\}$$

Подставляя формулы (50.21) в (50.19), найдем направление вектора момента количества движения. Из условия $l_{0k}^2 = 1$ находим $\cos\theta$:

$$\cos\theta = \pm\{\mu_{10}^2 + \mu_{20}^2 + \mu_{30}^2 + 2[\mu_{10}\ \mu_{20}(z_0(t_1),\ z_0(t_2)) + \mu_{10}\mu_{30}(\bar{z}_0(t_1),\ \bar{z}_0(t_3)) + \mu_{20}\ \mu_{30}(\bar{z}_0(t_2),\ \bar{z}_0(t_3))]\}^{-1/2}.$$

Будем считать, что угол θ острый. Благодаря такому выбору угла однозначно определяются величины μ.

Определим теперь величины угловых скоростей и направление вращений. С этой целью построим векторы $\bar{l}_{0k} \times \bar{z}_0(t_i) = \bar{c}_i$. Эти векторы будут лежать на линии узлов и их взаимное расположение, следовательно, дает возможность определить и направление вращательного движения, и величину угловых скоростей.

Если величина $\delta = (\bar{c}_1,\ \bar{c}_2,\ \bar{l}_{0k}) > 0$, то прецессия связанной системы координат по отношению к вектору момента количества движения происходит против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления орта $\bar{l}_{0k}$. При $\delta < 0$ прецессионное движение происходит по часовой стрелке. При проверке этих условий должно быть необходимо, чтобы

$$t_2 - t_1 < \tau/2.$$

Определим два угла:

$$\varphi_l = \arccos\frac{(\bar{x}_0,\ \bar{c}_1)}{|\bar{c}_1|}, \qquad \varphi_2 = \arccos\frac{(\bar{x}_0,\ \bar{c}_2)}{|\bar{c}_2|}.$$

Если величина $t_2 - t_1$ достаточно мала, то эти углы позволяют определить как величину угловой скорости собственного вращения, так и направление этого вращения.

Если угол собственного вращения отсчитывать от оси Gx в сторону линии узлов, то при $\varphi_2 - \varphi_1 > 0$ вращение будет происходить по часовой стрелке вокруг оси Gz с угловой скоростью

$$\dot{\varphi} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1},$$

если смотреть с положительного направления орта $\bar{z}_0$. Если $\varphi_2 - \varphi_1 < 0$, то вращение будет происходить по часовой стрелке

с угловой скоростью

$$\dot{\varphi}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{t_2-t_1}.$$

Величина угловой скорости прецессии будет определяться по формуле

$$\dot{\varphi}=\begin{cases}\dfrac{\arcsin\dfrac{\delta}{|\bar{c}_1||\bar{c}_2|}}{t_2-t_1}, & \text{если}\quad (\bar{c}_1,\ \bar{c}_2)>0,\\[2ex] \dfrac{\pi-\arcsin\dfrac{\delta}{|\bar{c}_1||\bar{c}_2|}}{t_2-t_1}, & \text{если}\quad (\bar{c}_1,\ \bar{c}_2)<0,\ \delta>0\\[2ex] \dfrac{-\pi-\arcsin\dfrac{\delta}{|\bar{c}_1||\bar{c}_2|}}{t_2-t_1}, & \text{если}\quad (\bar{c}_1,\ \bar{c}_2)<0,\ \delta<0.\end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р., Дифференциальные игры, М., «Мир», 1967.
2. Андронов А. А., Собрание трудов, М., Изд-во АН СССР, 1956.
3. Беллман Р., Динамическое программирование, М. ИЛ., 1961.
4. Беллман Р. и Кук К., Дифференциально-разностные уравнения, М., «Мир», 1967.
5. Биркгоф Г., Динамические системы, М., Гостехиздат, 1941
6. Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, М., ИЛ, 1962.
7. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., «Наука», 1966.
8. Гельфанд И. М., Локуциевский О. В., Метод прогонки. Дополнение к книге: Годунов С. К., Рябенький В. С., Введение в теорию разностных схем, М., Физматгиз, 1962.
9. Голубев В. В., Лекции по интегрированию уравнений движения твердого тела около неподвижной точки, М., Гостехиздат, 1953.
10. Гюнтер Н. М., Курс вариационного исчисления, М.—Л., ОГИЗ, 1941.
11. Зубов В. И., Аналитическая динамика гироскопических систем, Л., Судостроение, 1970.
12. Зубов В. И., Колебания в нелинейных и управляемых системах, Л., Судпромгиз, 1962.
13. Зубов В. И., Математические методы исследования систем автоматического регулирования, Л., Судпромгиз, 1959.
14. Зубов В. И., Методы Ляпунова и их применение, Л., Изд-во ЛГУ, 1957.
15. Зубов В. И., Теория оптимального управления, Л. Судпромгиз, 1966.
16. Коддингтон Э. А. и Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1959.
17. Красовский Н. Н., Теория управления движением, М., «Наука», 1968.
18. Красовский Н. Н., Игровые задачи о встрече движений, М., «Наука», 1970.
19. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функции комплексного переменного, М., Гостехиздат, 1956.
20. Летов А. М., Динамика полета и управление, М., «Наука», 1969.
21. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения. М., Гостехиздат, 1950.
22. Лурье А. И., Аналитическая механика, М., Физматгиз, 1961.
23. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, М., Гостехиздат, 1951.
24. Матвеев Н. М., Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Л., Изд-во ЛГУ, 1955.
25. Мышкис А. Д., Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, М., «Наука», 1972.
26. Немыцкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2-е изд. М., Гостехиздат, 1949.
27. Понтрягин Л. С. и др., Математическая теория оптимальных процессов М., Физматгиз, 1961.